АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

# МАТЕМАТИКА

## РЕФЕРАТЫ

**1 - 5265**

№ 1—6 1957
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

## МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1—1031

*

QA
1
A373
1957
Cop. 1-6

Referativnyi zhurnal: Matematika

№ 1 1957
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

*Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, С. А. Шиканов (зам. председателя), Э. В. Шпольский*

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы . . . . . 1
История математики. Биографии . . . . 2
Основания математики и математическая логика . . . . . 5
Теория чисел . . . . . 7
Алгебра . . . . . 12
Многочлены и линейная алгебра . . . . 12
Группы . . . . . 14
Поля, кольца и структуры . . . . . 24
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . 31
Топология . . . . . 32
Теория функций действительного переменного 39
Теория множеств . . . . . 45
Приближение функций полиномами и их обобщениями . . . . . 46
Теория функций комплексного переменного 52
Дифференциальные уравнения . . . . . 68
Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . . 68
Уравнения в частных производных . . . 75
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . 83
Интегральные уравнения . . . . . 84
Анализ (другие вопросы) . . . . . 86
Числовые ряды . . . . . —
Специальные функции . . . . . 93
Интегральные преобразования и операционное исчисление . . . . . 96
Приложения общих методов математического анализа . . . . . 98
Функциональный анализ . . . . . 98
Теория вероятностей . . . . . 108
Математическая статистика . . . . . 110
Теория игр и математическая экономика 117
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов . . . . . 118
Геометрия . . . . . 121
Приложения геометрии . . . . . 124
Проективная и начертательная геометрия 124
Алгебраическая геометрия . . . . . 127
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства . . . . . 129
Геометрия $n$-мерного пространства. Теория относительности . . . . . 132
Метрические методы в геометрии . . . . 137
Геометрия выпуклых многообразий . . . 140
Численные и графические методы . . . . . 141
Таблицы . . . . . 149
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . 150
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . 164
Авторский указатель . . . . . 166

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
# МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ *П. С. Александров*, *И. Н. Векуа*, *А. Н. Колмогоров*,
*Ю. В. Линник*, *А. И. Маркушевич*, *В. В. Немыцкий*, *С. М. Никольский*,
*П. С. Новиков*, *Д. Ю. Панов*, *М. М. Постников*, *Н. В. Смирнов*, *С. П. Фиников*

**Рефераты 1—1031** **№ 1** **Январь 1957**


## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

**Доклад об организации научной работы в области математических наук. Маркович** (Реферат о организацији научног рада у области математичких наука. Марковић Драгољуб), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, **7**, № 1—2, 130—136 (серб.; рез. франц.).

Тезисы доклада, прочитанного проф. Белградского университета Д. Марковичем на заседании II-го конгресса математиков и физиков Югославии (г. Загреб, 4—9 октября 1954 г.). Доклад содержит обзор научных организаций в ФНРЮ и состояния научной работы в них. В последние годы в Югославии резко возросло число научных и педагогических работников-математиков. Организован Математический и физический институт Сербской академии наук. Возникли местные республиканские научные общества. В 1949 г. в г. Бледе основан Совет физико-математических обществ Югославии, охватывающий почти всех научных работников и преподавателей математиков и физиков. Математический институт с 1947 г. издает «Publications de l'institut mathématique», а с 1951 г.— «Зборник радове». Регулярно выходят печатные органы научных обществ: в Сербии с 1949 г.— «Весник», в Хорватии с 1946 г.— «Гласник математичко-физички и астрономски», в Словении — «Обзорник за математико ин физико», в Македонии — «Годишен зборник» и «Билтен» и др. Дается критический анализ современной организации научной работы. К. А. Рыбников

2. **II конгресс математиков и физиков ФНРЮгославии. Маркович** (II конгрес математичара и физичара ФНР Југославије. Марковић Драгољуб), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, **6**, № 3—4, 271—273 (серб.)

Информационное сообщение о работе конгресса, организованного Советом физико-математических обществ в г. Загребе, 4—9 октября 1954 г. (Первый конгресс проходил в 1949 г. в г. Бледе). В работе конгресса участвовало около 600 чел. Доложено 170 работ: 57 — в секции математики и 113 — в секции физики. Большое место заняли вопросы математического образования и подготовки кадров специалистов-математиков. К. А. Рыбников

3. **Всесоюзное совещание по функциональному анализу и его применениям.** Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 223—225

В сообщении приводится список обзорных докладов, прочитанных на совещании.

4. **О математических рукописях К. Маркса. Рыбников К. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **2**, М., АН СССР, 1956, 102

Краткое содержание доклада, прочитанного на 3-ем Всесоюзном математическом съезде.

5. **Роль математиков в современной жизни. Дармуа** (Rôle du mathématicien dans la vie contemporaine. Darmois G.), Enseign. math., 1955, **1**, № 1—3, 149—158 (франц.)

Автор собрал мнения ряда видных деятелей французской высшей школы относительно роли математики и характера труда математиков-специалистов в различных областях науки, культуры и промышленности. Дается обзор некоторых из них и делается вывод, что в преподавании математики должны сочетаться высокая теоретическая подготовка и привитие практических вычислительных навыков. Последнее должно быть конкретным, с максимальным учетом того, в каких учреждениях специалисты-математики, подготовляемые высшей школой, будут находить себе применение. Из этих учреждений в первую очередь называются: лаборатории ядерной физики; лаборатории вычислительные или снабженные вычислительной техникой; артиллерийские лаборатории; лаборатории высоких температур; большие предприятия газовой, электрической и металлургической промышленности; государственные учреждения (бухгалтерия, управление национальных доходов); экономические и статистические учреждения. Исходя из этого, автор считает особенно важным в преподавании математики обращать внимание на математические методы физики, теорию вероятностей и математическую статистику, математические методы в экономике (эконометрию), математические методы в биологии (биометрию), приложения статистических методов в промышленности. В Парижском университете эти вопросы разрабатываются и внедряются в преподавание силами специально созданного при университете Статистического института. К. А. Рыбников

6. **Математическое мышление и точное описание природы. Штрубеккер** (Mathematisches Denken und exakte Naturbeschreibung. Strubecker Karl), Naturwiss. Rundschau, 1956, **9**, № 7, 261—265 (нем.)

7. **Геометрия и действительность. Дингler** (Geometrie und Wirklichkeit. Dingler Hugo), Dialectica, 1956, 9, № 3—4, 341—362 (нем.)

8. **О философском смысле геометрии Лобачевского. Кольман Э.,** Вестн. АН СССР, 1956, № 6, 72—77

9. **Основные черты кибернетики. Соболев С. Л., Китов А. И., Ляпунов А. А.,** Вопр. философии, 1955, № 4, 136—148

Статья представляет собою первую попытку серьезного изучения научного содержания кибернетики. Кибернетика определена как новое научное направление, созданное Н. Винером, не представляющее, однако, достаточно стройной и цельной научной дисциплины. Основными разделами кибернетики, по мне

нию авторов, являются: 1) теория информации, 2) теория счетных машин, как теория самоорганизующихся логических процессов, подобных человеческому мышлению, 3) теория систем автоматического управления, включающая в себя изучение с функциональной точки зрения процессов работы нервной системы, органов чувств и других органов живых организмов. Уделено внимание математическому аппарату кибернетики, в частности учению об информации, со ссылкой на работы К. Шеннона (сб. переводов «Передача электрических сигналов при наличии помех», М., 1953) и А. Я. Хинчина (РЖМат, 1954, 3771). Отмечается необходимость борьбы против зарубежной реакционной идеологии и в то же время указывается на ошибки некоторых советских философов, не разобравшихся в научном содержании кибернетики. Сами авторы критики философских идеалистических концепций, имеющих место в связи с развитием кибернетики, не дают.

П. Е. Сивоконь

10. **Кибернетика — псевдонаука о машинах, животных, человеке и обществе. Гладков Т. К.,** Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 1, 57—67

Критика зарубежных идеалистических философских концепций, связанных с кибернетикой. В статье не освещен математический аппарат кибернетики, без которого критика автором философских принципов кибернетики в значительной мере лишается своих научных оснований. П. Е. Сивоконь

11. **Техническая кибернетика. Китов А.,** Радио, 1955, № 11, 42—44

12. **Что такое кибернетика? Кольман Э.,** Вопр. философии, 1955, № 4, 148—159

13. **Теории и игры. Воззрения и тенденции. Булиган** (Théories et jeux. Aspects et tendances. Bouligand Georges), Rev. gén. sci. pures et appl., 1954, **61**, № 3—4, 68—85 (франц.)

Автор полагает, что всякую дедуктивную теорию (например, рациональную механику) можно рассматривать как игру с одним игроком, если ее предпосылки и правила выводов рассматривать как правила игры. Теория плодотворна, если удачно выбраны «правила» этой игры. С этой точки зрения автор дает обзор ряда теорий из популярных и научных математических сочинений XVII—XIX вв. и современных (A. Denjoy, K. Menger, P. Lévy, M. Fréchet). Упоминаются и некоторые работы, относящиеся специально к теории игр (J. von Neumann, O. Morgenstern, C. Berge, B. Mandelbrojt). Л. В. Канторович

14 К. **Избранное. Вейль** (Selecta. Weyl Hermann), Basel — Stuttgart, Birkhäuser, 1956, 592 S.) (нем.)

Книга содержит 20 работ Вейля. Работы расположены в хронологическом порядке и охватывают период с 1910 по 1952 г. Среди них известные работы автора по теории равнораспределенности (1916), по теории представления непрерывных групп (1925—1927), по вопросам теории дифференциальных уравнений (1942—1952) и др. Книга снабжена одним из последних портретов Вейля и полным списком его трудов. Издание книги было приурочено к семидесятилетию со дня рождения Вейля, исполнившемуся в ноябре 1955 г. (Вейль скончался в декабре 1955 г.). В. И. Левин

15 К. **Собрание сочинений. Т. 3. Шлефли** (Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. 3. Schläfli Ludwig. Basel, Birkhäuser, 1956, 402 S., ill., 59. 30 DM) (нем.)

Настоящий третий том собрания сочинений Шлефли содержит его наиболее важные теоретико-функциональные работы, статьи по теории бесселевых функций, модулярных функций и шаровых функций Гейне. Сюда же включены его работы по теории алгебраических поверхностей и абелевых интегралов, статья о сферическом маятнике и некоторые статьи философского характера. В. И. Левин

16 Д. **Вопросы равносильности уравнений и систем уравнений в курсе элементарной математики педагогических институтов. Полякова Т. Н.** Автореф. дисс. канд. пед. н. по методике математики. Моск. гор. пед. ин-т, М., 1956

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

17. **Математика мегалитовой культуры и ее эволюция. Феттвейс** (Die Mathematik des Megalithkulturkreises und ihre Entwicklung. Fettweis E.), Scientia (Ital.), 1956, **91**, № 1, 1—15 (нем.). Suppl. 1—12 (франц.)

Мегалитовая культура охватывала в эпоху неолита и бронзового века весь тогдашний мир. Она являлась непосредственной предшественницей ранних великих культур Египта, шумеров, Вавилона, Крита, Индии, Китая, Средней Америки, Перу и Полинезии. Возникла она в юго-западной Азии; палеоэтнические следы ее сохранились в наиболее явной форме в Трансиордании, далее по берегу Африки и Европы, а на востоке — в южной России, Индии, Китае и Японии. Математика мегалита представляет интерес как высшая ступень дописьменной математики.

На основании большого числа новейших палеоэтнических исследований автор приходит к заключению, что в мегалитический период двоичная система счисления заменяется десятичной и двадцатиричной, но еще не определилась победа ни той, ни другой. Геометрические знания уже вышли за пределы примитивных способов измерения. Существует ориентировка построек и могильников, отношения размеров частей человеческого тела. Автор считает, что отважные мореплаватели южных морей эпохи развили бы настоящую геометрию, если бы вторжение европейцев в их страны в XVIII в. не положило конец естественному развитию этой культуры.

Статья богата сведениями о сохранившихся пережитках этой отдаленной от нашего времени культуры.

И. Я. Депман

18. **Прикладная математика в древности. Ван-дер-Варден** (Les mathématiques appliquées dans l'antiquité. Van der Waerden B. L.), Enseign. math., 1955, **1**, № 1-3, 44—55 (франц.)

В связи с описанием Самосского туннеля (VI в. до н. э.), проведенного через гору сразу с двух концов, автор приводит соответствующий текст Герона; затем рассказывает о возникновении театральной перспективы (V в. до н. э.), теории стереографической проекции (Аполлоний Пергский — Гиппарх — Птолемей) и, наконец, о водяных часах для дня переменной длины по тексту Витрувия и Зальцбургскому Фрагменту (реконструкция Альберта Рома). И. Н. Веселовский

19. **Материалы по истории индийской математики (1). Ядзима, Ивамото** (インド數學史研究資料 1. 矢島祐利, 岩本裕), 科學史研究, Кагакуси кэнкю, J. History Sci. Japan, 1955, № 33, 36—38 (япон.)

Библиографическая часть работы авторов «Собрание и перевод материалов истории индийской математики».

Чай Тай Сен

20. **Теория Платона о единичности и неопределенной двойственности. Маркович** (La théorie de Platon sur l'Un et la Dyade indéfinie et ses traces dans la mathématique grecque. Markovič Z.), Bull. scient. Conseil acad. RPFV, 1955, **2**, № 2, 57 (франц.)

Краткое содержание доклада, прочитанного на Международном съезде математиков в Амстердаме в сентябре 1954 г. (РЖМат, 1956, 7831). А. Е. Раик

**21. Васанцы из народа и из придворных самураев. Акабанэ** (底民の和算家と藩士の和算家.赤羽千鶴), 科學史研究, Кагакуси кэнкю, J. History Sci. Japan, 1955, № 34, 22—25 (япон.)

До того как в Японию проникла европейская математика, там распространялась китайская математика в основном через Корею. К XVII—XVIII вв. относится развитие и расцвет этой науки, называемой «Васан», в отличие от европейской математики.

Для части придворных самураев, составлявших господствующий класс, васан являлась лишь отдыхом и развлечением; лишь для людей из народа она становилась профессией. Вообще же к математике относились пренебрежительно и число тех, кто занимался ею специально, было ничтожно мало.

Автор статьи, приводя в качестве примеров «васанцев» из района Синсю: из народа Тэрадзима Мунетомо (1794—1884) и Кобаяси Тадара (1796—1871) и из придворных самураев Такенобу (1782—1852), сравнивает, рассматривая подход к изучению и содержание исследований, деятельность этих васанцев, вышедших из различных классов. Выводы таковы:

Во-первых, распространение васан на периферии обязано придворным васанцам, потому что только они были в состоянии общаться с культурой центра; кроме того, васан была нужна им для измерительных и хозяйственных работ, а также для сбора налогов.

Во-вторых, эти васанцы проявляли пассивность в опубликовании своих работ; их сдерживало придворное положение, напротив, васанцы из народа проявляли активность. Почти все они внесли свой вклад в дело воспитания молодежи этой местности и развития культуры, в частности, внесли большой вклад в землемерные работы, произведенные по всей стране в первые годы Мейдзи.

В-третьих, материалы работ васанцев из народа сохраняются и поныне их потомками в деревнях. Памятники их деятельности остались также в соборах и храмах. От занятия математикой придворных самураев, оторванных от естествознания и техники, к настоящему времени сохранилось очень мало. В связи с введением европейской математики васан придворных самураев вообще перестала существовать.

Автор трактует эти вопросы в своей книге «Рассказ об отечественных математиках». Чэ Тэ Сен

**22. К истории математики на островах Рюкю. I. Судо** (A study of the history of mathematics in Ryukyu. I. Sudo Toshiichi), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1954, 4, № 2, 165—177 (англ.)

Первая из трех глав работы о местной математике на островах Рюкю, где сложилась самобытная культура, хотя с 1609 г. острова находятся под протекторатом Японии, а до этого существовала довольно активная связь с Китаем. Кратко описаны математические знания островитян в XVI—XIX вв. В основу работы положены рукописные книги конца XIX в. и начала XX в. (печатное «Собрание работ по математике» является единственным случаем издания математических работ). Авторами этих рукописей были государственные чиновники островов Окинава, Мияко и Исигаки. Математическое содержание книг относится к элементарной математике: теорема Пифагора, вычисление площадей и объемов простейших геометрических тел, извлечение корня и т. д. Более подробный анализ автор предполагает дать в последующих главах.

Э. И. Березкина

**23. К истории математики на островах Рюкю. II. Судо** (A study of the history of mathematics in Ryu-kyu. II. Sudo Toshiichi), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1955, 5, № 1, 61—82 (англ.)

Описание методики счета при помощи узлов на веревке. И. Н. Веселовский

**24. Первые книги по алгебре, напечатанные по-румынски. Кымпан** (Primele cărţi de algebră tipărite în romîneşte. Cîmpan Florica T.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR, Fil. Iaşi, 1955, Ser. 1, 6, № 1—2, 143—154 (рум.; рез. русс., франц.)

Краткий обзор первых учебников алгебры в княжествах Валахии и Молдавии (впоследствии объединившихся в Румынию). Первый из этих учебников был выпущен Асаки в столице Молдавии Яссах в 1837 г. и представляет собой переработку французского учебника Безу. Второй учебник был выпущен Поэнару в столице Валахии Бухаресте в 1841 г.; этот учебник является переводом с латинского. До 1881 г. было выпущено еще 9 учебников, часть из которых является переводами французских и австро-венгерских учебников. Б. А. Розенфельд

**25. Николай Иванович Лобачевский (К столетию со дня смерти Лобачевского). Ефимов Н. В.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 3—15

Биографические сведения о Лобачевском, краткая характеристика открытия Лобачевским неевклидовой геометрии и его материалистических взглядов. Г. Р.

**26. Гаусс и Лобачевский. Норден А. П.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 145—168

История изменения взглядов Гаусса на основания геометрии, прослеженная по письмам, дневнику и сохранившимся отрывочным записям. Прошел двадцатипятилетний период исканий, прежде чем Гаусс начал склоняться к признанию недоказуемости евклидовой аксиомы параллельности (письмо к Ольберсу 1817 г.). После заметки Швейкарта, в 1819 г., Гаусс окончательно утвердился в этом мнении. К этому времени он уже владел основами неевклидовой геометрии, но записывать кое-что из своих размышлений он начал в 1831 г., причем имеются записи, относящиеся и к 40-м годам. Гаусс владел абсолютной теорией параллелей, понятием линии равного основания, понятием предельной линии, понятием предельной поверхности и ее внутренней геометрией, теорией площадей, основными формулами гиперболической тригонометрии. Изложена схема рассуждений Гаусса в двух последних вопросах. Проведено сравнение степени развития неевклидовой геометрии у Гаусса и Лобачевского. Анализируются причины, заставившие Гаусса отказаться от обнародования своих мыслей по теории параллелей.

Б. Л. Лаптев

**27. Н. И. Лобачевский и Казанское экономическое общество. Гутман Д. С.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 77—100

Лобачевский был со времени основания Общества (1839 г.) одним из руководящих его членов. Помимо многообразных непосредственных трудов по изобретательству и рационализации в области сельского хозяйства, он, стремясь к всемерному развитию производительных сил России, вел в Обществе обширную повседневную организационно-административную работу. Благодаря его деятельному участию Общество сумело развернуть исследование экономических нужд края, организовать выставки с/х и промышленности, проводить пропаганду внедрения научных достижений и хозяйственного опыта, дискутировать вопрос о формах профессионального образования и пр. Использован ряд неопубликованных архивных документов.

Б. Л. Лаптев

**28. И. А. Литтров — учитель Н. И. Лобачевского. Депман И. Я.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 111—122

Сжатый биографический очерк И. А. Литтрова, занимавшего кафедру астрономии в Казанском универ-

ситете в 1810—1816 гг.; с перечислением его работ, относящихся к этому периоду и опубликованных в изданиях Петербургской академии наук. Полная библиография не приводится, причем отсутствуют как точная ссылка на издание, где она опубликована, так и вообще указания на биографическую литературу. Перечислен ряд его книг, изложена приведенная им арифметическая теория календаря. Указаны переводы на русский язык популярных руководств и книг Литтрова по математике и астрономии. Новые архивные материалы не привлекались. Б. Л. Лаптев

29. **Некоторые сведения к биографии Н. И. Лобачевского. Федоренко Б. В.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 65—75

Приводятся документы, касающиеся отца Н. И. Лобачевского, разысканные автором в Центральном государственном архиве древних актов, в том числе челобитная шестнадцатилетнего Ивана Максимовича Лобачевского о приеме его на службу копиистом в межевую канцелярию, свидетельство о его происхождении, определения Межевой канцелярии о перемещениях его по службе и др. Б. Л. Лаптев

30. **Кто был автором анонимной рецензии на «Пангеометрию» Лобачевского в «Отечественных записках». Зубов В. П.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 123—128

Высказано предположение, что автором рецензии 1856 г. был профессор Петербургского ун-та А. Н. Савич (1810—1883), причем приведены довольно убедительные обоснования. Б. Л. Лаптев

31. **Геттингенское общество наук и Н. И. Лобачевский.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 107—110

Публикуются с комментариями три документа, связанные с пересылкой Лобачевскому Геттингенским обществом наук через Петербургскую академию наук серебряного и бронзового экземпляров медали, вычеканенной в память Гаусса. Медали были высланы, когда Лобачевский уже скончался, и были вручены его жене. Б. Л. Лаптев

32. **Литература к 100-летию со дня смерти Н. И. Лобачевского. Рыбкин Г. Ф.,** Вестн. АН СССР, 1956, № 4, 151—153

33. **Некоторые материалы к биографии академика А. А. Маркова. Кольцов А. В.** В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 1. М., АН СССР, 1956, 204—207

Рассматриваются некоторые документы, находящиеся в Архиве АН СССР, характеризующие борьбу акад. А. А. Маркова с реакционными действиями царского правительства (и части академиков), направленными против науки и просвещения. Г. Р.

34. **Николай Григорьевич Чудаков (к 50-летию со дня рождения).** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 213—215

35. **Константин Алексеевич Андреев как геометр. Черняев М. П.,** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 723—756

Очерк жизни и научного творчества К. А. Андреева— профессора Харьковского, а затем Московского университетов.

Статья начинается весьма сжатым очерком возникновения и развития синтетической геометрии в трудах крупнейших геометров прошлого. Приложен список трудов К. А. Андреева (42 названия). В. Ф. Рогаченко

36. **Казанский геометр Федор Матвеевич Суворов. Олоничев П. М.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 271—316

Обстоятельное описание жизни и педагогической деятельности Ф. М. Суворова (1845—1911), сыгравшего значительную роль в распространении геометрических идей Лобачевского и в развитии теории римановых пространств. Дан анализ его важнейших работ. В его магистерской диссертации «О характеристиках систем трех измерений» (1871) мы имеем первое в России и одно из первых в мировой литературе исследование по теории кривизны римановых пространств, появившееся вскоре после опубликования известного мемуара Римана (1868). Ф. М. Суворов нашел полную систему скалярных дифференциальных инвариантов 2-го порядка трехмерного риманова пространства и получил их геометрическую интерпретацию, путем рассмотрения $V_3$, вмещенного в $E_4$. Изучено выделение пространств постоянной кривизны: Лобачевского, Римана (сферического) и Евклида и их свойства.

Автор переводит результаты Суворова на язык современной дифференциальной геометрии и показывает, что в них содержится ряд величин и соотношений, обычно приписываемых Риччи, Леви — Чивита и Бьянки, получившим их значительно позднее.

Докторская диссертация Суворова была посвящена теории мнимых элементов в геометрии. Б. Л. Лаптев

37. **Личные воспоминания о математиках из числа бывших членов академии. Лорей** (Wissenschaftliche Sitzung. Persönliche Erinnerungen an Mathematiker unter den einstigen Akademie-Mitgliedern. Lorey Wilhelm), Nova acta Leopol., 1954, 16, № 114, 419—424 (нем.)

Среди членов Леопольдины (Akademie Caesaraea Leopoldina), основанной в 1662 г. как медицинское общество в Лейпциге, были выдающиеся математики Кантор, Миттаг — Леффлер, Клейн, Гильберт и др., с которыми автор был лично знаком. В. И. Левин

38. **Карл Фридрих Гаусс (К столетию со дня смерти) Рыбников К. А.** В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 1. М., АН СССР, 1956, 44—53

39. **Уильям Роуэн Гамильтон. Григорьян А. Т.,** Наука и жизнь, 1955, № 12, 58

40. **Пуассон. Пахарес** (Poisson. Pajares E.), Gaz. mat., 1955, 7, № 5—6, 105—108 (исп.)

Дается очерк жизни Пуассона и перечень его званий и занимаемых им должностей и научных дискуссий: с Лапласом о теории капиллярности, с Фурье о теории тепла, с Френелем о волновой теории света. Длинный перечень областей математики и физики, в которых оставил следы Пуассон, заключается выводом о том, что Пуассон является одним из главнейших основоположников математической физики. И. Я. Депман

41. **Математические труды Вандермонда. Лебег** (L'œuvre mathématique de Vandermonde. Lebesgue Henri), Enseign. Math., 1956, 1, № 4, 203—223 (франц.)

Вандермонд (1735—1796) родился в Париже. Отец направлял интересы болезненного ребенка на музыку, чтобы удержать его от умственного напряжения, но уроки Фонтена, известного своими резкими нападками на вариационное исчисление Лагранжа, увлекли мальчика. В 1771 г.—член академии и в 1771 и 1772 гг. печатает в трудах академии свои единственные 4 математических мемуара. В 1782 г. В. Директор Conservatoire des Arts et Métiers, в 1792 г.— начальник бюро снабжения армии. Горячий участник революции, В. член парижской коммуны и клуба якобинцев, доверенный друг Монжа, активный сотрудник последнего по снабжению революционной армии оружием. Член созданного революцией в 1795 г. Национального института (взамен уничтоженной Академии) и первый в списке умерших членов его.

Математические труды В. во Франции были забыты; внимание на них обратили Кронекер, считавший В. вместе с Лагранжем крупнейшими предшественниками Абеля в алгебре, и Максуэлл, который замегил запись в дневнике Гаусса, называвшего, в связи с геометрией

положения, после Лейбница только два имени — Эйлера и В. Вообще же имя В. упоминалось лишь в связи с «определителем В.», к которому, как показывает Лебег, В. не имеет отношения. Из четырех мемуаров В. значение для науки имеет четвертый, алгебраический, в котором он дает идею резольвенты Лагранжа, теории подстановок, циклических инвариантов. В теории двучленных уравнений В. предвосхитил многое, приписываемое Гауссу. По мнению Лебега, непопулярность в науке В. происходит от его скромности и от того, что он сам не давал себе отчета в важности своих открытий.

Примечание референта. Более детальный обзор творчества Вандермонда можно найти в книге «Niels Nielsen, Géomètres français sous la Révolution». И. Я. Депман

42. **Анри Фер (1870—1954). Его жизнь и деятельность** (Henri Fehr (1870—1954). Sa vie et son œuvre), Enseign. math., 1955, **1**, № 1—3, 5—17 (франц.)

С подзаголовком: «L'Enseignement mathématique в трауре» публикуются сведения о жизни и деятельности заслуженного швейцарского математика А. Фера, одного из основателей этого журнала, почетного профессора Женевского университета, проработавшего в последнем около 50 лет.

Отмечаются многочисленные факты научно-педагогической и организационной работы А. Фера.

К. А. Рыбников

43. **К 80-летию со дня рождения Эрхарда Шмидта.** Неванлинна (Erhard Schmidt zu seinem 80. Geburtstag. Nevanlinna Rolf), Math. Nachr. 1956, **15**, № 1, 3—6 (нем.)

44. **Хью Вильям Сигар — профессор математики** (Hugh William Segar, M. A., F. R. S. N. Z.), Trans. Roy. Soc. New Zealand, 1955, **82**, № 5, 1195—1197 (англ.)

45. **К 70-летию со дня рождения Вильгельма Бляшке.** Келер (Zum 70. Geburtstag von Wilhelm Blaschke. Kähler Erich), Forsch. und. Fortschr., 1955, **29**, № 9, 286—287 (нем.)

46. **Столетие со дня рождения Поля Аппеля** (Centenaire de la naissance de Paul Appell), Ann. Univ. Paris, 1956, **26**, № 1, 14—31 (франц.)

Речи, произнесенные 16 декабря 1955 г. в Сорбонне на юбилее Аппеля (1855—1930). И. Н. Веселовский

47. **Жизнь и деятельность профессора Таддеуса Банахевича. Витковский** (The life and work of professor Dr. Thaddeus Banachiewicz. 13.II.1882—17.XI.1954. Witkowski J.), Acta astron. (Warszawa), 1955, **C5**, oct., 85—94 (англ.)

48. **История развития математики. Инаба.** (數學發達史. 稻葉三男, 三笠書房. B6, 229頁, 220圓, Микаса-сёбо, 1954, 229 стр., 220 иен (япон.)

---

См. также: 526, 709, 752, 966

## ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

49. **Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов. Мучник А. А.**, Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 2, 194—197

Дается отрицательное решение проблемы сводимости Поста; это решение получено с помощью классических рассуждений.

Именно, доказывается существование двух рекурсивно перечислимых, но нерекурсивных множеств $H_1$ и $H_2$, не сводящихся друг к другу частично-рекурсивными операторами. Этот результат допускает следующее усиление:

Теорема 2. Существует рекурсивно перечислимая последовательность гиперпростых рекурсивно перечислимых множеств $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$, члены которой попарно не сводимы друг к другу посредством частично-рекурсивных операторов.

Теорема 3. Для всякого рекурсивно перечислимого нерекурсивного множества $G$ существует гиперпростое рекурсивно перечислимое множество $H$, которое сводится к $G$ и к которому $G$ не сводится посредством частично-рекурсивного оператора.

Доказывается также несколько теорем, связанных с понятием массовой проблемы, введенным в диссертации Ю. Т. Медведева (РЖМат, 1956, 3607 Д). Массовая проблема — это класс $\{A\}$ всюду определенных функций. Массовая проблема $A$ сводится к массовой проблеме $B$, если некоторый частично-рекурсивный оператор $T$ преобразует всякую функцию класса $\{B\}$ в функцию класса $\{A\}$. Если $A$ не сводится $B$ и $B$ не сводится $A$, то $A$ и $B$ называются несравнимыми. $A_\psi$ — проблема продолжаемости частично-рекурсивной функции $\psi(n)$, состоящая из всех функций, совпадающих с $\psi(n)$ на области определенности последней.

Пусть проблема $B$ состоит из одной функции. Тогда

Теорема 4. Если проблема $B$ сводится к $A_\psi$ то $B$ — разрешимая проблема.

Теорема 5. Для всякой пары рекурсивно неотделимых рекурсивно перечислимых множеств $E_1$ и $E_2$ существует рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество $H$ такое, что проблема отделимости $E_1$ и $E_2$ не сводится к проблеме разрешимости $H$.

Теорема 6. Существует рекурсивно перечислимая последовательность попарно несравнимых проблем отделимости рекурсивно перечислимых множеств.

Теорема 7. Для всякой неразрешимой проблемы $A_{E_1E_2}$ отделимости рекурсивно перечислимых множеств $E_1$ и $E_2$ существует проблема отделимости $A_{H_1H_2}$ рекурсивно неотделимых рекурсивно перечислимых множеств $H_1$ и $H_2$ такая, что $A_{E_1E_2}$ не сводится к $A_{H_1H_2}$.

Теоремы 1—7 допускают обобщения, связанные с рассмотрением вместо рекурсивно перечислимых множеств множеств более высоких классов в классификации Клини-Мостовского. А. С. Есенин-Вольпин

50. **Об одном нормальном понятии теории классов. Субьета** (Sobre una nocion normal de la teoria de las clases. Zubieta R. F.), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, **10**, № 3—4, 33—34 (исп.)

Предлагается в аксиоматической теории множеств Гёделя — Бернайса рассматривать понятие «класс $X$ униформен относительно $Y$», определяемое формулой

$$\mathrm{Un}(Y,X) \equiv (x)(y)(u)(w)[<ux> \in X \cdot <wy> \in X : \supset (<xy> > \in Y . \supset . <uw> \in Y)]$$

Это понятие служит обобщением понятия однозначного класса. Именно, $\mathrm{Un}\ (I,X) . \equiv . \mathrm{Un}(X)$, где $I$ — класс всех пар вида $<xx>$. А. С. Есенин-Вольпин

51. **О примитивной рекурсивности некоторых рекурсий. Ху Ши-хуа**(一種遞歸式的原始遞歸性. 胡世華), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, **6**, № 1, 93—104 (кит.; рез. англ.)

Пусть оператор $\overset{y}{\underset{x=0}{\mathrm{F}}}$ определяется функциями $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ такими, что для любой функции $\gamma$ удовлетворяется следующая схема рекурсии:

$$\begin{cases} \overset{0}{\underset{x=0}{\mathrm{F}}}\ \gamma(x) = \gamma(0), \\ \overset{y'}{\underset{x=0}{\mathrm{F}}}\ \gamma(x) = \beta\left(y, \overset{y}{\underset{x=0}{\mathrm{F}}}\ \gamma(\gamma_1(x)), \ldots, \overset{y}{\underset{x=0}{\mathrm{F}}}\ \gamma(\gamma_k(x))\right). \end{cases}$$

Доказывается, что функция $\overset{y}{\underset{x=0}{\mathrm{F}}}\ \gamma(x)$ примитивно-рекурсивна относительно $\beta, \gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Резюме автора

**52. Вариант доказательства эквивалентности между полной индукцией и однозначностью примитивной рекурсии.** **С к о л е м** (A version of the proof of equivalence between complete induction and the uniqueness of primitive recursion. S k o l e m Th.), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1956, **29**, № 3, 10—15 (англ.)

Пусть справедливы аксиомы рефлексивности, симметрии и транзитивности равенства, а также аксиома, утверждающая, что верное равенство не нарушается в случае замены входящего в него терма равным ему термом. Тогда, очевидно, из принципа полной индукции вытекает принцип однозначности примитивной рекурсии, состоящий в том, что две функции, удовлетворяющие одной и той же схеме примитивной рекурсии, совпадают.

В реферируемой статье доказывается, что и обратно, из принципа однозначности примитивной рекурсии вытекает принцип полной индукции. Доказательство автора является упрощением доказательства, данного ранее Бернайсом (P. Bernays) и кратко изложенного в статье Гудстейна (Goodstein R. L., Proc. London Math. Soc., 2-nd ser., 1945, **48**, 407—408). В частности, автор обходится без многократной рекурсии.

Опечатка в формулировке принципа однозначности примитивной рекурсии: стр. 11, строка 9 сверху, напечатано $g(a') = H(a, f(a))$, следует читать $g(a') = H(a, g(a))$.

Э. С. Орловский

**53. Об арифметических классах, не замкнутых относительно прямого произведения.** **Б и н г** (On arithmetical classes not closed under direct union. B i n g K u r t), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 836—846 (англ.)

Статья использует понятия и обозначения, введенные Тарским (Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge, 1950, **1**, 705—720). Приведем необходимые определения.

Фиксируем класс $\mathfrak{U}$ всех алгебр вида $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle$, где $+$ — бинарная операция. Возьмем некоторую $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle \in \mathfrak{U}$. Через $A^\omega$ обозначим множество всех последовательностей $x = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ с элементами $x_i \in A$. Каждому $x \in A^\omega$ и каждому натуральному $k$ сопоставим множество $\frac{x}{k}$ всех таких $y \in A^\omega$, которые, быть может, отличаются от $x$ на $k$-ом терме. Определим две операции, определенные на подмножествах $A^\omega$. Каждому множеству $X \subseteq A^\omega$ и каждому натуральному числу $k$ отнесем множество $\nabla_k X$ таких $y \in A^\omega$, что $\left(\mathrm{E}x \in \frac{y}{k}\right)[x \in X]$ (операция внешней цилиндрификации); и множество $\Delta_k X$ таких $y \in A^\omega$, что $\left(\mathrm{A}x \in \frac{y}{k}\right)[x \in X]$ (операция внутренней цилиндрификации).

Обозначим через **F** множество функций $F$, определенных на $\mathfrak{U}$ и относящих каждой алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle \in \mathfrak{U}$ множество $F(\mathfrak{A}) \subseteq A^\omega$. Для произвольных натуральных чисел $k$, $l$ и $m$ введем функции $i_{k,l} \in \mathbf{F}$ и $s_{k,l,m} \in \mathbf{F}$. Если $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle \in \mathfrak{U}$, то, по определению, $i_{k,l}(\mathfrak{A}) = \{x \mid x \in A^\omega,\ x_k = x_l\}$, $s_{k,l,m}(\mathfrak{A}) = \{x \mid x \in A^\omega,\ x_k + x_l = x_m\}$. (Через $\{x \mid \ldots\}$ обозначается множество всех $x$, удовлетворяющих условию, написанному справа от черты). Функции $i_{k,l}$ и $s_{k,l,m}$ будем называть элементарными. Множество всех элементарных функций обозначим **EF**. Для произвольных $F, G \in \mathbf{F}$ и произвольного натурального $k$ определим функции $F \cap G$, $\overline{F}$, и $\Delta_k F \in \mathbf{F}$. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle \in \mathfrak{U}$. Тогда, по определению: если $F \cap G = H$, то $H(\mathfrak{A}) = F(\mathfrak{A}) \cap G(\mathfrak{A})$; если $\overline{F} = H$, то $H(\mathfrak{A}) = A^\omega - F(\mathfrak{A})$; если $\Delta_k F = H$, то $H(\mathfrak{A}) = \Delta_k F(\mathfrak{A})$. Аналогично определяются $F \cup G$ и $\nabla_k F$. Определим множество арифметических функций (в символах: **AF**) как наименьшее множество в **F**, содержащее **EF** и замкнутое относительно операций $\cup$, $^-$ и $\nabla_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), то множество универсальных функций (в символах: **UF**) как наименьшее множество в **AF**, содержащее **EF** и замкнутое относительно операций $\cup$ и $^-$. Для $F \in \mathbf{AF}$ определим множество наследников $F$ как наименьшее множество в **AF**, содержащее $F$ и замкнутое относительно операций $\nabla_k$, $\Delta_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Определим множество **CONDF** условных функций как множество, состоящее из всех наследников универсальных функций, представимых в виде $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{ij}$, где $I$, $J$ — конечные, $F_{ij} \in \mathbf{EF}$ или $\overline{F}_{ij} \in \mathbf{EF}$ и при каждом $i$ не более одной $F_{ij} \in \mathbf{EF}$. Аналогично, взяв наследники универсальных функций, представимых в виде $\bigcup_{i \in I} F_i$, где $I$ — конечное и $F_i \in \mathbf{EF}$ или $\overline{F}_i \in \mathbf{EF}$, мы получим множество **DISJF** дизъюнктивных функций; взяв наследники универсальных функций, представимых в виде $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{ij}$, где $I$, $J$ — конечные и $F_{ij} \in \mathbf{EF}$, мы получим множество **POSF** положительных функций.

Для произвольной $F \in \mathbf{F}$ положим

$$\mathscr{CL}(F) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} = \langle A, + \rangle \in \mathfrak{U},\ F(\mathfrak{A}) = A^\omega\}.$$

Множество алгебр $S \subseteq \mathfrak{U}$ назовем арифметическим классом (в символах: $S \in \mathbf{AC}$), если $S = \mathscr{CL}(F)$ для некоторой $F \in \mathbf{AF}$. Аналогично мы определим семейство универсальных классов ($S \in \mathbf{UC}$, если $F \in \mathbf{UF}$), условных классов ($S \in \mathbf{CONDC}$, если $F \in \mathbf{CONDF}$), дизъюнктивных классов ($S \in \mathbf{DISJC}$, если $F \in \mathbf{DISJF}$) и положительных классов ($S \in \mathbf{POSC}$, если $F \in \mathbf{POSF}$).

Было известно: если $S \in \mathbf{CONDC}$, то класс алгебр $S$ замкнут относительно прямого произведения. Автор доказал: если $S \in [(\mathbf{UC} \cup \mathbf{DISJC} \cup \mathbf{POSC}) - \mathbf{CONDC}]$, то $S$ не замкнут относительно прямого произведения. Автор дает также достаточные условия замкнутости относительно прямого произведения класса алгебр $\mathscr{CL}(G)$ в виде некоторых условий, налагаемых на $G \in \mathbf{AF}$. Он указывает, что неизвестно, не к одним ли только условным классам применимо это достаточное условие замкнутости, т. е. не вытекает ли из условий налагаемых на функцию $G$, что $\mathscr{CL}(G) \in \mathbf{CONDC}$. Неизвестно также, не будет ли всякий неусловный класс алгебр незамкнутым относительно прямого произведения. Имеются опечатки. Например, на стр. 839, 19 строка сверху, следует читать: $g_i[\overline{H}_p] = \overline{f}_i[H_p]$.

Ю. А. Шиханович

---

**См. также:** 255, 299, 962, 965

# ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**54. Особые случаи оценок тригонометрических сумм. Виноградов И. М.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 3, 289—302

Пусть $S_m = \Sigma_{0<x\leqslant P} \exp\{2\pi i m f(x)\}$, $f(x) = A_n x^n + \dots + A_1 x$; $A_n, \dots, A_1$ вещественные, $n$ — целое постоянное $\geqslant 12$; $x$ пробегает a) числа натурального ряда или b) простые числа; $A_s = a_s / q_s + \theta_s / q_s \tau_s$, $(a_s, q_s)=1$, $0 < q_s < \tau_s$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, $|\theta_s| \leqslant 1$, $\tau_s$ — надлежащим образом выбраны в зависимости от $P$, $n$ и $s$; $m$ — натуральное. Ранее автор (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 225—248; 1951, **15**, 109—130) дал оценки $S_m$ в зависимости от одного из чисел $q_n, \dots, q_2$, а также, в случае a) от общего наименьшего кратного $Q$ чисел $q_n, \dots, q_2$, когда все эти числа меньше $P$.

Доказываются новые теоремы, позволяющие при определенных условиях получать оценки $S_m$ лучшие, чем данные ранее автором. В случае b) показывается, в частности, что если при $\tau_S = P^{0,58}$ среди чисел $q_n, \dots, q_2$ имеются не превосходящие $P^{0,25}$ и из них выбраны некоторые с общим наименьшим кратным $P^{\varkappa}$, где $\varkappa \leqslant 0{,}25$ и $\rho_0 = \varkappa (6{,}7\, n^2 \ln 12\, n^2)^{-1}$, то при $m \leqslant p^2 \rho_0$ имеет место оценка

$$S_m \ll P^{1-\rho_0+\varepsilon},$$

где $\varepsilon$ — произвольно малое положительное постоянное. В случае b) дается также оценка $S_m$ в зависимости от общего наименьшего кратного $q_n, \dots, q_2, q_1$ в предположении $Q \leqslant P^{1/4}$. К. К. Марджанишвили

**55. О степенных невычетах и нулях $L$-функций. Родосский К. А.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 3, 303—306

Пусть $N_{\min}(D, k)$ есть наименьший положительный невычет степени $k$ по простому модулю $D$.

Доказывается теорема: Пусть функция $L(s, \chi)$ с неглавным характером степени $k$ по простому модулю $D > D_0$ не имеет нулей в прямоугольнике

$$1 - \psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant \min\{e^{\psi} \ln^{-1} D, 1\},$$

где $\psi \in [e, 2^{-1} \ln D]$.

Тогда $N_{\min}(D, k) < D^{A\psi^{-1} \ln \psi}$, где $D$ и $A$ — абсолютные положительные постоянные.

Из теоремы следует, что $N_{\min}(D, k) < D^{c \ln \ln k / \ln k}$

Доказательство основано на методе плотности нулей $L$-функций. Б. М. Бредихин

**56. Об одном новом аналитическом представлении дзета-функции Римана. Романов Н. П.**, Тр. Среднеаз. ун-та, 1956, вып. 66, 51—54

В монографии Сельберга (Selberg A., Contributions to the theory of Dirichlets $L$-functions, Oslo, 1946) дано представление дзета-функции через интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x, y)\, x^{-s_1-1}\, y^{-s_2-1}\, dx\, dy,$$

где $\omega(x, y) = \min[\{x\}(1 - \{y\}), \{y\}(1 - \{x\}))]$, $\{z\}$ — дробная часть $z$.

Автор выводит различные обобщения формулы Сельберга, заменяя $\omega(x, y)$ выражениями, содержащими периодизированные многочлены Бернулли. Б. М. Бредихин

**57. О простых числах арифметической прогрессии. Руа** (Sui numeri primi delle progressioni aritmetiche. Roux Delfina), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 1, 55—63 (итал.)

Опираясь на элементарный метод П. Л. Чебышева в теории простых чисел в форме, разработанной Сильвестром, автор доказывает теоремы, обобщающие теоремы Риччи (Ricci G., Boll. Unione mat. ital., 1933, **12**, 304—309).

Теорема C. Пусть $a$, $b$ — целые; $a > 0$, $(a, b) = 1$. В прогрессии $ax + b$ $(x = 1, 2, \dots)$ существует бесконечно много чисел вида $np$, где $p$ — простое, а $n \leqslant \delta(a) = a\left(\ln a + C + \sum_{p|a} \frac{\ln p}{p-1} - 1\right)^{-1}$, $C$ — константа Эйлера. Количество этих чисел $\leqslant \xi$, $N(\xi) \asymp \xi / \ln \xi$ ($\asymp$ знак эквивалентности Гарди).

Теорема D. Пусть $\varepsilon \in [0,1]$, $(a, b) = 1$, $a > 0$, рассмотрим отрезок прогрессии $ax+b$ при $x = [(1-\varepsilon)\xi]+1, [(1-\varepsilon)\xi]+2, \dots [\xi]$ и числа в нем вида $np$; $p$ — простое, $(n, a) = 1$; $n \leqslant \gamma(a, \varepsilon) = a\left[\varepsilon\left(\ln a + \sum_{p|a} \frac{\ln p}{p-1}\right) - \varepsilon \ln \varepsilon - (1-\varepsilon)\ln(1-\varepsilon)\right]$. Количество подобных чисел $B_\varepsilon(\xi) \asymp \xi / \ln \xi$. Ю. В. Линник

**58. О свойстве числа делителей. Шинцель** (Sur une propriété du nombre de diviseurs. Schinzel Andrzej), Publs mat., 1954, **3**, № 3—4, 261—262 (франц.)

Доказывается теорема о числе делителей $d(n)$ натурального числа $n$, аналогичная теоремам о функциях $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$ (РЖМат, 1955, 1958). При любых натуральных числах $h$ и $m$ существует натуральное число $n > 1$ такое, что $d(n)/d(n \pm i) > m$, $i = 1, 2, \dots, h$. В. А. Голубев

**59. Об одной теореме Л. Е. Диксона. Канольд** (Über einen Satz von L. E. Dickson. Kanold Hans-Joachim), Math. Ann., 1956, **131**, № 2, 167—179 (нем.)

Диксон (Dickson L. E., Amer. J. Math., 1913, **35**, 413—422) показал, что при данном числе различных нечетных простых множителей и данной степени множителя 2 имеется конечное число примитивных совершенных и избыточных чисел.

Рассматриваются числа $n$, для которых $\sigma(n) = sn$, где $\sigma(n)$ — число всех делителей $n$, данное целое $s \geqslant 2$. Числа $n$ называются $(s-1)$-кратно совершенными. Доказывается основная (3-я) теорема. Пусть $\mathfrak{N}$ — множество натуральных чисел $n$, которые имеют свойства: а) $\sigma(n) = sn$, б) $V(n) \leqslant k$, где $V(n)$ — число простых делителей числа $n$, в) имеется фиксированное натуральное число $A$ такое, что $2^A$ не делится на $n$. Тогда $\mathfrak{N}$ — конечное множество.

Частные случаи. Пусть $m$ — натуральное число. Имеется по большей мере конечное число $(3^m-1)$-кратных совершенных чисел (теорема 4) или $(5^m-1)$-кратных совершенных чисел (теорема 5) с данным числом $V(n) = k$ различных простых делителей. В. А. Голубев

**60. Таблица коэффициентов степеней $\eta(\tau)$. Ньюман** (A table of the coefficients of the powers of $\eta(\tau)$. Newman Morris), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 2, 204—216; Indagationes math., 1956, **18**, № 2, 204—216 (англ.)

На электронной цифровой вычислительной машине СЕАК в Национальном Бюро Стандартов в Вашингтоне (РЖМат, 1954, 3486) автором были подсчитаны коэффициенты $p_r(n)$, определяемые равенством $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)\, x^n$. Приведены таблицы значений $p_r(n)$ при $1 \leqslant r \leqslant 13, 1 \leqslant n \leqslant 800$, $r = 14$, $1 \leqslant n \leqslant 750$, $r = 15$, $1 \leqslant n \leqslant 500$, $r = 16$, $1 \leqslant n \leqslant 400$. Сообщается о том,

что были проведены вычисления значений $p_r(n)$ для некоторых $n$ и $r > 16$.

Вычисления проводились по двойной программе. Первая основывалась на формуле

$$np_r(n) = \sum_{k=1}^{n} (rk + k - n)\lambda_k p_r(n-k),$$

где $\lambda_k = (-1)^s$, если $k$ — $s$-е пентагональное число и $\lambda_k = 0$ — в противном случае, и вторая — на формуле

$$np_r(n) = -r\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)\, p_r(n-k),$$

$\sigma(k)$ — сумма делителей $k$.

Общее время вычислений заняло менее четырех часов. Таблицы сверены с частью неопубликованных таблиц Фергюсона и Миллера для $1 \leqslant r \leqslant 24$, $1 \leqslant n \leqslant 300$ и совпадают с ними во всех деталях. Б. В. Левин

61. **Об одном представлении функции** $Q_{k,s}(x)$ **и** $\Phi_{k,s}(x)$. **Турсманашвили А. П.**, Тр. Груз. политехн. ин-т, 1956, № 1 (42), 59—64 (рез. груз).

Изучаются функции $Q_{k,s}(x)$ и $\Phi_{k,s}(x)$, связанные с числом целых точек в многомерных шарах соответственно четной и нечетной размерности. В прежних обозначениях автора (РЖМат, 1954, 3210, 3958) $Q_{k,s}(x) = \psi_{k,s}(x)$ при четном $k$ и $Q_{k,s}(x) = \Phi_{k,s}(x)$ при нечетном $k$. Устанавливается, что

$$Q_{k,s}(x) = \sum_{a=3}^{s} J(a)\, x^{s-a} + J(2)\, Q_{k,2}(\xi)\, x^{s-2},$$

где $J(a) = J(k,s,a) = Q_{k,a}(0)\ (-1)^{s-a}(k-s+1)\ldots(k-a)/(s-a)!$ при $3 \leqslant a \leqslant s-1$, $J(a) = Q_{k,s}(0)$ при $a = s$, $J(a) = \theta(k,s)\, s\,(s-1)/(k-1)$ при $a = 2$, $\theta(k,s) = (-1)^s(k-1)\cdots(k-s+1)/s!$ при $s \geqslant 2$, $\theta(k,0) = 1$, $\theta(k,1) = -1$, $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Представление $Q_{k,s}(x)$ в виде полинома получено из рекуррентного соотношения

$$Q_{k,s}(x) = -(k-s+1)\int_0^x Q_{k,s-1}(x)\, dx + Q_{k,s}(0).$$

Аналогичное представление получено для $\Phi_{k,s}(x)$.

Опечатки. На стр. 59 формулой (9) фактически определена функция $Q_{k,s}(x)$, но вместо нее написано $\Theta_{k,s}(x)$. В формуле (8) на стр. 59 вместо множителя $2^{3-s}$ стоит $2^{3-k}$ и др. Б. В. Левин

62. **Средний порядок арифметической функции. Гроссуолд** (The average order of an arithmetic function. Grosswald Emil), Duke Math. J., 1956, **23**, № 1, 41—44 (англ.)

Пусть $F(n)$ означает число всех простых множителей натурального $n$ (множитель, входящий в $k$-й степени, считается $k$ раз). При помощи производящего ряда Дирихле, контурного интегрирования и известных оценок для $\zeta$-функций Римана в критической полосе доказывается, что сумма значений $2^{F(n)}$ по нечетным $n \leqslant x$ равна

$$C_1 x \log x + C_2 x + O(x^c), \qquad (1)$$

где $c < 0{,}84$, $C_1$, $C_2$ — некоторые константы. Для них даются явные выражения. Отсюда выводится асимптотическая формула для суммы $2^{F(n)}$ по всем $n \leqslant x$. Отмечается, что остаточный член в (1) есть $\Omega(x^{\log 2/\log 3})$. И. П. Кубилюс

63. **Средние значения по пространству решеток. Роджерс** (Mean values over the space of lattices. Rogers C. A.), Acta math., 1955, **94**, 249—287 (англ.)

Зигель (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, **46**, 340—347) ввел среднее значение функции $\rho(\Lambda)$, определенной для всех решеток $\Lambda$ в $R^n$, как интеграл

$$\int_F \rho(\Omega\Lambda_0)\, d\mu(\Omega). \qquad (1)$$

Здесь $\Lambda_0$ — решетка с целочисленными координатами; $F$ — некоторая фундаментальная область в пространстве $\Gamma$ всех линейных преобразований пространства $R^n$ с определителем 1, определяемая при помощи теории приведения положительных квадратичных форм по Минковскому; $\mu(\Omega)$ — мера, определенная в $\Gamma$, инвариантная как слева, так и справа относительно умножения преобразований и нормированная так, чтобы $\int_F d\mu(\Omega) = 1$.

Автор дает другое определение среднего значения функции $\rho(\Lambda)$, как предела, если он существует,

$$M(\rho(\Lambda)) = \lim_{\omega \to +0} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \rho(\Lambda(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \omega)) \times \times d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1},$$

где $\Lambda(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \omega)$ означает решетку, порождаемую векторами $(\omega, 0, \ldots, 0, \theta_1\omega^{-n+1})$, $(0, \omega, \ldots, 0, \theta_2\omega^{-n+1})$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, \omega, \theta_{n-1}\omega^{-n+1})$, $(0, 0, \ldots, 0, \omega^{-n+1})$.

Доказывается, что если $\rho(\Lambda)$ является неотрицательной функцией, удовлетворяющей некоторым весьма общим условиям, и $M(\rho(\Omega\Lambda))$ существует и имеет одно и то же значение для всех линейных преобразований $\Omega$ с определителем 1, то $M(\rho(\Lambda))$ равно интегралу (1).

Поскольку $M(\rho(\Lambda))$ часто подсчитывается проще, чем (1), то последний результат полезен для вычисления (1). Этот метод применяется для вычисления интеграла (1), когда $\rho(\Lambda)$ имеет вид

$$\sum_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m} f(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m),$$

где $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $f(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m)$ — функция, определенная для всех $n$-мерных векторов $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ и суммируется по всем линейно независимым точкам решетки $\Lambda$, или по всем $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ таким, что некоторая линейная их комбинация принадлежит $\Lambda$, или же по всем точкам решетки $\Lambda$. И. П. Кубилюс

64. **Трансцендентные числа. Гельфонд А. О.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 5—6

Краткие тезисы обзорного доклада, освещающего развитие основных методов теории трансцендентных чисел. А. В. Шидловский

65. **Некоторые критерии иррациональности цепных дробей. Романчук Н. А.**, Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-т, 1956, **18**, 103—111

Исследуется вопрос об иррациональности бесконечной цепной дроби вида

$$\cfrac{m_1}{n_1 + \cfrac{m_2}{n_2 + \cfrac{m_3}{n_3 + \ldots}}}, \qquad (1)$$

где $m_k$, $n_k$ — натуральные числа.

Пусть $P_k/Q_k$ обозначает подходящую дробь $k$-го порядка цепной дроби (1).

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Если бесконечная цепная дробь (1) сходится к рациональному числу $x = M/N$, то после-

довательность целых положительных чисел $\nu_{2m} = |P_kN - Q_kM|$ выражается через остаточные дроби

$$\gamma_k = \cfrac{m_k}{n_k + \cfrac{m_{k+1}}{n_{k+1} + \cfrac{m_{k+2}}{n_{k+2} + \cdots}}}$$

по формуле

$$\nu_k = \gamma_{k+1}\gamma_k\gamma_{k-1}\cdots\gamma_3\nu_1.$$

Теорема 2. Если для сходящейся бесконечной цепной дроби (1) выполнены условия:

1) $[m_k / n_k] = A_k$,

2) $n_k / A_{k-1} > l_k = m_k - A_k n_k > A_k A_{k+1}$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_{k+1}}{l_{k+1}} \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{m_i} = \infty$,

то она сходится к иррациональному числу.

Из теоремы 1 выводятся три критерия иррациональности бесконечной цепной дроби (1), в том числе известный критерий Лежандра. П. Г. Когония

**66. Целые решения кубических уравнений с тремя переменными. Морделл** (Integer solutions of cubic equations in three variables. Mordell L. J.), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 431—438 (англ.)

Обзор результатов по решению в целых числах неоднородных неопределенных уравнений третьей степени с тремя переменными. В. Д. Подсыпанин

**67. Теорема о диофантовом уравнении $Ax^2 - By^4 = C (C = 1, 2, 4)$. Юнггрен** (Ein Satz über die diophantische Gleichung $Ax^2 - By^4 = C (C = 1, 2, 4)$. Ljunggren Wilhelm), 12 te Skand. matematikerkongr Lund, 1953. Lund, 1954, 188—194 (нем.)

Пусть $\varepsilon = r + s\sqrt{D} > 1$ — единица квадратичного поля с положительной нормой, $n$ — нечетное число, $\varepsilon^n = r_n + s\, s_n \sqrt{D}$. Тогда $s_n = P_n(\varepsilon)\, Q_n(\varepsilon)$. Доказывается, что $P_n(\varepsilon)$ и $Q_n(\varepsilon)$ не могут быть полными квадратами при $n > 3$. (Последнее при условии нечетности $2r$.) Из первой леммы выводится, что уравнение $Ax^2 - By^4 = C$ имеет не более двух натуральных решений; если же $4Bb^2 / C + 3$ не будет полным квадратом, то не более одного решения (число $b$ определяется из равенства $\varepsilon = [(a\sqrt{A} + b\sqrt{B}) / \sqrt{C}]^2$). Утверждается, что из второй леммы выводится, что уравнение $Ax^4 - By^2 = 4$ имеет не более двух натуральных решений; если же $Bb^2 + 1$ не будет полным квадратом, то не более одного решения. В. Д. Подсыпанин

**68. Новые теоремы о диофантовом уравнении $Cx^2 + D = y^n$. Профессору Вигго Бруну к его семидесятилетию. Юнггрен** (New theorems concerning the diophantine equation $Cx^2 + D = y^n$ to professor Viggo Brun on his 70 th birthday. Ljunggren Wilhelm. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1956, 29, № 1,4 pp.) (англ.)

Пусть $C$ и $D > 1$ — нечетные натуральные числа. $CD$ — бесквадратное число и $CD \not\equiv 7 \pmod 8$, $D - 1 = 2^{2m} D_1$, где $D_1$ — нечетное число, $q > 3$ — нечетное простое число. Число классов идеалов поля $R(\sqrt{-CD})$ не делится на $q$. Доказано, что если $CD_1 \equiv 5 \pmod 8$ или $C = 1$, $D_1 \equiv 3 \pmod 8$, то при данных $C$ и $D$ существует лишь конечное число значений $q$, при которых уравнение $Cx^2 + D = y^q$ имеет решения в натуральных числах. Все возможные значения $y$ в этих решениях могут быть найдены. Лишь намечено доказательство, что при $CD_1 \equiv 1 \pmod 8$ или $CD_1 \equiv 3 \pmod 8$ может принимать и другие значения, лишь при $q \equiv 1 \pmod 3$ в первом случае и $q \equiv 2 \pmod 3$ — во втором. Имеется опечатка: в определении $\lambda$ должно быть $\lambda = a\sqrt{C} + b\sqrt{-D}$, а не $\lambda = a\sqrt{C} + \sqrt{-D}$. В. Д. Подсыпанин

**69. Об основной системе единиц иррегулярного кругового поля, удовлетворяющей специальным сравнениям. Денеш** (Über Grundeinheitssysteme der irregulären Kreiskörper von besonderen Kongruenzeigenschaften. Dénes Peter), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 195—204 (нем.)

Пусть $p$ — простое нечетное рациональное число; $\Omega(\zeta)$ — круговое поле, образованное корнями уравнения $\zeta^p = 1$. $(\zeta \neq 1)$, $\lambda = 1 - \zeta$, $\mathfrak{l} = (\lambda)$, $a_i$, $b_i$ — целые рациональные, взаимно простые с $p$, числа, $q = (p-3)/2$ и $u_1', \ldots, u_q'$ — «$p$-характеры основных единиц поля».

Конечной целью работы является исследование представимости единицы поля $\Omega(\zeta)$ в виде $p$-й степени некоторой единицы того же поля. В связи с этим доказываются:

Теорема 1. В поле $\Omega(\zeta)$ имеется основная система единиц $\delta_1, \ldots, \delta_q$, для которой выполняется условие

$$\delta_i \equiv a_i + b_i \lambda^{2e_i'} \pmod{\mathfrak{l}^{2e_i'+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$
$$2e_i' = u_i'\,(p-1) + 2i,$$

$u_i'$ автор называет $p$-характерами основных единиц поля $\Omega(\zeta)$.

Теорема 5. $D_{2jp}{}^{t_j} \log \vartheta(e^v) \not\equiv 0 \pmod{p^{t_j+1}}$ $(j = 1, \ldots, q)$ для $t_j \geqslant u_j'$.

Теорема 6. Пусть $\Omega(\zeta)$ имеет $w$ порядок иррегулярности и система основных единиц $\delta_1, \ldots, \delta_q$ удовлетворяет условиям теоремы 1, тогда

$D_{2jp}{}^t \log \delta_i(e^v) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$ $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, q)$ при любых натуральных $t \geqslant w$.

Теорема 7. Если $\varepsilon$ — единица $\Omega(\zeta)$, для которой

$$D_{2ip}{}^{u_i'} \log \varepsilon(e^v) \equiv 0 \pmod{p^{u_i'+z}} \quad (i = 1, \ldots, q),$$

то $\varepsilon$ есть $p$-ая степень единицы $\Omega(\zeta)$.

Теорема 8. Если $\varepsilon$ — единица $\Omega(\zeta)$, сравнимая с целым рациональным числом по модулю $p^{w'+z}$, то $\varepsilon$ есть $p$-ая степень единицы из $\Omega(\zeta)$. П. Н. Реморов

**70. Вторая заметка о предложении Ферма. Денеш, Туран** (A second note on Fermat's conjecture. Dénes P., Turán P.), Publs mat., 1955, 4, № 1—2, 28—32 (англ.)

Обозначения: $q$ — фиксированное простое нечетное число; $x, y, z$ — целые числа, о которых известно

$$(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1, \quad 1 \leqslant x, y, z \leqslant N,$$
$$x^q + y^q = z^q, \qquad (1)$$

$R_q(N)$ — число решений $(x, y, z)$ уравнения (1), $R_q'(N)$ — число решений (1) при условии $(xyz, q) = 1$, $R_q''(N)$ — число решений (1) при условии $q \mid xyz$.

Простыми средствами авторы устанавливают неравенства

$$R_q'(N) < qN^{2/q}, \quad R_q''(N) < 3q\, 2^{1/q} N^{2/q}.$$

Применение $L$-рядов Дирихле позволяет получить

$$R_q'(N) < c_8(q)\, N^{2/q} \log^{-(2-2/q)} N,$$
$$R_q''(N) < c_9(q)\, N^{2/q} \log^{-(2-2/q)} N.$$

П. Н. Реморов

**71. Об одной теореме, эквивалентной теореме Ферма.** **Врэнчану** (Asupra unei teoreme echivalente cu teorema lui Fermat. Vrănceanu G.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, A7, № 1, 23—24 (рум.)

Преобразование кубического случая уравнения Ферма $x^3+y^3=z^3$ в неопределенное уравнение $4\beta^3-3\alpha^2=1$.

А. И. Попов

**72. Решение некоторых видов неопределенных уравнений в рациональных числах.** **Георгиев** (Решение в рационални числа на някои класи неопределени уравнения. Георгиев Георги Ив.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954, 1, ч. 1, 157—198 (болг.; рез. русс., франц.)

Исследуется решение в рациональных числах неопределенных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0,$$

где коэффициенты $A_k$ и показатели $a_{ki}$ — целые числа.

А. И. Попов

**73. Об одной группе классических проблем в области целых чисел.** **Бини** (Un gruppo di problemi classici sui numeri interi. Bini Umberto), Archimede, 1955, 7, № 4—5, 165—177 (итал.)

В первой части дается схема для численных вычислений решений в целых числах уравнения $\sum_{s=1}^{n} x_s^k = M$. Во второй части указываются некоторые частные случаи и дается пример одного такого вычисления.

А. А. Бухштаб

**74. Метод факторизации чисел формы $a^n \pm 1$.** **Сторки** (Un metodo per la fattorizzazione dei numeri della forma $a^n \pm 1$. Storchi Edoardo), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1955, 88, № 2, 405—441 (итал.)

Рассматривается представление данного простого числа $p$ при помощи бинарной формы

$$x^{2k} + ay^{2k},$$

где целое $k>1$, $x$ $y$ — натуральные, $a$ — целое число. Анализируются три основных случая: 1) $x$ и $a$ нечетные; 2) $x$ — четное; 3) $a$ — четное. Для каждого случая доказан ряд теорем, устанавливающих характер чисел 2, 3, 5,... по модулю $p$. Например, теорема 13. Если простое $p = a^2+5b^2$ при $a$ нечетном, то число 5 есть биквадратичный вычет (mod $p$), если $a = 10m \pm 1$, и биквадратичный невычет (mod $p$), если $a = 10m \pm 3$.

Отсюда следует и способ разложения чисел $a^n \pm 1$.

В. А. Голубев

**75. О сравнениях третьей степени с двумя неизвестными по простому модулю.** **Манин Ю. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 110

**76. Инвариантная теория систем уравнений в конечном поле.** **Карлиц** (Invariant theory of systems of equations in a finite field. Carlitz L.) Итон л'анализа математит, J. Analyse Math., 1953—1954, 3, 382—413 (англ.; рез. евр.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1954, 5047). Рассматриваются свойства систем уравнений $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_r) = a_i (i = 1, \ldots, k)$, инвариантные относительно преобразований некоторой группы. Случай $k=1$ тем же методом рассматривался в прежней работе. Доказывается, что число классов многочленов равно

$$(q^r + q^k - 1)! \,/\, (q^k - 1)!\, q^r!$$

В. А. Голубев

**77. Число решений некоторых кубических сравнений.** **Коэн** (The number of solutions of certain cubic congruences. Cohen Eckford), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 877—886 (англ.)

Исследуется сравнение

$$n \equiv a_1 x_1^3 + \cdots + a_s x_s^3 \pmod m$$

для случаев $s = 2, 3$. Метод исследования основан на изучении кубических гауссовых сумм.

А. И. Виноградов

**78. Одномерное изучение фигурных чисел.** **Чела** (Estudio unidímensional de los números poligonales. Chela Raimundo), Acta cient. venezolana, 1955, 6, № 3, 110—118 (исп.)

Изобразим нечетные числа 1, 3, 5,..., $2n-1$,... точками прямой линии; тогда получим ось нечетных чисел. Последовательные нечетные числа образуют отрезок этой оси. Величиной отрезка автор называет сумму нечетных чисел, образующих его. Два отрезка считаются равными, если они имеют равную величину.

Эти понятия позволяют автору дать некоторую «одномерную геометрическую интерпретацию» для уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

и других сходных задач. Так, например, решить уравнение (1) означает найти те отрезки указанной оси, величина которых есть полный квадрат.

Доказывается невозможность решения уравнений $x^4 + y^4 = z^4$ и $x^4 + y^4 = z^2$ в целых числах.

Предлагается изучать свойства фигурных чисел, изображая члены арифметической прогрессии 1, $1+r$, $1+2r$,..., порождающей эти числа, точками прямой линии. Понятия отрезка, величины отрезка и т. д. вводятся так же, как это сделано для оси нечетных чисел

Э. Апарисио

**79. Свойства последовательных целых чисел.** **Голомб** (Properties of consecutive integers. Golomb Solomon W.), Nord. mat. tidskr., 1956, 4, № 1, 24—29 (англ.)

Доказываются теоремы о последовательных значениях числовых функций Мёбиуса $\mu(n)$, Эйлера $\varphi(n)$, суммы делителей $\sigma(n)$ и числа делителей $d(n)$. Теорема 3 (А. Винтера). Существует сколько угодно целых чисел $c+1$, $c+2$, ..., $c+k$ таких, что $\mu(c+1) = \mu(c+2) = \cdots = \mu(c+k) = 0$.

Теорема 4. Существует сколько угодно целых чисел $c+1$, $c+2$, ..., $c+k$ таких, что $\varphi(c+1) \equiv \varphi(c+2) \equiv \cdots \equiv \varphi(c+k) \equiv 0 \pmod M$, где $M$ — любое целое число. Аналогичные теоремы — о функциях $\sigma(n)$ и $d(n)$.

Доказательства основаны на теореме Дирихле и на лемме (теорема 2): Если $A_1 = a_1 n + b_1$, $A_2 = a_2 n + b_2$, ..., $A_k = a_k n + b_k$ суть арифметические прогрессии, у которых $(a_i, a_j) = 1$, то имеется $k$ последовательных целых чисел таких, что $c+j$ находится в прогрессии $A_j (j = 1, 2, \ldots, k)$.

В. А. Голубев

**80. Подсчет «четверок» от 1 000 000 до 2 000 000.** **Секстон** (Abzählung von Vierlingen von 1,000.000 bis 2,000.000. Sexton Charles R.), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, 92, № 1—15, 236—239 (нем.)

В 1923 г. Харди и Литлвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E., Acta Math., 1923, 44, 23) подсчитали число «четверок» (простых чисел $p_1, p_2, p_3, p_4$ с разностями $p_2-p_1=2$, $p_3-p_2=4$, $p_4-p_3=2$) от 0 до 1 000 000. В 1950 г. Фрюхтль (Früchtl, Anz. Österr. Akad. Wiss. Math-naturwiss. Kl. 1950, 226—232) подсчитал их до 1 020 000.

В статье дана таблица «четверок» от 1 020 000 до 2 000 000, составленная по таблице простых чисел Лемера. Число «четверок» от 0 до 1 000 000 равно 166, от 1 000 000 до 2 000 000—129, всего 295.

Примечание референта. Указанные в таблице четверки и их число совпадают с полученными референтом (в 1952 г.) В. А. Голубев

**81. Совершенные числа. Брикси, Андри** (Perfect numbers. Brixey J. C., Andree R. V.), Pi Mu Epsilon J., 1955, 2, № 2, 78—79 (англ.)

Краткая научно-популярная статья по теории, проблемам и истории определения 17 известных ныне совершенных чисел. В. А. Голубев

**82. О простоте чисел Ферма. Ларра** (Sur la primarité des nombres de Fermat. Larras Jean), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 18, 2203—2204 (франц.)

Известно, что простые делители $m$-го числа Ферма, $F_m = 2^{2^m} + 1$, имеют форму $p = k2^{m+1} + 1$.

Доказывается, что $k$ должно быть обязательно четным числом. Далее рассматриваются условия для делителя числа $F_{14}$ и устанавливается, что до числа $65\,536 \times 2000 + 1 = 131\,072\,001$ нет простых чисел, удовлетворяющих этим условиям. В. А. Голубев

**83. Коэффициенты $\sinh x/\sin x$. Карлиц** (The coefficients of $\sinh x/\sin x$. Carlitz L.), Math. Mag., 1956, 29, № 4, 193—197 (англ.)

Пусть $\sinh x / \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m} x^{2m}/(2m)!$ Тогда коэффициенты $\beta_{2m}$ — рациональные числа, равные

$$(2m+1)^{-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s\, 2\,(1 - 2^{2s-1}) \binom{2m+1}{2s} B_{2s},$$

где $B_{2s}$ — числа Бернулли. Доказывается, что в знаменатель $\beta_{2m}$ могут входить только простые числа вида $4n+3$. Дается оценка сверху показателя, с которым простое число $p$ входит в знаменатель $\beta_{2m}$. В некоторых случаях этот показатель определяется точно. В. Д. Подсыпанин

**84. О нулях кубической рекуррентной числовой последовательности. Смайли** (On the zeros of a cubic recurrence. Smiley M. F.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 3, 171—172 (англ.)

Кубическая рекуррентная числовая последовательность $\{T\}$ определяется вещественными числами $T_0$, $T_1$, $T_2$ и формулой $T_{n+3} = PT_{n+2} - QT_{n+1} + RT_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где $P$, $Q$, $R$ — вещественные числа. Если $T_k = 0$, то $k$ называется нулем $\{T\}$.

Положим, что $u$, $v$, $w$ — вещественные, не равные нулю и различные по абсолютной величине корни соответствующего уравнения $f(z) = 0$, где $f(z) = z^3 - Pz^2 + Qz - R$. Тогда $T_n = Uu^n + Vv^n + Ww^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) с вещественными, не равными нулю, числами $U$, $V$, $W$.

Доказывается теорема: Кубическая рекуррентная числовая последовательность $\{T\}$ не может иметь более трех нулей. Для доказательства используется в основном правило Декарта о знаках. В. А. Голубев

**85. Числа, связанные с латинскими квадратами. Нортон, Стейн** (An integer associated with Latin squares. Norton D. A., Stein Sherman K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 331—334 (англ.)

Если из чисел 1, 2,..., $n$ составлен латинский «магический квадрат» так, что вдоль главной диагонали эти числа размещены сверху вниз в порядке возрастания, то образуется $n^2$ троек чисел $(i, j, a)$, где $a$ — число, расположенное в $i$-ом ряду и $j$-ом столбце квадрата. Все тройки, каждая из которых содержит фиксированное число $m$, могут быть разделены на циклы таких троек $t_1, t_2, \ldots, t_k$, что $t_1 R t_2, \ldots, t_{k-1} R t_k$, где $R$ — отношение симметрии. Если $\Phi(m)$ — число циклов для фиксированного $m$ и $Z = \Sigma_m \Phi(m)$, то $n \leqslant Z \leqslant n(n-1)$ и $Z \equiv n(n-1)/2 \pmod 2$, причем тройки вида $(k, k, k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ исключаются из рассмотрения. Для доказательства использованы приемы комбинаторной топологии. Б. А. Кордемский

**86. Асимптотические ряды для некоторых классов проблем, связанных с перестановками. Мендельсон** (The asymptotic series for a certain class of permutation problems. Mendelsohn N. S.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 234—244 (англ.)

На перестановки из чисел 1, 2, ..., $n$ накладывается $S$ условий, например, такого типа: «число $i$ занимает $j$-ое место», «число $k$ занимает $m$-ое место», или: «$i$ непосредственно предшествует $j$» и т. п. Если $N(r)$ — число перестановок, в которых выполняется $r$ условий, то $M(r) = N(r)/n!$ — вероятность такого события. Вводится оператор $E$ условием: $Ef(n) = f(n+1)$. Тогда $M(r) = P_n(E)\, g_r^*(0)$, где $P_n(E) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varphi_{n,k} E^k$,

$$g_r^*(t) = \begin{cases} (-1)^r C_t^r \dfrac{(n-t)!}{n!}, & t \geqslant r, \\ 0 & t < r, \end{cases}$$

и $M(0) = P_n(E) f^*(0)$, где $f^*(t) = (n-t)!/n!$. При этом $\varphi_{n,k}$ — число способов размещения $k$ не атакующих друг друга ладей на шахматной доске $n \times n$ (интерпретация Капланского и Риордана). Для широкого класса проблем, связанных с подсчетом числа перестановок, ограниченных определенными условиями, имеет место рекуррентная формула

$$P_n(E) = (\alpha_1 - \beta_1 E)\, P_{n-1} + (\alpha_2 - \beta_2 E + \gamma_2 E^2)\, P_{n-2} + \cdots + (\alpha_k - \beta_k E + \gamma_k E^2 + \cdots + (-1)^k \lambda_k E^k)\, P_{n-k},$$

где $P_n = P_n(E)$, $k$ — фиксированное целое число и все греческие буквы — некоторые константы. В этих случаях $M(r)$ определяется асимптотическим рядом

$$M(r) = e^{-A} \frac{A^r}{r!} \left(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n(n-1)} + \frac{c_3}{n(n-1)(n-2)} + \cdots\right),$$

где $c_i$ — вообще говоря, некоторые многочлены относительно $r$ степени не выше $2i$. Выведены формулы для вычисления $A$ и $c_i$. Б. А. Кордемский

**87. Системы нумерации. Чорэнеску** (Sisteme de numeraţie. Ciorănescu N.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, B7, № 2, 57—63 (рум.)

Краткое элементарное изложение вопроса о переходе от одной системы нумерации к другой, некоторых признаков делимости целых чисел, вопроса о представлении рациональных чисел в виде $\Sigma a^k b^{-k}$, $b > 1$. А. И. Попов

**88. Числовые системы. Брёйн** (On number systems. Bruijn N. G. de), Nieuw arch. wiskunde, 1956, 4, № 1, 15—17 (англ.)

Пусть $S_1$, $S_2$, $S_3$,... — конечные или бесконечные множества неотрицательных целых чисел и пусть $0 \in S_i$ для каждого $i$. Совокупность $S_1, S_2, \ldots$ называется числовой системой, если каждое неотрицательное целое $x$ может быть однозначно выражено в виде $x = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$, где $s_i \in S_i$.

Рассматривается специальный случай, называемый британской числовой системой. В. А. Голубев

См. также: 96, 99

# АЛГЕБРА

**89 К. Курс высшей алгебры и анализа. Ионеску, Русу, Константин** (Curs de algebră superioară şi analiza. Ionescu Tiberiu, Rusu Eugen, Constantin Ion. Fac. mat. şi fiz., Bucureşti, 1955, 480 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 6, 206 (рум.)

**90 К. Элементы алгебры. Леви** (Elements of algebra. Levi Howard. Chelsea Publishing Co., New York, 1954, 160 pp., 3. 25 doll.), Math. Revs, 1955, 16, № 4, 325 (англ.)

**91 К. Алгебра. Мойсил** (Algebra. Part 1-a. Moisil C. Gr. Fac. mat. fiz. Bucureşti, 1955, 432 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 6, 207 (рум.)

**92 К. Алгебра. Мойсил** (Algebra Part 2-a. Moisil C. Grigore. Univ. «C. I. Parhon». Bucureşti, 1955, 426 p., 10 lei.—Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 5, 169 (рум.)

**93 К. Алгебра множеств. Алгебра. Шоке** (Algèbre des ensembles, algèbre. Choquet Gustave. Paris, Centre docum. univ., 1955, vii, 81 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145. № 20, 463 (франц.)

## МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**94. Соотношения между сочетаниями и перестановками. Брауман** (Beziehungen zwischen Kombinationen und Partitionen. Braumann P. B. T.), Rev. Fac. Ciênc. Univ. Lisboa, 1954, **A3**, № 3, 75—76 (нем.)

Выражения для сумм сочетаний чисел $1, 2, \ldots, l-1$.

O. Ore

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 3.

**95. Два замечания о биномиальных коэффициентах. Стрёйк** (Two notes on binomial coefficients. Struyk Adrian), Math. Teacher, 1956, **49**, № 3, 192—194 (англ)

Устанавливается, какие из чисел $C_n^k$ четные, а также решается неопределенное уравнение $2C_n^r = C_n^{r+1} + C_n^{r-1}$.

**96. О разложении рациональных дробей на простейшие. Гонсалвиш** (Sur la décomposition des fractions rationnelles. Gonçalves J. Vicente), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1955—1956, **A5**, № 1, 171—176 (франц.)

**97. Об одной многочленной характеристике линейных комплексов. Зыков А. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 113—114

**98. Заметка об эрмитовых полиномах. Карлиц** (A note on Hermite polynomials. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 9, 646—647 (англ.)

По индукции доказана формула

$$H_m(x)\,U_\mu(x) = \sum_{r=0}^{m} 2^r r! \binom{m}{r}\binom{\mu}{r} U_{m+\mu-2r}(x), \qquad (1)$$

где $U_\mu(x)$ — любое решение уравнения $U_{\mu+1} = 2xU_\mu - 2\mu U_{\mu-1}$, $\mu$ — произвольно комплексное число и $H_m(x)$ — полином Эрмита. В примечании при корректуре автор указывает, что формула (1) содержится в работе Нильсена (1918 г.).

М. Н. Олевский

**99. Еще два экзаменационных задания. Уотсон** (Two more Tripos questions. Watson G. N.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 330, 280—286 (англ.)

Приводятся несколько вариантов решений следующих двух задач, предложенных в качестве экзаменационных заданий по математике в Кембридже в 1881 г.:

1. Доказать, что если $a+b+c=0$ и $x+y+z=0$, то $4(ax+by+cz)^3 - 3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - 2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y) = 54\,ab\,cx\,yz$.

2. Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ — корни кубических уравнений $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x^3 - q'x^2 + p'x - r' = 0$; тогда кубическими уравнениями, корнями которых служат числа вида $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, будут уравнения

$$\left(x - \frac{1}{3}\,pp'\right)^3 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\,pp'\right)(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q') = \frac{1}{216}\frac{\partial\Delta}{\partial r}\frac{\partial\Delta'}{\partial r'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\Delta'},$$

где $\Delta$ и $\Delta'$ — дискриминанты исходных уравнений.

Первую задачу можно рассматривать как частный случай второй.

Е. Г. Шульгейфер

**100. Решение систем алгебраических уравнений. Ли Чэ Гон** (행렬식에 대한 강의. 리재곤), 과학과 기술, Квахак ка Кисуль (Хвахакпхен), 1956, № 5, 57, 62—69 (кор.)

**101. Элементарное доказательство правила Крамера. Стоякович** (On an elementary derivation of Cramer's rule. Stojaković Mirko), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, **7**, № 3—4, 243—244 (англ., рез. серб.)

**102. Новое определение определителей. Гашпар** (Eine neue Definition der Determinanten. Gáspár Julius), Publs mat., 1954, **3**, № 3—4, 257—260 (нем.)

Определители матриц порядка $n$ с элементами из произвольного поля $K$ без характеристики можно определить как значения однозначного ненулевого отображения $\varphi$ кольца матриц $K_n$ в поле $K$, удовлетворяющего следующим условиям: а) $\varphi(A+B) = \sum\varphi(C)$, где суммирование распространяется на все $2^n$ матриц $C$, произвольная $i$-я строка которых совпадает с $i$-й строкой либо матрицы $A$, либо матрицы $B$; б) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$; в) $\varphi(aA) = a^n\varphi(A)$ для любого элемента $a \in K$.

Доказательство этого утверждения приводится для $n=3$; в общем случае доказательство аналогично, но более громоздко. Отмечается, что утверждение остается справедливым и для матриц над произвольной областью целостности без характеристики, обладающей единицей.

Е. Г. Шульгейфер

**103. Доказательство теоремы Бине — Коши. Гонсалвиш** (Démonstration du théorème de Binet — Cauchy. Gonçalves Vicente J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A3**, № 2, 327—329 (франц.)

**104. Доказательство теоремы Гамильтона — Кели. Гонсалвиш** (Démonstration du théorème de Hamilton — Cayley. Gonçalves Vicente J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A3**, № 2, 330 (франц.)

**105. Максимальные определители в комбинаторных исследованиях. Райзер** (Maximal determinants in combinatorial investigations. Ryser H. J.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 2, 245—249 (англ.)

Пусть $Q$ — матрица порядка $v$, элементами которой являются нули и единицы. Обозначая через $t$ число ее элементов, равных единице, положим $k = t/v$ и $\lambda = k(k-1)/(v-1)$. Доказано, что если $0 < \lambda < k < v$, то $|\det Q| \leqslant k(k-\lambda)^{\frac{1}{2}(v-1)}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $Q = (q_{ij})$ является матрицей инцидентности некоторой $(v, k, \lambda)$-системы (РЖМат, 1956, 4070), т. е. если $q_{ij} = 1$ тогда и только

тогда, когда $i$-я точка и $j$-я прямая $(v, k, \lambda)$-системы инцидентны. Л. А. Скорняков

**106. О спектре одного однопараметрического семейства матриц. Островский** (On the spectrum of a one-parametric family of matrices. Ostrowski A. M.), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 3/4, 143—160 (англ.)

Изучаются собственные значения $\lambda_1(\alpha) \leqslant \lambda_2(\alpha) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\alpha)$ матрицы $D_\alpha^{(n)*} D_\alpha^{(n)}$, где $D_\alpha^{(n)}$ — квадратная матрица $n$-го порядка вида

$$D_\alpha^{(n)} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & \alpha \end{Vmatrix},$$

а $D_\alpha^{(n)*}$ — эрмитово сопряженная матрица. Оказывается, что $\lambda_\nu(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + v_\nu(\alpha)$, где $v_\nu(\alpha)$ — нули многочлена $\Delta_n(v, \alpha)$ относительно $v$, определенного формулой

$$4^n \cos^{2n}\theta \Delta_n\left(\frac{1}{4\cos^2\theta}, \alpha\right) = \frac{\alpha \sin(2n+1)\theta + (\alpha - 1)\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}.$$

Отсюда следует, что при каждом $\nu$ нули $v_\nu(\alpha)$ являются возрастающей функцией от $\alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$; кроме того, отсюда получается: 1) поведение собственных значений $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_n(\alpha)$ при возрастании $\alpha$; 2) асимптотические формулы для $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_n(\alpha)$ при малых $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \pm\infty$; 3) оценка для модулей $|\lambda_1(\alpha)|$ при малых $|\alpha|$; 4) значения функций $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_n(\alpha)$ при $\alpha = 0$, $^1/_2$, 1. М. А. Наймарк

**107. К исследованию вопроса об эквивалентности в кольце двухступенчатых матриц. Стендер П. В.**, Зап. Ленингр. заоч. индустр. ин-та, Л., ЛГУ, 1955, 13—22

Пусть $\mathfrak{H}$ — кольцо матриц порядка $n+m$ вида $\begin{pmatrix} A_n & 0 \\ C & B_m \end{pmatrix}$, где $A_n$ и $B_m$ — квадратные матрицы соответственно порядков $n$ и $m$. Доказывается, что число неэквивалентных классов матриц, на которые в кольце $\mathfrak{H}$ распадается класс матриц из $\mathfrak{H}$, эквивалентных в кольце всех матриц порядка $n+m$ матрице $\begin{pmatrix} \mathfrak{I}_n & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_m \end{pmatrix}$, где $\mathfrak{I}_n$ и $\mathfrak{I}_m$ — нижние жордановы клетки соответственно порядков $n$ и $m$ с одним и тем же характеристическим числом $\alpha$, равно $\min(n, m) + 1$. Е. Г. Шульгейфер

**108. О свойствах одного класса матриц. Стоякович** (Sur les propiétés d'une classe de matrices. Stojaković M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 33—36 (франц.)

Приводится новое доказательство обобщенной леммы Стилтьеса для матриц (РЖМат, 1955, 87). Ф. Р. Гантмахер

**109. Матричное уравнение $AX = B$ в конечном поле. Ходжес** (The matric equation $AX = B$ in a finite field. Hodges J. H.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 4, 243—244 (англ.)

Рассматриваются прямоугольные матрицы с элементами из конечного поля $GF(q)$ порядка $q$; $s \times m$-матрица ранга $p$ обозначается через $A(s, m; p)$; через $I(s, m; p)$ обозначается $s \times m$-матрица, в верхнем левом углу которой расположена единичная матрица $I_p$ порядка $p$, а на остальных местах — нули. Доказывается, что уравнение

$$AX = B, \qquad (1)$$

где $A = A(s, m; p)$, $B = B(s, t; r)$ и $r \leqslant p$, имеет решение тогда и только тогда, когда существуют такие неособенные матрицы $P$, $Q$, $R$, $T$, что $PAQ = I(s, m; p)$, $RBT = I(s, t; r)$ и $C = PR^{-1} = (\nu_{ij})$, где $\nu_{ij} = 0$ при $p < i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Если уравнение (1) имеет решение, то число решений равно $q^{t(m-p)}$.

Отмечается, что аналогичные результаты можно получить и для матричного уравнения $UA + BV = C$ с двумя неизвестными матрицами $U$ и $V$, где $A = A(m, n; r_1)$, $B = B(s, t; r_2)$, $C = C(s, n; p)$; указывается, что число решений этого уравнения, если они вообще существуют, равно $q^{s(m-r_1)+n(t-r_2)+r_1r_2}$. Е. Г. Шульгейфер

**110. Одна матричная задача, касающаяся идемпотентных матриц. Шнейдер** (A matrix problem concerning projections. Schneider Hans), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, **10**, № 3, 129—130 (англ.)

Пусть $A$ — комплексная $n \times m$-матрица ранга $r$. Доказано, что неравенство $k \geqslant n - r$ необходимо и достаточно для существования $m \times n$-матрицы $B$, для которой произведение $(I - AB)^*(I - AB)$ (где $*$ — знак перехода к комплексносопряженной транспонированной матрице) является идемпотентной матрицей ранга $k$. Ф. Р. Гантмахер

**111. Элементарные делители сингулярной $M$-матрицы, соответствующие характеристическому числу 0. Шнейдер** (The elementary divisors, associated with 0, of a singular $M$-matrix. Schneider Hans), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, **10**, № 3, 108—122 (англ.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы все элементарные делители $n \times n$-матрицы $A$, с неотрицательными элементами, соответствующие наибольшему неотрицательному характеристическому числу $\rho$, были первой степени, и для того, чтобы матрица $A$ имела только один такой элементарный делитель.

Предварительно матрица $A$ одной и той же перестановкой строк и столбцов приводится к нормальной форме, т. е. к треугольному блочному виду $\{A_{ji}\}$ $(A_{ij} = 0$ при $i < j)$, где все диагональные матрицы $A_{ji}$ являются неразложимыми квадратными матрицами. Пусть $r_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $A_{ij} \neq 0$, и $r_{ij} = 1$ во всех остальных случаях. Пусть далее $R_{ij} = \max_{n, k, \ldots, s}(r_{ih}, r_{hk}, r_{kl}, \ldots, r_{sj})$. Наконец, пусть $S$ — совокупность индексов $i$, для которых матрицы $A_{ji}$ имеют характеристическое число $\rho$. Доказывается, что все элементарные делители матрицы $A$, соответствующие числу $\rho$, тогда и только тогда имеют первую степень, когда $R_{\alpha\beta} = 0$ для всех $\alpha, \beta \in S$. Матрица $A$ тогда и только тогда обладает единственным элементарным делителем, соответствующим числу $\rho$, когда $R_{\alpha\beta} = 1$ для всех $\alpha, \beta \in S$. Ф. Р. Гантмахер

**112. Векторные пространства. Шоке** (Espaces vectoriels. Formes et équations linéaires. Choquet G.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 177, 388—399 (франц.)

Популярная лекция, читанная автором 8 марта 1956 г. в Институте Анри Пуанкаре. С. Н. Черников

**113 К. Матричные исчисление. Грёбнер** (Matrizenrechnung. Gröbner Wolfgang. München,

Oldenbourg, 1956, 249 S., ill., 23.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 13, 941 (нем.)

**114 К. Введение в теорию определителей, включающее теории определителей Фредгольма. Ковалевский** (Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der Fredholmschen Determinanten. Kowalewski G., Berlin, Walter de Gruyter und Co., 1954, 348 S. 30 DM) (нем.)

**115 К. Линейные алгебра и анализ. Лихнерович** (Algèbre et analyse linéaires. 2 éd. Lichnerowicz André. Paris, Masson, 1956, 316 p., ill., 1 600 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 10, 223 (франц.)

**116 К. Вещественные и комплексные числа, линейная алгебра. Шоке** (Les nombres réels et les nombres complexes, algèbre linéaire. Choquet Gustave. Paris, Centre docum. univ., 1955, ii, 140 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 20, 463 (франц.)

**117 Д. Полиномиальные коциклы. Хитон** (Polynomial cocycles. Heaton Robert Edwin. — Doct. diss. Indiana Univ.), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 8, 1406—1407 (англ)

Полиномиальным $n$-коциклом (над полем $k$) называется многочлен $f$ от $n$ переменных, для которого $\delta f = 0$, где оператор $\delta : k[x_1,\ldots,x_n] \to k[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ определен аналогично кограничному оператору в теории групп когомологий (при тождественных операторах). При $n=1$, например, $(\delta f)(x,y) = f(y) - f(x+y) + f(x)$. Утверждается, что над полем характеристик и 0 каждый $n$-коцикл при $n \geqslant 2$ является кограницей. Для случая поля характеристики $p$ указывается общая формула для 2-коциклов. Доказательств нет.

З. И. Боревич

## ГРУППЫ

**118. Порядки классических простых групп. Артин** (The orders of the classical simple groups. Artin Emil), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 455—472 (англ.)

Рассматриваются следующие конечные простые группы «лиевского типа»:

1) группа $L_n(q)$ порядка

$$\frac{1}{d}\, q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^2-1)(q^3-1)\ldots(q^n-1),$$
$$n>1,\ d=(n,\ q-1);$$

2) группа $U_n(q)$ порядка

$$\frac{1}{d}\, q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^{n} (q^k-(-1)^k),\ n>2,\ d=(n,\ q+1);$$

3) группа $S_{2n}(q)$ порядка

$$\frac{1}{d}\, q^{n^2} \prod_{k=1}^{n} (q^{2k}-1),\quad n>1,\quad d=(2,\ q-1);$$

4) группа $O_{2n}(\varepsilon,\ q)$ порядка

$$\frac{1}{d}\, q^{n(n-1)}(q^n-\varepsilon) \prod_{k=1}^{n-1} (q^{2k}-1),\ \varepsilon=\pm 1,\ n>3,$$
$$d=(4,\ q^n-\varepsilon);$$

5) группа $E_2(q)$ порядка $q^6(q^6-1)(q^2-1)$;

6) группа $E_4(q)$ порядка $q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)\times$
$\times(q^2-1)$;

7) группа $E_6(q)$ порядка

$$\frac{1}{d}\, q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1);$$
$$d=(3,\ q-1);$$

8) группа $E_7(q)$ порядка

$$\frac{1}{d}\, q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)\times$$
$$\times(q^2-1),\ d=(2,\ q-1);$$

9) группа $E_8(q)$ порядка

$$q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)\times$$
$$\times(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1),$$

где $q$ — степень некоторого простого числа $p$, которое называется характеристикой группы. Доказано, что среди подгрупп Силова группы «лиевского типа» наибольший порядок почти всегда имеет подгруппа Силова, соответствующая характеристике группы. Исключение составляют следующие группы: 1) группа $L_2(p)$, если $p = 2^s + 1$; 2) группа $L_2(2^r)$, если $2^r+1$ — простое число, 3) группы $L_2(8)$, $U_3(2)$, $U_3(3)$ и $U_4(2)$.

Доказано также, что порядок $N$ и характеристика $p$ однозначно определяют группу «лиевского типа», исключая случай $N = 20160$, $p = 2$, когда имеется две группы «лиевского типа» порядка $N$ и характеристики $p$, а именно группы $L_4(2)$ и $L_3(4)$. Д. А. Супруненко

**119. Характеры полных линейных групп над конечным полем. Грин** (The characters of the finite general linear groups. Green J. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 2, 402—447 (англ.)

Определяются характеры всех неприводимых комплексных представлений группы $GL(n, q)$. Эта задача ранее была решена для $n=2$ (Jordan H., Amer. J. Math., 1907, **29**, 387—405; Schur J., J. reine und angew. Math., 1907, **132**, 85—137) и $n=3,4$ (Steinberg R., Canad. J. Math., 1951, **3**, 225—235).

Обобщенные характеры группы $GL(n, q)$ (целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров) характеризуются как так называемые униформные функции. Униформные функции выражаются через целочисленные полиномы $Q^{\rho}_{\lambda}$, определенные для каждой пары $(\rho, \lambda)$ разбиений числа $n$. Эти полиномы связаны с характерами симметрической группы.

Выводятся соотношения ортогональности для полиномов $Q^{\rho}_{\lambda}$ и формула для скалярного произведения униформных функций. Показано, как выразить характеры группы $GL(n, q)$ через полиномы $Q^{\rho}_{\lambda}$. Определены степени абсолютно неприводимых представлений этой группы. В конце работы приведена таблица полиномов $Q^{\rho}_{\lambda}$ для разбиений $\rho, \lambda$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

С. Д. Берман

**120. $p$-подгруппы Силова классических групп над конечными полями с характеристикой взаимно простой с $p$. Уир** (Sylow $p$-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to $p$. Weir A. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 529—533 (англ.)

Классическими группами автор называет: 1) полную линейную группу $GL(n,q)$ над полем $GF(q)$, 2) симплектическую группу $C(2m,q)$ над полем $GF(q)$, 3) унитарную группу $U(n, q^2)$ над полем $GF(q^2)$, 4) ортогональную группу $O_D(n,q)$ над полем $GF(q)$.

Как известно, $p$-подгруппа Силова симметрической группы степени $p^n$ является полным произведением (Krasner M., Kaloujnine L., Acta Univ. Szeged., 1950, **13**, 230; 1951, 14, 39—66, 69—82) $C \circ C \circ \ldots \circ C$ $n$ циклических групп порядка $p$. Доказывается, что $p$-подгруппы Силова классических групп при $p>2, (p,q)=1$ являются прямыми произведениями групп вида, $\overline{C} \circ C \circ \ldots \circ C$, где $\overline{C}$ — циклическая группа порядка $p^2$, а $C$ — циклическая группа порядка $p$. Д. А. Супруненко

**21. Геометрия дробно-линейной группы $LF(4, 2)$.** Эдж (The geometry of the linear fractional group $LF(4,2)$. Edge W. L.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 15, 317—342 (англ.)

Основываясь на изучении трехмерного пространства над полем $GF(2)$, автор из геометрических соображений доказывает, что группа $LF(4,2)$ дробно-линейных преобразований трех переменных над полем $GF(2)$ изоморфна знакопеременной группе восьмой степени $A_8$ (факт известный уже Жордану (Jordan C., Traité des substitutions, Paris, 1870).) Л. А. Скорняков

**122. Некоторые свободные группы матриц.** Бреннер (Quelques groupes libres de matrices. Brenner J. L.), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 24, 1689—1691 (франц.)

Доказано, что группа $G$, порожденная двумя матрицами: $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$, где $m$ — произвольное действительное число $\geqslant 2$, является свободной группой. Ее элементами являются матрицы $(a_{ij})$, для которых: 1) $|a_{ij}| = 1, 2)$ $a_{11} \equiv a_{22} \equiv 1 \pmod{m^2}$, $a_{12} \equiv a_{21} \equiv 0 \pmod{m}$, 3) отношение $|a_{11}/a_{12}|$ не содержится между $f = (m + \sqrt{m^2-4})/2$ и $f^{-1}$. Для $m=2$ это группа была ранее рассмотрена И. Н. Сановым (Докл. АН СССР, 1947, 57, № 7). А. И. Кострикин

**123. Ряды Пуанкаре и Эйзенштейна для гильбертовой модулярной группы.** Гундлах (Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe. Gundlach Karl-Bernhard), Math. Z., 1956, 64, № 3, 339—352 (нем.)

Развитие предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 5586).

Пусть $K$ — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени $n$, $\mathfrak{c}$ — некоторый его идеал и $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ — группа всех матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с элементами из поля $K$, для которых $a$, $d$ — целые числа из $K$, $b \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}$ и $c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}^{-1}}$.

Группу $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ можно реализовать как дискретную группу преобразований каждой из $2^n$ «координатных» областей $n$-мерного комплексного пространства (соответствующих определенному набору знаков мнимых частей координат). Фундаментальная область группы $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ так же, как и группы Гильберта, имеет $h$ вершин, где $h$ — число классов идеалов поля $K$.

В работе с помощью рядов Пуанкаре строится базис пространства модулярных форм для группы $\Gamma(1, \mathfrak{c})$; регулярных в вершинах фундаментальной области, а с помощью рядов Эйзенштейна — базис его ортогонального дополнения. И. И. Пятецкий-Шапиро

**124. Мономиальные группы.** Крауч (Monomial groups. Crouch Ralph B.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 187—215 (англ.)

Пусть $U$ — бесконечное вполне упорядоченное множество мощности $B$, и $H$ — произвольная группа. Преобразование $x_\varepsilon \to h_\varepsilon x_{i_\varepsilon}$, где $x_\varepsilon \to x_{i_\varepsilon}$ — взаимно однозначное отображение множества $U$ на себя, а $h_\varepsilon$ — элемент группы $H$, называется мономиальной подстановкой. Множество $\Sigma(H)$ всех мономиальных подстановок является группой. Оказывается, что $\Sigma(H) = VS$, $S \cap V = 1$, где $S$ — совокупность всех отображений $s$ вида $x_\varepsilon \to x_{i_\varepsilon}$, а $V$ — совокупность отображений $v$ вида $x_\varepsilon \to h_\varepsilon x_\varepsilon$.

Пусть $B^+$ — следующее за $B$ кардинальное число, а $C$ и $D$ — такие кардинальные числа, что $\aleph_0 \leqslant C \leqslant B^+$, $\aleph_0 \leqslant D \leqslant B^+$. Множество $\Sigma(H, B, C, D)$ всех подстановок $y$ вида $vs$, где $v \in V$, $s \in S$, причем число неединичных множителей преобразования $v$ меньше $C$, а число элементов, фактически перемещаемых преобразованием $s$, меньше $D$, является подгруппой. Пересечение $V \cap \Sigma(H, B, C, D)$ является нормальным делителем группы $\Sigma(H, B, C, D)$. Работа посвящена изучению групп $\Sigma(H)$, $\Sigma(H, B, C, D)$, в частности групп $\Sigma(H, B, \aleph_0, \aleph_0)$. Указывается необходимое и достаточное условие сопряженности в $\Sigma(H)$ двух мономинальных подстановок. Описываются нормальные делители группы $\Sigma(H, B, \aleph_0, \aleph_0)$ и других мономинальгрупп. Доказывается, что нормальный делитель $V \cap \Sigma(H, B, \aleph_0, \aleph_0)$ является характеристической. подгруппой. Д. А. Супруненко

**125. Мультипликативные формулы в теории модулярных групп.** Пятецкий-Шапиро И. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 110

**126. Автоморфизмы симплектической модулярной группы.** Рейнер (Automorphisms of the symplectic modular group. Reiner Irving), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 35—50 (англ.)

Пусть $F = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, где $E_n$ — единичная матрица порядка $n$. Симплектической модулярной группой называется группа $\Gamma_{2n}$ всех целочисленных матриц $M$ порядка $2n$, удовлетворяющих условию $MFM' = F$. Группа $\Gamma_{2n}$ содержится в качестве нормального делителя индекса 2 в группе $\Delta_{2n}$, состоящей из всех целочисленных матриц, подчиненных условию $MFM' = \pm F$.

Пусть $x \to \psi(x)$ — гомоморфное отображение группы $\Gamma_{2n}$ в группу второго порядка $\{\pm 1\}$. Доказывается, что любой автоморфизм $\tau$ группы $\Gamma_{2n}$ задается формулой

$$x^\tau = \psi(x)\, uxu^{-1}, \quad x \in \Gamma_{2n}, \; u \in \Delta_{2n}.$$

При $n > 2$ любой автоморфизм $\Gamma_{2n}$ можно записать в виде

$$x^\tau \to uxu^{-1}, \quad x \in \Gamma_{2n}, \; u \in \Delta_{2n}.$$

Доказывается, кроме того, что автоморфизм $x \to x'^{-1}$ группы $\Gamma_{2n}$ является внутренним автоморфизмом.

Д. А. Супруненко

**127. Простое доказательство теорем Брауэра о групповых характерах.** Асано (Einfacher Beweis eines Brauerschen Satzes über Gruppencharaktere. Asano Keizo), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 8, 501—503 (нем.)

Дается простое доказательство двух известных равносильных теорем Р. Брауэра об индуцированных представлениях. С. Д. Берман

**128. К теории представлений конечных групп.** Брауэр (Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. Brauer Richard), Math. Z., 1956, 63, № 4, 406—444 (нем.)

Подробное изложение построенной автором теории $p$-блоков (Алгебр. реф. сб. М., 1948, реф. 529, 536, 537, см. также РЖМат, 1956, 4345).

Основным новым результатом является следующая теорема: Пусть $D$ — подгруппа порядка $p^d$ группы $G$ и $R$ — ее нормализатор. Существует взаимно однозначное соответствие между блоками $B$ группы $G$ с дефект-группой $D$ и блоками $\widetilde{B}$ группы $R$ с дефектом $d$. При этом $D$ также является дефект-группой блоков $\widetilde{B}$. С. Д. Берман

**129. Число образующих и существование $p$-факторгрупп.** Гашюц (Erzeugendenzahl und Existenz von $p$-Faktorgruppen. Gaschütz Wolfgang), Arch. Math., 1956, 7, № 2, 91—93 (нем.)

Рассматриваются $p$-совершенные группы, т. е. группы, не имеющие нормальных делителей индекса $p$ ($p$ — простое число). Доказаны следующие теоремы:

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — $p$-совершенная группа, имеющая $e$ образующих; $\mathfrak{U}$ — ее подгруппа, индекс $n$ которой конечен; $\mathfrak{U}/\mathfrak{U}_p$ — максимальная элементарная абелева $p$-фактор-группа группы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}:\mathfrak{U}_p = p^d$ — порядок этой фактор-группы. Тогда

$$d \leqslant 1+(e-1)n-e.$$

2. Для любых заданных натуральных чисел $e$ и $n$ можно подобрать такое простое число $p$ и такую $p$-совершенную группу $\mathfrak{G}$, имеющую $e$ образующих и содержащую элементарную абелеву подгруппу $\mathfrak{U}$ индекса $n$, что порядок группы $\mathfrak{U}$ равен $p^{1+(e-1)n-e}$.

В. К. Туркин

**130. Об изоморфных представлениях конечных групп. Жмудь Э. М.**, Матем. сб., 1956, 38, № 4, 417—430

Гомоморфное отображение нормального делителя $H$ группы $G$ в нормальный делитель $H_1$ этой же группы называется когерентным, если оно коммутирует со всеми внутренними автоморфизмами группы $G$. Композит всех когерентно изоморфных между собой минимальных нормальных делителей группы называется когерентой группы, а композит всех минимальных нормальных делителей называется цоколем группы.

Доказано, что для любой конечной группы $G$ следующие утверждения равносильны: 1) группа $G$ допускает изоморфное линейное представление, распадающееся на $k$ абсолютно неприводимых компонент; 2) цоколь группы $G$ порождается $k$ классами сопряженных элементов; 3) для каждой абелевой когеренты $R$ группы $G$ выполняется неравенство $k \geqslant \frac{sg}{r}$, где $p^{rs}$ — порядок когеренты $R$; $p^r$ — порядок минимального нормального делителя $F \subseteq R$; $p^q - 1$ — порядок группы когерентных автоморфизмов нормального делителя $F$.

Теорема о равносильности условий 1) и 3) является упрощением одного результата Тацава (Tazawa M., Tôhoku Math. J., 1940, № 47, № 1,87—93).

Получена также формула для суммы квадратов степеней изоморфных абсолютно неприводимых представлений конечной группы. Из результатов этой работы вытекают все известные основные факты об изоморфных линейных представлениях конечных групп.

С. Д. Берман

**131. Обобщение понятия когомологии конечных групп. Масуда** (Generalization of the concept of cohomology of finite groups. Masuda Katsuhiko), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 8, 504—507 (англ.)

Пусть $p$ — простое число или символ $\infty$, $Z_p$ — кольцо целых $p$-адических чисел при $p \neq \infty$ и кольцо целых рациональных чисел при $p = \infty$. Точкой пространства когомологий конечной группы $G$ автор называет пару $(p, D)$, где $D$ — некоторое представление группы $G$ регулярными матрицами с элементами из кольца $Z_p$. Дается определение «локальных» групп когомологий группы $G$ в точке $(p, D)$ над заданным $G$-модулем $A$. В случае, когда $p = \infty$ и $D$—тривиальное представление (1-й степени), введенные группы совпадают с обычными группами когомологий группы $G$ над $G$-модулем $A$.

З. И. Боревич

**132. О кронекеровском произведении неприводимых представлений симметрической группы. Мурнаган** (On the Kronecker product of irreducible representations of the symmetric group. Murnaghan Francis D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 2, 95—98 (англ.)

Исследуется разложение кронекеровского произведения двух неприводимых представлений $\Gamma(n-p, (\mu))$ и $\Gamma(n-p', (\mu'))$ симметрической группы $S_n$ на неприводимые компоненты.

С. Д. Берман

**133. Об одном вопросе Гашюца. Нёйман** (On a question of Gaschütz. Neumann B. H.), Arch. Math., 1956, 7, № 2, 87—90 (англ.)

Пусть $G$ — группа, порождаемая $n$ элементами $q_1,\ldots, q_n$; упорядоченная последовательность $\mathfrak{g} = (q_1,\ldots,q_n)$ называется порождающим вектором группы $G$. Системы транзитивности, на которые распадается множество всех $n$-членных порождающих векторов группы $G$, относительно группы подстановок, порождаемой подстановками, соответствующими всем автоморфизмам группы $G$ и всем автоморфизмам $n$-членной свободной группы, фактор-группой которой является группа $G$, называется $T$-системами.

В работе построена нильпотентная группа порядка $2^{15}$, для которой число $T$-систем не равно единице.

В. К. Туркин

**134. Венгерские исследования в теории конечных групп. Редеи** (Hazai vizsgàlatok a véges csoportok elméletebén. Rédei László), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 3, 315—325 (венг.)

Обзор работ венгерских алгебраистов по теории конечных групп.

L. Fuchs

**135. К аксиоматике конечных групп. II. Стольт** (Zur Axiomatik endlicher Gruppen. II. Teil. Stolt Bengt), Arkiv. mat., 1956, 3, № 3, 229—238 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 5730. Доказана полнота сформулированных в диссертации автора (РЖМат,1955, 1675) тринадцати систем аксиом, характеризующих конечные группы; для некоторых из них доказывается неприводимость. Указано, какие системы аксиом (рассматриваемого типа) являются соответственно полными для групп, полными лишь для конечных групп, неполными, и для каких систем вопрос о полноте или неполноте еще остается открытым.

Е. Г. Шульгейфер

**136. Группы с конечными классами изоморфных подгрупп. Фукс** (On groups with finite classes of isomorphic subgroups. Fuchs L.), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 243—252 (англ.)

Показывается, что все классы изоморфных подгрупп группы $G$ тогда и только тогда конечны, когда группа $G$ изоморфна центральному расширению некоторой подгруппы группы всех корней из единицы, при помощи конечной группы. Все классы изоморфных нетривиальных подгрупп группы $G$ тогда и только тогда состоят из одинакового числа (большего единицы) подгрупп, когда группа $G$ является конечной абелевой группой типа $(p,p)$ или типа $(p, p, p)$.

А. П. Дицман

**137. Конечные группы, изоморфно вкладывающиеся в каждую конечную группу, гомоморфными образами которой они являются. Хигман** (Finite groups having isomorphic images in every finite group of which they are homomorphic images. Higman Graham), Quart. J. Math., 1955, 6, № 24, 250—254 (англ.)

Доказано, что конечная группа $G$ тогда и только тогда обладает указанным в заглавии свойством, когда она является либо циклической группой, либо прямым произведением двух циклических групп, из которых одна имеет порядок, свободный от квадратов, причем порядок хотя бы одного множителя не является удвоенным нечетным числом. Кроме того, доказано, что для любого нормального делителя $R$ свободной группы $F$, фактор-группа $F/[R, R]$ не имеет кручения.

Б. И. Плоткин

**138. Заметка о разложении по двойному модулю. I. Цубои** (Note on double coset decomposition. 1. Tsuboi Teruo), Sci. Repts Saitama Univ., 1955, **A2**, № 1, 1—5 (англ.)

Пусть $G$ — конечная группа, $H$, $K$ — ее подгруппы и $S(H, K)$ — пересечение всех комплексов вида $a^{-1}HaK \cap Ka^{-1}Ha$, где $a$ — произвольный элемент группы $G$. Доказано, что полная система вычетов разложения группы $G$ по двойному модулю $(H, K)$ тогда и только тогда является частью полной системы вычетов разложения группы $G$ по двойному модулю $(H, L)$, когда $L \leqslant S(H, K)$ (или, что равносильно, когда $S(H, L) \leqslant S(H, K)$). Если смежные системы разложения группы $G$ по двойному модулю $(H, K)$ составляют группу (относительно умножения комплексов), то комплекс $HK$ является нормальным делителем группы $G$ и разложение по двойному модулю $(H, K)$ совпадает с разложением группы $G$ по модулю $HK$. В. К. Туркин

**139. Замечания относительно теории расширений групп. Асано** (Bemerkungen über die Erweiterungstheorie von Gruppen. Asano Keizo), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, **A5**, № 2, 75—80 (нем.)

Пусть $\Gamma = \mathfrak{F}/\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{F}$ — свободная группа с образующими $a_\lambda$, а $\mathfrak{R}$ — ее нормальный делитель с образующими $C_\mu = \Pi_{i=1}^{n} a_{\nu_i}^{l_i}$. Тогда группу $\Gamma$ можно рассматривать как группу с образующими элементами $a_\lambda$ и определяющими соотношениями

$$C_\mu = \Pi_{i=1}^{n} a_{\nu_i}^{l_i} = 1,$$

а $\mathfrak{R}$ — как группу с областью операторов $\mathfrak{F}$, действующими по формуле $r^F = F^{-1}rF$ $(r \in \mathfrak{R}, F \in \mathfrak{F})$. Определяющие соотношения группы $\mathfrak{R}$ в образующих $C_\mu$ будут тогда иметь вид

$$\Pi_{i=1}^{m} C_{\mu_i}^{\varepsilon_i F_i} = 1 \quad (\varepsilon_i = \pm 1, F_i \in \mathfrak{F}).$$

Если теперь $\mathfrak{G}$ — некоторое расширение группы $\mathfrak{R}$ с помощью группы $\Gamma$ с образующими $u_\lambda \pmod{\mathfrak{R}}$, то элементу $a_\lambda \pmod{\mathfrak{R}}$ соответствует некоторый смежный класс $u_\lambda \mathfrak{R} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{R}$, причем произведение $\overline{C}_\mu = \Pi_i u_{\nu_i}^{l_i}$ будет элементом группы $\mathfrak{R}$.

Обозначая через $S_\lambda$ автоморфизм группы $\mathfrak{R}$, определяемый соотношением $A^{S_\lambda} = u_\lambda^{-1} A u_\lambda$ $(A \in \mathfrak{R})$, и вводя обозначение $S(F) = \Pi_i S_{\lambda_i}^{n_i}$, если $F = \Pi_i a_{\lambda_i}^{n_i}$, автор доказывает, что

$$(*)\begin{cases} \Pi_{i=1}^{m} \overline{C}_{\mu_i}^{\varepsilon_i S(F_i)} = 1 \text{ для каждого соотношения } \Pi_{i=1}^{m} C_{\mu i}^{\varepsilon_i F_i} = 1 \\ A^{S(C_\mu)} = C_\mu^{-1} A \overline{C}_\mu \text{ для каждого элемента } A \in \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Опираясь на изоморфную вложимость каждого расширения группы $\mathfrak{R}$ с помощью группы $\Gamma$ в группу подстановок всех пар $(\xi, X)$ $(\xi \in \Gamma, X \in \mathfrak{R})$, автор доказывает далее, что для любого множества $\{\overline{C}_\mu\}$ элементов группы $\mathfrak{R}$ и любого множества $\{S_\lambda\}$ ее автоморфизмов, удовлетворяющих соотношениям $(*)$, существует такое однозначно определенное расширение группы $\mathfrak{R}$ с помощью группы $\Gamma$ с образующими $U_\lambda \pmod{\mathfrak{R}}$, что

$$U_\lambda^{-1} A U_\lambda = A^{S_\lambda} \ (A \in \mathfrak{R}), \ U_1^{e_1} \ldots U_{\nu_n}^{e_n} = \overline{C}_\mu \ (C_\mu = \Pi_i a_i^{e_i}).$$

Таким образом, описанное построение позволяет получить все расширения группы $\mathfrak{R}$ с помощью группы $\Gamma$. Это заключение иллюстрируется примерами и, в частности, примером расширения с помощью прямого произведения конечного числа произвольных циклических групп. С. Н. Черников

**140. К теории гомологий в группах. Боревич З. И., Фаддеев Д. К.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 111

**141. О коммутаторах в свободных произведениях. II. Гриффитс** (A note on commutators in free products. II. Griffiths H. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 2, 245—251 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 3678. Пусть $H$ — свободное произведение групп $G_n$. Доказано, что если элемент $h \in H$ имеет вид $g_1 g_2 \ldots g_m$, где $g_i \in G_i$ и $g_i \neq 1$ для любого $i = 1, \ldots, m$, то $h$ нельзя представить как произведение меньшего, чем $m$, числа коммутаторов из $H$. М. И. Граев

**142. О подгруппах и гомоморфных образах. Кертес** (On subgroups and homomorphic images. Kertész A.), Publs math., 1953, **3**, № 1—2, 174—179 (англ.)

Автор замечает, что в теории абелевых групп имеет место некоторая двойственность, при которой соответствуют друг другу свободные и полные абелевы группы. В качестве новой иллюстрации этой двойственности автор доказывает, что всякая абелева группа $H$ тогда и только тогда является полной (свободной) абелевой группой, когда она изоморфна фактор-группе (подгруппе) любой группы, подгруппой (фактор-группой) которой она является.

Доказана также следующая двойственная себе теорема: Абелева группа, имеющая группу $H$ своим эндоморфным образом, тогда и только тогда имеет прямое слагаемое, изоморфное группе $H$, когда группа $H$ является прямой суммой полной и свободной абелевых групп (одно из слагаемых может отсутствовать).

Авторы указывает также, что для некоммутативных групп аналогичной двойственности не наблюдается. L. Fuchs

Примечание редакции. Рассматриваемая автором двойственность изучалась ранее и другими авторами (см., например, MacLane S., Bull. Amer. Math Soc., 1950, **56**, 485—516).

**143. Полные и свободные группы. Кертес** (Algebrailag zárt és szabad csoportok. Kertész A.), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 2, 229—236 (венг.)

Венгерский вариант работы «О подгруппах и гомоморфных образах» (реф. 142), дополненный некоторыми проблемами, как, например, следующей: каковы группы, являющиеся гомоморфными образами каждого своего шрейерова расширения? L. Fuchs

**144. Заметка о $p$-группах с симметрическими порождающими соотношениями. Либек** (Note on prime-power groups with symmetrical generating relations. Liebeck H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 2, 394—395 (англ.)

Доказывается, что всякая $p$-группа, обладающая свойством $\mathscr{E}'$, обладает также свойством $M$ (РЖМат, 1956, 6401). В. К. Туркин

**145. Абелевы группы, являющиеся прямыми слагаемыми каждой абелевой группы, содержащей их в качестве сервантной подгруппы. Лось** (Abelian groups that are direct summands of every Abelian group which contains them as a pure subgroup. Łoś J.), Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 3, 1956, **4**, № 2, 73 (англ.), **Абелевы группы, являющиеся прямыми слагаемыми каждой абелевой группы, содержащей их в качестве**

**сервантной подгруппы. Лось Г.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1956, 4, № 2, 69

Приведены некоторые теоремы об указанных в заглавии группах. В частности, утверждается, что абелева группа тогда и только тогда является прямым слагаемым каждой содержащей ее абелевой группы, когда она является прямым слагаемым хотя бы одной группы, допускающей компактную топологизацию.

A. W. Mostowski

**146. Два замечания о нильпотентных группах. Мальцев А. И.,** Матем. сб., 1955, **37**, № 3, 567—572

Работа состоит из двух параграфов. В первом автор, основываясь на двух своих более ранних работах (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, 13, 9—32 и Матем. сб., 1950, 26(68), 19—34), с помощью нильпотентных алгебр Ли доказывает, что элементы свободной $n$-ступенно нильпотентной группы $V$ тогда и только тогда являются свободными образующими некоторой свободной $n$-ступенно нильпотентной подгруппы, когда образы этих элементов в фактор-группе группы $V$ по ее коммутанту линейно независимы. В работе Н. П. Гольдиной и референта (РЖМат, 1956, 3676) эта теорема была доказана для свободных метабелевых групп чисто групповыми методами.

Во втором параграфе решается проблема тождества для нильпотентных групп. О. Н. Головин

**147. О многообразиях групп и о соответствующих им почти кольцах. Нёйман** (On varieties of groups and their associated near-rings. Neumann Hanna), Math. Z., 1956, **65**, № 1, 36—69 (англ.)

Изучаются классы групп, тождественно удовлетворяющие заданным соотношениям. Как основной инструмент используются множества эндоморфизмов групп, организованных в виде почти колец.

Рассматривается множество (вообще говоря, бесконечное) переменных $x_1, x_2, \ldots$ и конечные слова $v(x_1, x_2, \ldots)$ в этих переменных. Эти слова кратко называются законами. Пусть дано некоторое множество $\{v_i(x_1, x_2, \ldots)\}_{i\in I}$ законов. Класс всех групп $H$, в которых тождественно выполняются все отношения $v_i(h_1, h_2, \ldots) = 0$ (для всех $i \in I$ и для любых специализаций переменных $x_i$ в группе $H$), называется многообразием групп. Автор ограничивается рассмотрением счетных групп и законов от счетного числа переменных $x_1, x_2, \ldots$. Пусть $F$ — свободная группа с раз навсегда зафиксированной счетной системой образующих $e_1, e_2, \ldots$ и $F_n$ — свободная подгруппа группы $F$, порожденная элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть далее $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие групп и $\{v(x_1, x_2, \ldots)\}$ — совокупность всех законов, выполняющихся во всех группах $H \in \mathfrak{V}$. Тогда множество элементов $v(e_1, e_2, \ldots)$ образует вполне характеристическую подгруппу $V$ группы $F$, и группа $H$ принадлежит многообразию $\mathfrak{V}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна факторгруппе группы $F/V$. Обратно, каждая вполне характеристическая подгруппа $V$ определяет некоторое многообразие групп. Соответствующая фактор-группа $F/V$ называется приведенной свободной группой этого многообразия. Фактор-группы $G = F_n/V_n$, где $V_n = F_n \cap V$, называются приведенными свободными группами ранга $n$. Все группы $H$ с $n$ образующими, принадлежащие многообразию $\mathfrak{V}$, являются гомоморфными образами приведенной свободной группы $G_n$.

Любая группа $H$ определяет некоторое многообразие, а именно многообразие всех групп, в которых выполняются все законы, выполняющиеся в группе $H$. Если $H$ представлена как фактор-группа $F/R$ группы $F$, то это многообразие определяется наибольшей вполне характеристической подгруппой группы $F$, содержащейся в $R$.

Пусть $V$ — произвольная вполне характеристическая подгруппа группы $F$ и пусть $V^{(n)}$ — наименьшая вполне характеристическая подгруппа группы $F$, содержащая группу $V_n$. Тогда $V^{(1)} \subseteq V^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq V^{(n)} \subseteq \ldots \subseteq V$, причем $\bigcup_{i=1}^{\infty} V^{(i)} = V$. Этот ряд подгрупп (он называется восходящим рядом) тогда и только тогда конечен, когда подгруппа $V$ порождается как вполне характеристическая подгруппа множеством слов, в которые входит только конечное число образующих $e_1, e_2, \ldots$. Вопрос о существовании вполне характеристических подгрупп, не обладающих этим свойством, остается открытым. Неизвестно даже, не будет ли восходящий ряд конечен для любой подгруппы $V$, состоящей из законов, выполненных в некоторой конечной группе. Показано, что второй производной группе группы $F$ соответствует восходящий ряд длины 4.

Пусть $\mathfrak{V}$ — многообразие групп, соответствующее вполне характеристической подгруппе $V$. Рассмотрим подгруппу $W^{(n)}$, состоящую из всех законов, выполняющихся во всех группах многообразия $\mathfrak{V}$ с числом образующих $\leqslant n$. Оказывается, что $W^{(1)} \supseteq W^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq W^{(n)} \supseteq \ldots \supseteq V$, причем $\bigcup_{i=1}^{\infty} W^{(i)} = V$. Этот ряд (он называется нисходящим рядом) тогда и только тогда конечен, когда группа $V$ является группой всех законов, выполняющихся в некоторой группе с конечным числом образующих. Например, нисходящий ряд длины 3 соответствует вполне характеристической подгруппе, порожденной элементом $3e_1$.

Во второй части работы изучаются почти кольца эндоморфизмов приведенных свободных групп. Пусть $e_1, e_2, \ldots \pmod{V_n}$ — некоторая фиксированная система образующих приведенной свободной группы $G_n$ конечного или счетного ранга. Эндоморфизм $\alpha$ группы $G_n$ вполне определяется элементами $e_i\alpha = a_i(e_1, e_2, \ldots)$ и, обратно, каждому набору («вектору») слов $\{a_i(e_1, e_2, \ldots,) \bmod V\}$ соответствует некоторый эндоморфизм $\alpha$. Определяется сложение и умножение эндоморфизмов; умножение определяется как обычно, а сложение по следующему правилу: если эндоморфизму $\alpha$ соответствует вектор $\{a_i(e_1, e_2, \ldots)\}$, эндоморфизму $\beta$ — вектор $\{b_i(e_1, e_2, \ldots)\}$, то через $\alpha + \beta$ обозначается эндоморфизм, соответствующий вектору $\{a_i(e_1, e_2, \ldots) b_i(e_1, e_2, \ldots)\}$. Относительно этих двух операций множество эндоморфизмов группы $G_n = F_n/V_n$ образует почти кольцо $\Gamma_n$; т. е. относительно сложения $\Gamma_n$ является (вообще говоря) некоммутативной группой, а относительно умножения — полугруппой, причем имеет место правый дистрибутивный закон. Рассматриваются эндоморфизмы $\alpha_j^k$, определенные условиями: $e_i\alpha_j^k = 0$, если $i \neq k$, и $e_k\alpha_j^k = e_j$. Оказывается, что при умножении в $\Gamma_n$ слева на элементы $\alpha_j^k$ также выполняется дистрибутивный закон. Этот факт имеет для всего дальнейшего основное значение. Рассматривается подпочти кольцо почти кольца $\Gamma_n$, состоящее из всех сумм эндоморфизмов типа $\alpha_j$. Для конечного $n$ это подпочти кольцо совпадает с $\Gamma_n$. Для $n = \aleph_0$ это подпочти кольцо обозначается через $\Gamma_\omega$. Кольцо $\Gamma_n$ и $\Gamma_\omega$ являются обобщением колец целочисленных матриц и обладают аналогичными свойствами. В частности, идеалам почти кольца $\Gamma_n$ соответствуют вполне характеристические подгруппы, содержащие группу $V_n$, т. е. определяю-

щие подмногообразия данного многообразия групп. С помощью теории идеалов соответствующих почти колец получается ряд тонких результатов, особенно для случая абсолютно свободных групп $F$ и $F_n$.

А. Л. Калужнин

**148. Группы с автоморфизмами, оставляющими на месте только нулевой элемент. Нёйман** (Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed. Neumann B. H.), Arch. Math., 1956, 7, № 1, 1—5 (англ.)

Пусть $G$ — аддитивно записанная не обязательно абелева группа, допускающая автоморфизм $\alpha$ третьего порядка, который не оставляет на месте ни одного элемента, кроме нулевого. Доказано, что если каждый элемент группы коммутирует со своим $\alpha$-образом (это условие автоматически выполнено, если группа $G$ конечна), то $G$ является нильпотентной группой класса $m \leqslant 2$. На примере показано, что группа $G$ может не быть абелевой (даже являясь конечной группой).

А. И. Кострикин

**149. Замечание о коммутантах разложимых групп. Охара** (Note on commutator subgroups of factorisable groups. Ohara Akiko), Proc. Japan. Acad., 1955, 31, № 9, 612—614 (англ.)

Пусть группа $\mathfrak{G}$ разложена в произведение абелевой подгруппы $A$ и произвольной подгруппы $B$. Тогда $\mathfrak{G}' = BN$, где $\mathfrak{G}'$, $B'$ — коммутанты групп $\mathfrak{G}$ и $B$ соответственно, а $N$ — взаимный коммутант подгрупп $A$ и $B$. Если группа $B$ также абелева, то $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа класса 2 (РЖМат, 1956, 4349). Если $B$ — разрешимая группа класса 2, то класс группы $\mathfrak{G}$ (если эта группа разрешима) не превосходит увеличенного на 2 класса группы $N$. Если группа $B$ нильпотентна, ее класс нильпотентности равен 2 и $AB' = B'A$, то $\mathfrak{G}^{(i)} = (B', N \ldots N^{(i-2)}) N^{(i-1)}$, где $\mathfrak{G}^{(i)}$ и $N^{(i)}$ — $i$-тые коммутанты групп $\mathfrak{G}$ и $N$ соответственно. Подгруппа $(B', N, \ldots, N^{(i-2)})$ абелева и инвариантна в $\mathfrak{G}^{(i)}$. Кроме того, $N$ — является нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$ (даже для неабелевой группы $A$).

Б. И. Плоткин

**150. Ослабление классического определения групп. Столь** (Abschwächung einer klassischen Gruppendefinition. Trygve Nagell zum 60. Geburstag gewidmet. Stolt Bengt), Math. scand., 1955, 3, № 2, 303—305 (нем.)

Рассматривается система аксиом группы, состоящая из двух аксиом однозначности и ассоциативности бинарной операции и аксиомы существования такого элемента $d$, что при любом $a$ уравнение $ax = d$ имеет единственное решение $x$, уравнение $ya = d$ — по крайней мере одно решение $y$. Кроме того, рассматривается система аксиом, отличающаяся от первой лишь тем, что в последней аксиоме первой системы требуется существование не более одного решения уравнения $ya = d$. Доказана полнота этих систем аксиом. Впервые эта полнота была более сложным способом доказана в диссертации автора (РЖМат, 1955, 1675). Е. Г. Шульгейфер

**151. Обратная операция в группах. Фёрстенберг** (The inverse operation in groups. Furstenberg Harry), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 991—997 (англ.)

Отмечая, что в теории групп часто используется «обратная операция» $ab^{-1}$, автор ставит вопрос об аксиоматическом определении группы в терминах обратной операции. Рассматривается множество $G$ с бинарной операцией $\circ$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $a \circ b \in G$ для каждой пары элементов $a, b \in G$.

2) $(a \circ c) \circ (b \circ c) = a \circ b$ для любых трех элементов $a, b, c \in G$.

3) $a \circ G = G$ для каждого элемента $a \in G$.

Из условий 1)—3) следует существование в $G$ такого элемента $e$, что

3а) $a \circ a = e$ для всех $a \in G$; 3б) $a \circ e = a$.

Если в системе $G$ с операцией $\circ$, удовлетворяющей условиям 1) — 3), ввести умножение по формуле $ab = a \circ (e \circ b)$, то $G$ превратится в группу, причем операция $\circ$ в группе $G$ будет обратной операцией, т. е. $a \circ b = ab^{-1}$. Для того чтобы $G$ была абелевой группой, достаточно к условиям 1)—3) добавить условие

4) $(c \circ b) \circ (c \circ a) = a \circ b$ для любых трех элементов $a, b, c \in G$.

Далее изучается система $G$ с бинарной операцией $\circ$, удовлетворяющей условиям 1) и 2); такая система $G$ называется частичной группой. Мультипликативно замкнутое подмножество $S$ частичной группы $G$, содержащее все идемпотентные элементы, называется частичной подгруппой группы $G$; частичная подгруппа $S$, для которой $a \circ (a \circ S) \subseteq S$ для любого $a \in G$, называется частичным нормальным делителем. Естественным образом определяется частичная фактор-группа $G/S$ частичной группы $G$ по ее частичному нормальному делителю $S$. Частичная фактор-группа $G/S$ является частичной группой, удовлетворяющей условию 3а). Два элемента $a$ и $b$ частичной группы $G$ называются эквивалентными $(a \sim b)$, если в $G$ существует такой третий элемент $x$, что $a \circ x = b \circ x$. Если $a \sim b$, то $a \circ y = b \circ y$ и $y \circ a = y \circ b$ для любого элемента $y \in G$. Соотношение $\sim$ разбивает все элементы частичной группы $G$ на непересекающиеся классы попарно эквивалентных элементов, причем, если $a \sim b$ и $a_1 \sim b_1$, то $a \circ a_1 = b \circ b_1$. Произвольное множество $\overline{G}$, содержащее частичную группу $G$, превращается в частичную группу, если произвольным образом определить однозначное отображение $x \to \overline{x}$ множества $\overline{G}$ на множество $G$, тождественное на множестве $G$, и положить $\overline{x} \circ \overline{y} = x \circ y$; частичная группа $\overline{G}$ называется эквивалентным расширением частичной группы $G$. Частичная группа $\widetilde{G}$ называется эквивалентным сокращением частичной группы $G$, если существует такое сохраняющее умножение однозначное отображение $f$ частичной группы $G$ на частичную группу $\widetilde{G}$, при котором равенство $f(x) = f(y)$ возможно лишь в случае эквивалентности элементов $x$ и $y$.

Если дано произвольное множество элементов $M$, то множество $G$ всевозможных пар $(m, n)$, где $m, n \in M$, на котором операция $\circ$ определена формулой $(m_1, n_1) \circ (m_2, n_2) = (m_1, m_2)$, является частичной группой; такие частичные группы называются простыми. На простой частичной группе нельзя построить группу (указанным выше способом). Произвольная частичная группа $G$ является результатом применения операций эквивалентных сокращений и расширений к прямому произведению $G_1 \times G_2$ некоторой группы $G_1$ (точнее, частичной группы $G_1$, множество элементов которой совпадает с множеством элементов группы $G_1$, а операцией $\circ$ служит обратная операция в группе $G_1$), и некоторой простой частичной группы $G_2$,

Е. Г. Шульгейфер

**152. Модули и полупростые кольца. I. Кертес** (Modules and semi-simple rings. I. Kertész A.), Publs. mat., 1954, 3, № 3—4, 289—296 (англ.)

Доказана равносильность следующих свойств левых унитарных $R$-модулей $G$ над произвольным кольцом $R$ с единицей: 1) модуль $G$ разлагается в прямую сумму минимальных $R$-модулей; 2) каждый подмодуль модуля $G$ является прямым слагаемым; 3) порядок каждого отличного от нуля элемента модуля $G$ является пересечением конечного числа максимальных левых идеалов кольца $R$; 4) каждая максимальная незави-

симая система элементов модуля $G$ является системой образующих (система $\{g_\alpha\}$ элементов модуля $G$ называется независимой, если из всякого соотношения $r_1 g_{\alpha_1} + \ldots + r_n g_{\alpha_n} = 0$, где $r_1 \in R$, следует, что $r_1 g_{\alpha_1} = \ldots = r_n g_{\alpha_n} = 0$). Любой $R$-модуль обладает этими свойствами, если ими обладает аддитивный модуль кольца $R$. Это имеет место тогда и только тогда, когда кольцо $R$ полупросто, т. е. не содержит отличных от нуля нильпотентных левых идеалов и удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов. А. П. Мишина

**153. Локально нильпотентные группы без кручения, полные над простыми топологическими полями. Глушков В. М.,** Матем. сб., 1955, **37**, № 3, 477—506

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 8623). Н. Я. Виленкин

**154. Топологические группы и алгебры Ли. Глушков В. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 112

**155. Инвариантные комплексные строения на полупростых группах Ли. Моримото** (Structures complexes invariantes sur les groupes de Lie semi-simples. Morimoto Akihiko), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 9, 1101—1103 (франц.)

Пусть $G$ — связная вещественная группа Ли четной размерности, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой является прямой суммой полупростой и абелевой алгебр Ли. Излагается конструкция, позволяющая построить на $G$ бесконечно много комплексных аналитических строений, инвариантных относительно левых сдвигов. Каждое из этих строений характеризуется тем, что алгебра Ли группы правых сдвигов, аналитичных относительно этого строения, является некоторой картановской подалгеброй алгебры $\mathfrak{G}$. Отмечается, что конструкция автора дает, вообще говоря, не все левоинвариантные строения на группе $G$. А. Л. Онищик

**156. Группы, сопряженные самим себе. Мостов** (Self-adjoint groups. Mostow G. D.), Ann. Math. 1955, **62**, № 4, 44—55 (англ.)

Пусть $G$ — алгебраическая группа линейных преобразований вещественного (комплексного) пространства $V$. Доказано, что если группа $G$ вполне приводима, то в пространстве $V$ можно ввести скалярное произведение, по отношению к которому группа $G$ будет сопряжена самой себе (обратное утверждение общеизвестно). Если $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n$ — убывающая последовательность вполне приводимых алгебраических групп линейных преобразований вещественного (комплексного) пространства $V$, то в пространстве $V$ можно ввести скалярное произведение, по отношению к которому группы $G_i$ будут одновременно сопряжены самим себе. Попутно установлены некоторые свойства группы Ли $G$ с конечным числом связных компонент. В частности, следующие: 1) группа $G$ является топологическим произведением своей произвольной максимальной компактной подгруппы $K$ и такого евклидова подпространства $E$, что $k^{-1}Ek = E$ для всех $k \in K$; 2) все максимальные компактные подгруппы группы $G$ сопряжены между собой при помощи элементов из связной компоненты единицы. М. И. Граев

**157. О некоторых подгруппах простых вещественных групп Ли. Сульдин А. В.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, **115**, № 14, 157—158

Пусть $G_k$ — комплексная унимодулярная группа, $G_b$ — ее вещественная форма, состоящая из преобразований, которые оставляют инвариантной заданную эрмитову форму $V$, $K$ — подгруппа треугольных матриц с нулями ниже главной диагонали. Изучаются классы сопряженных в $G_b$ подгрупп вида $g^{-1}Kg \cap G_b$ ($g \in G_k$). Доказывается, что каждый такой класс содержит подгруппу вида $u^{-1}Ku \cap G_b$, где $uvu^* = s$, $v$ — матрица формы $V$, а $s$ — симметрическая матрица перестановки осей. Эта подгруппа состоит из матриц вида $u^{-1}ku$, где $ksk^* = s$. Описываются также классы транзитивности подгруппы $G_b$, действующей на однородном пространстве $G_k/K$. А. Л. Онищик

**158. Понятие группы и линейного множества с дизъюнктными элементами. Сорокина В. И.,** Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, **103**, 179—207

Рассматриваются коммутативные группы и линейные множества, в которых для некоторых пар элементов определено соотношение дизъюнктности $xdy$, удовлетворяющее следующим аксиомам: I. Если $xdx$, то $x = 0$ (где $0$—нуль группы). II. Если $xdz$, то — $xdz$. III. Если $xdz$ и $ydz$, то $(x+y)dz$. IV. Если $xdy$ и $(x+y)dz$, то $xdz$.

Элемент $x_1$ называется осколком элемента $x$, если $x_1 \, d \, (x - x_1)$. Элемент $x$ называется более широким, чем элемент $y$, если для любого $z$ из $zdx$ следует, что $zdy$. Элементы $x$ и $y$ называются элементами одинаковой ширины, если для любого $z$ из $zdx$ следует, что $zdy$, и наоборот. Осколок $x^*$ элемента $x$ называется самым широким для некоторого множества осколков элемента $x$, если любой осколок из этого множества является осколком элемента $x^*$ и если из того, что элемент $y$ дизъюнктен всем осколкам элемента $x$ из этого множества, следует, что $ydx^*$. К указанным выше четырем аксиомам присоединяются еще следующие: V. Для любых недизъюнктных элементов существуют отличные от нуля осколки одинаковой ширины. VI. Для любого множества осколков каждого элемента $x$ существует самый широкий осколок $x^*$.

Для случая линейного множества требуется еще выполнение аксиомы VII. Если $xdy$ и $\lambda$ — действительное число, то $(\lambda x)dy$.

Любая полная $K$-группа является группой с дизъюнктными элементами и любое $K$-пространство — линейным множеством с дизъюнктными элементами (отношение дизъюнктности понимается в обычном смысле). С другой стороны, множество всех ступенчатых элементов $K$-пространства с единицей, являясь линейным множеством с дизъюнктными элементами, не будет $K$-пространством.

В работе устанавливаются различные свойства введенных понятий и доказывается, что множество всевозможных осколков произвольного элемента является полной булевой алгеброй (при этом $x \leqslant y$ означает, что элемент $x$ является осколком элемента $y$). А. Г. Пинскер

**159. К теории структурно упорядоченных групп. Шик Франтишек,** Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 1, 1—25 (рез. нем.)

Элементы $x$, $y$ структурно упорядоченной группы ($l$-группы) $G$ называются дизъюнктными (в записи $x\delta y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Соотношение $x\delta A$ означает, что элемент $x$ дизъюнктен к каждому элементу множества $A$. Компонентой подмножества $A$ $l$-группы $G$ называется система $A'$ всех элементов из $G$, дизъюнктных с каждым элементом множества $A$. $l$-идеал $l$-группы $G$, для которого в $G$ существует такой $l$-идеал $B$, что $A \cap B$, $A + B = G$, называется прямым фактором группы $G$.

Показано, что компоненты подмножества некоторой $l$-группы образуют полную булеву алгебру $\Gamma_0$ (частично упорядоченную отношением теоретико-множественного включения, с пересечением в качестве наибольшей нижней грани); компоненты, являющиеся $l$-идеалами, образуют полную подалгебру $\Gamma_1$ этой алгебры, а прямые факторы образуют не обязательно полную) подалгебру $\Gamma_2$ алгебры $\Gamma_1$.

Установлена равносильность следующих утверждений 1) объединение любой цепи компонент $l$-группы (

является прямым фактором; 2) группа $G$ является прямой суммой упорядоченных групп; 3) сумма любой системы компонент $l$-группы $G$ также является компонентой.

Если $l$-группа $G$ удовлетворяет этим условиям, то $\Gamma_2$ совпадает с $\Gamma_0$ и является атомной булевой алгеброй. Эти атомы неразложимы и являются упорядоченными $l$-идеалами группы $G$, которая является их прямой суммой.

Система компонент $\{K_\alpha\}$ подмножеств $l$-группы $G$ называется полной в компоненте $K_\alpha$, если $K \supset \bigcup K_\alpha$ и если из того, что $x \in K$, $x \delta \bigcup_\alpha K_\alpha$, следует, что $x = 0$.

Теория дизъюнктности для полуупорядоченных пространств ($K$-пространств) и полных $l$-групп (Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950) в некотором отношении обобщена автором на неполные $l$-группы. В частности, им перенесены на неполные $l$-группы теорема о вложении и теорема о разложении.

Если $\{I_\alpha\}$ — полная система прямых факторов $l$-группы $G$, то $G$ можно вложить в полную прямую сумму $\mathfrak{G} = \sum_\alpha I_\alpha$.

Если $\{I_\alpha\}$ — полная система попарно дизъюнктных прямых факторов $l$-группы $G$, то любой элемент $x \in G$ тогда и только тогда можно представить в виде $x = S_\alpha y_\alpha$, где $y_\alpha \in I_\alpha$, $S_\alpha y_\alpha = \bigvee_\alpha y_\alpha^+ + \bigwedge_\alpha y_\alpha^-$, когда $y_\alpha$ есть проекция элемента $x$ в $I_\alpha$. С $K$-пространств на $l$-группы перенесена также следующая теорема: $l$-группа $G$ тогда и только тогда является полной прямой суммой $l$-групп, когда она содержит полную систему попарно дизъюнктных прямых факторов $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и в ней существуют $\bigvee_\alpha x_\alpha$, $\bigwedge_\alpha x_\alpha$ для любой системы элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\beta \in I_\alpha$.

Относительно полных $l$-групп доказана следующая теорема: Пусть $\mathfrak{G}$ — полная $l$-группа, $G$ — ее $l$-подгруппа, обладающая свойством: (1) если $0 \leqslant x \in \mathfrak{G}$, то существует такое подмножество $\{a_\alpha\} \subset G$, что $a_\alpha \geq 0$ для всех $\alpha$ и $\bigvee_\alpha a_\alpha = x$, и пусть $\{\mathfrak{C}_\nu\}$ — полная система компонент подмножеств группы $G$. Тогда а) $\bigcup_\nu \mathfrak{C}_\nu$ имеет в $\mathfrak{G}$ свойство (1); б) $\Sigma_\nu \mathfrak{C}_\nu$ — плотно в $\mathfrak{G}$ (а значит, и в $G$) в топологии упорядоченности.

Известно (Everett C. J., Ulam S., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **57**, 208—216), что архимедову $l$-группу можно расширить так называемыми непустыми сечениями до условно полной $l$-группы. В реферируемой статье показано, что архимедова $l$-группа $G$ имеет в своем расширении $\overline{G}$ непустыми сечениями свойство (1) и что относительно топологии упорядоченности сумма полной системы компонент подмножеств архимедовой $l$-группы плотна во всей группе.

В заключение указаны некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы частично упорядоченная группа и направленная группа были $l$-группами. А. А. Виноградов

160. **Обобщенные груды, приводимые к обобщенным группам. Вагнер В. В.,** Науч. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т. Саратов, 1955, 668—669

Дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы в множестве всех элементов обобщенной груды $K$ можно было ввести действие умножения, относительно которого $K$ является обобщенной группой и тернарная операция $[g_1, g_2, g_3] = g_1 g_2^{-1} g_3$ совпадает с тернарной операцией, заданной в $K$. Е. С. Ляпин

161. **О канонических представлениях элементов симметрических ассоциативных систем. Воробьев Н. Н.** Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, **103**, 75—82

Пусть $M$ — произвольное множество. Рассматривается полугруппа $C$ всех таких отображений $p$ (почти тождественных подстановок) множества $M$ в себя, для которых множество $M - pM$ конечно. Число элементов этого множества называется дефектом почти тождественной подстановки $p$. Пусть $A$ — подмножество полугруппы $C$, состоящее из всех транспозиций и одной произвольной фиксированной почти тождественной подстановки с дефектом, равным единице. Среди различных конечных произведений элементов множества $A$ выделяются некоторые специальные канонические произведения и доказывается, что всякий элемент полугруппы $C$ может быть представлен в виде такого канонического произведения. Е. С. Ляпин

162. **Продолжение гомоморфизмов полугрупп. Глускин Л. М.,** Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1956, **18**, 33—39

Приводится ряд достаточных условий продолжимости произвольного гомоморфизма $\varphi$ двустороннего идеала $A$ (или подполугруппы, являющейся группой) полугруппы $G$ до некоторого гомоморфизма всей полугруппы $G$ на какую-нибудь надполугруппу полугруппы $\varphi(A)$. Например, продолжение существует, если идеал $A$ обладает единицей. В случае, когда $A$ является группой, продолжение существует, если полугруппа $G$ коммутативна. Кроме того, рассматривается связь между нормальными подсистемами произвольной полугруппы и нормальными подсистемами некоторого ее двустороннего идеала. Е. С. Ляпин

164. **Вполне простые полугруппы. Глускин Л. М.,** Уч. зап. Харковск. гос. пед. ин-та, 1956, **18**, 41—55

Пусть $S$ — вполне простая полугруппа в смысле Риса (Rees D., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, 36, № 4, 387—400). Доказано, что любой гомоморфный образ полугруппы $S$ также является вполне простой полугруппой. Показано, что любой гомоморфизм полугруппы $S$ является композицией трех сравнительно просто определяемых гомоморфизмов. Описано строение замкнутых нормальных комплексов, т. е. подмножеств, являющихся полными прообразами идемпотентов при произвольных гомоморфизмах. В частности, изучены нормальные подсистемы полугруппы $S$. Кроме того, рассматриваются гомоморфизмы полугруппы $S$ на группы и другие свойства этой полугруппы, связанные с ее гомоморфизмами. Е. С. Ляпин

164. **К теории полугрупп. I. Исэки** (Contribution to the theory of semi-groups. I. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 3, 174—175 (англ.)

Пусть $e$ — идемпотент периодической полугруппы $S$ и $K^{(e)}$ — совокупность всех элементов $x$, некоторая степень которых равна $e$. Доказано, что если в полугруппе $S$ для любых элементов $a, b \in S$ существуют такие натуральные числа $r, s, t$, что $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$, то множество $K^{(e)}$ является подполугруппой. Если полугруппа $S$ обладает только одним идемпотентом $e$, то $eSe = SeS$ является максимальной подгруппой полугруппы $S$ и ее минимальным идеалом. Е. С. Ляпин

165. **Инверсные полугруппы и полугруппы, являющиеся объединениями простых полугрупп. Круазо** (Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples. Croisot R.), Ann. scient. École norm. supér., 1953, **70**, № 4, 361—379 (франц.)

Говорят, что полугруппа $D$ подчинена условию $(m, n)$, если для любого элемента $x \in D$ существует такой элемент $u \in D$, что $x = x^m u x^n$. Всякое условие $(m, n)$ при $m + n > 1$ эквивалентно одному из условий (1), (2,0), (0,2). Полугруппа с условием (1,1) называется инверсной (РЖМат, 1956, 8625). Полугруппа с условием (0,2) называется инверсной слева.

Обобщая результаты Клиффорда (Clifford A. H., Ann. Math., 1941, 42, № 4, 1037—1049; Алгебр. реф. сб., М., И. Л., 1948, т. III, 645), автор получает ряд условий, при которых полугруппа $D$ является теоретико-множественной суммой групп, простых полугрупп или простых слева полугрупп. Так, например, полугруппа тогда и только тогда является объединением групп, когда она инверсна справа и слева. Полугруппа $D$ тогда и только тогда является объединением простых слева полугрупп (т. е. не содержащих отличных от себя левых идеалов), когда все ее левые идеалы полупросты (идеал $A$ называется полупростым, если из $x^2 \in A$ следует, что $x \in A$), т. е. когда она инверсна слева. Полугруппа тогда и только тогда является объединением простых полугрупп (т. е. не содержащих отличных от себя идеалов), когда все ее идеалы полупросты.

* Если элемент $u$ в условии (1,1) или (0,2) определен однозначно, то полугруппа является группой или соответственно левой группой (Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, Харьков, 1937). Если в условии (2,0) или (1,1) элементы $x$ и $u$ можно менять между собой местами, то полугруппа вполне проста в смысле Риса (Rees D., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, 36, 387—400). Л. М. Глускин

**166. Заметка об инверсных полугруппах. Манн, Пенроз** (A note on inverse semigroups. Munn W. D., Penrose R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 2, 396—399 (англ.)

Полугруппа $S$ называется регулярной, если для каждого элемента $a \in S$ уравнение $axa = a$ разрешимо в $S$. Элементы $z_1$ и $z_2$ называются $l$-эквивалентными ($r$-эквивалентным), если они порождают один и тот же главный левый (правый) идеал. Доказана равносильность следующих условий: 1) полугруппа $S$ является регулярной полугруппой, любые $l$-эквивалентные, так же как $r$-эквивалентные, идемпотенты которой перестановочны, 2) каждый главный односторонний идеал содержит только один идемпотент, 3) полугруппа $S$ регулярна и для каждого идемпотента $e$ уравнения $exe = e$, $xex = x$ не имеют отличного от $e$ общего решения, являющегося идемпотентом, 4) для каждого элемента $a \in S$ уравнения $axa = a$, $xax = x$ имеют единственное общее решение, 5) полугруппа $S$ инверсна, т. е. является регулярной полугруппой, все идемпотенты которой перестановочны.

Получены некоторые следствия этого утверждения. Е. С. Ляпин

**167. Инверсные полугруппы. Престон** (Inverse semi-groups. Preston G. B.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 396—403 (англ.)

Рассматриваются некоторые свойства инверсных полугрупп (реф. 166). Доказано, что любой гомоморфизм инверсных полугрупп определяется с точностью до изоморфизма системой прообразов идемпотентов. Эти прообразы сами являются инверсными полугруппами. Вводится понятие нормальных последовательностей и доказывается теорема типа теоремы Жордана — Хёльдера — Шрейера.

Следует отметить, что понятие инверсной группы эквивалентно понятию обобщенной группы, введенному В. В. Вагнером в 1952 г. Основное свойство гомоморфизмов таких полугрупп было опубликовано В. В. Вагнером в 1953 г. (реф. 169). Е. С. Ляпин

**168. Инверсные полугруппы. Престон** (Inverse semigroups. Preston Gordon Bamford), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 54—55 (англ.)

**169. Представления инверсных полугрупп. Престон** (Representations of inverse semi-groups. Preston G. B.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 411—419 (англ.)

Рассматриваются представления инверсных полугрупп (реф. 167) при помощи частичных взаимно однозначных преобразований. Доказывается, что каждая инверсная полугруппа обладает собственным представлением такого рода. В качестве множества, частичные преобразования которого используются для этой цели, оказывается возможным взять множество всех элементов самой полугруппы. Так же рассматриваются несобственные представления, когда в качестве указанного множества берется множество всех идемпотентов полугруппы. Особо рассматриваются инверсные полугруппы, в которых для каждого ненулевого идемпотента $e$ существует такой ненулевой идемпотент $e'$, что $ee' = e'$, причем равенство $e'e'' = e''$ имеет место лишь тогда, когда $e'' = e'$ или $e''$ есть нуль полугруппы.

Как отмечает и сам автор, теорема о представлении инверсной полугруппы частичными преобразованиями была ранее опубликована В. В. Вагнером (Докл. АН СССР, 1952, 84, 1119—1122). Е. С. Ляпин

**170. Инверсные полугруппы с минимальными правыми идеалами. Престон** (Inverse semi-groups with minimal right ideals. Preston G. B.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 404—411 (англ.)

Правый идеал $R$ полугруппы $S$ называется минимальным, если он не содержит никакого правого идеала, отличного от $R$ и не являющегося нулевым идеалом, т. е. идеалом, состоящим из одного такого элемента $0$ полугруппы $S$, что $0x = x0 = 0$ для всякого $x \in S$. Рассматриваются минимальные правые идеалы инверсных полугрупп (реф. 169). Доказано, например, что из существования минимального правого идеала следует существование минимального левого идеала. Если полугруппа $S$ не имеет нуля, то существует не более одного минимального правого идеала, и т. д. Для инверсных полугрупп рассматриваются свойства двусторонних идеалов, являющихся вполне простыми полугруппами в смысле Риса (Rees D., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, 36, 387—400). Е. С. Ляпин

**171. К теории полугрупп. Тьеррен** (Sur la théorie des demi-groupes. Thierrin Gabriel), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 3, 211—223 (франц.)

Как и в ряде предыдущих своих работ (РЖМат, 1956, 240, 2815), автор получает в терминах эквивалентностей несколько необходимых и достаточных условий, при которых полугруппа является группой или гомогруппой (РЖМат, 1953, 117). Например, доказано, что полугруппа $D$ с сокращением тогда и только тогда является группой, когда в $D$ любая регулярная справа (слева) эквивалентность $R$ является главной справа (соответственно слева) эквивалентностью, соответствующей некоторому классу $H \pmod R$ (РЖМат, 1955, 1115). С другой стороны, если всякая регулярная справа (слева) эквивалентность $R$ в полугруппе $D$ является главной справа (соответственно слева) эквивалентностью, соответствующей некоторому классу $H \pmod R$, то либо $D$ является группой, либо $D = \{0, v\}$, $v^2 = 0v = v0 = 0^2 = 0$.

Полугруппа $D$ называется $q$-простой ($q$-простой справа), если полугруппа $D^2$ проста (соответственно проста справа). Доказаны некоторые свойства $q$-простых полугрупп, как, например, следующее: полугруппа $D$ тогда и только тогда $q$-проста, когда она не содержит собственных замкнутых (РЖМат, 1955, 4908) идеалов. Любая полугруппа $D$, для которой $xD = x^2D$ при любом $x \in D$, является объединением непересекающихся $q$-простых справа полугрупп. Любая полугруппа $D$, для которой $DxD = Dx^2D$ при любом $x \in D$, является полуструктурой (РЖМат, 1956, 1106) полугрупп $S_i$, для которых полугруппы $S_i^3$ просты. Доказан также ряд теорем о разложении полугруппы в объединение

непересекающихся подполугрупп с теми или иными свойствами. Л. М. Глускин

**172. Полугруппы непрерывных деформаций. Глускин Л. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 111—112

**173. Противоречащие примеры к проблеме Уоллеса. Кимура, Тамура** (Counter examples to Wallace's problem. Kimura Naoki, Tamura Takayuki), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 8, 499—500 (англ.)

Приведены примеры компактных мобов с единственной левой единицей, не являющейся правой. Е. С. Ляпин

**174. О вложении метрических полугрупп в их полугруппы частных. Шифердеккер** (Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen. Schieferdecker Eberhard), Math. Z., 1955, **62**, № 4, 443—468 (нем.)

Пусть $\mathfrak{H}$ — полугруппа и $\mathfrak{m}$ — такая ее подполугруппа, что для любого элемента $a \in H$ из равенства $aa = ab$, а также из равенства $aa = ba$, где $a, b \in H$, следует $a = b$. Тогда, как показал Мурата (Murata K., Osaka Math. J., 1950, **2**, 1—5), можно определить понятие полугруппы $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{m})$ левых частных полугруппы $H$ относительно подполугруппы $\mathfrak{m}$.

Автором найдены необходимые и достаточные условия, при которых некоторую метрику на $\mathfrak{H}$, инвариантную относительно умножения слева на элементы из $\mathfrak{m}$, можно продолжить до инвариантной (в том же смысле) метрики на $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{m})$. М. И. Граев

**175 К. О главных рядах некоторых конечных групп. Крулль** (Über die Hauptreihen gewisser endlicher Gruppen. Krull Wolfgang. Salamanca, Univ. Salamanca, 1954, 12 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 12, 857 (нем.)

**176 К. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли» Высшей нормальной школы** (Théorie des algèbras de Lie. Topologie des groupes de Lie. Séminaire «Sophus Lie», Ecole normale supérieure), 1954/1955, **1**, № 24, 1—8 (франц.)

Впервые дается систематическое изложение теории алгебр Ли и некоторых вопросов теории групп Ли в целом. Хотя большая часть результатов, содержащихся в сборнике, является классическими теоремами Э. Картана, Г. Вейля, А. И. Мальцева и др., но предлагаемые авторами доказательства этих теорем, как правило, основаны на новых методах, разработанных Харишем-Чандрой, Шевалле, Дынкиным, Ивасавой и др. При этом классические результаты дополняются в различных направлениях.

Основная часть сборника относится к алгебрам Ли над полем без характеристики. С каждой алгеброй Ли $\mathfrak{G}$ связывается некоторая ассоциативная алгебра с единицей $U(\mathfrak{G})$, которая называется обертывающей алгеброй алгебры $\mathfrak{G}$. При помощи понятия обертывающей алгебры строится теория когомологий алгебры $\mathfrak{G}$ над произвольным $\mathfrak{G}$-модулем $M$. Аппарат обертывающих алгебр и когомологий играет в дальнейшем основную роль. Из приложений обертывающих алгебр отметим доказательство теоремы Адо о том, что всякая алгебра Ли допускает точное конечномерное линейное представление (теорема доказывается для алгебр над полем произвольной характеристики).

Изложение теории полупростых алгебр Ли начинается с вывода известного критерия Картана, который доказывается при помощи теории реплик. С помощью теории когомологий устанавливается, что алгебра $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда полупроста, когда любое ее линейное представление вполне приводимо. Здесь же изучается класс редуктивных алгебр Ли, т. е. алгебр, присоединенное представление которых вполне приводимо.

Цикл сообщений посвящен алгебрам Ли над алгебраически замкнутым полем без характеристики. Для такой алгебры $\mathfrak{G}$ вводится понятие картановской (регулярной разрешимой) подалгебры и строится разложение алгебры на корневые подпространства. Доказывается, что любые две картановские подалгебры переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$. Затем эта теория применяется к изучению структуры полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем. Методом простых корней Е. Б. Дынкина производится классификация простых алгебр. Излагается также ряд других вопросов теории полупростых алгебр: вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли, автоморфизмы и группа Вейля, линейные представления (причем рассматриваются и бесконечномерные представления). Большое внимание уделено теории характеров (линейных форм на алгебре $U(\mathfrak{G})$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям). Каждому конечномерному представлению алгебры $\mathfrak{G}$ (и некоторым бесконечномерным) соответствует определенный характер; если представление конечномерно и неприводимо, то этот характер определяет его с точностью до эквивалентности. Доказывается теорема Хариш-Чандры о том, что любой характер является характером некоторого линейного представления, и выводится формула, выражающая его через старший вес представления. Эта формула аналогична известной формуле Вейля для характеров линейных представлений полупростой компактной группы Ли. Затем выводится и формула Вейля. Ее вывод основан на применявшемся Вейлем методе интегрирования по группе, который обосновывается здесь при помощи теории распределений.

Излагается теория радикалов алгебр Ли и доказывается теорема Леви — Мальцева о том, что любая алгебра Ли разлагается в прямую сумму полупростой подалгебры и разрешимого идеала (радикала).

Приводятся два доказательства теоремы о том, что всякой вещественной алгебре Ли соответствует некоторая группа Ли. В первом из них теорема сначала доказывается для разрешимых и полупростых алгебр, а затем используется разложение Леви — Мальцева. Второе основано на формуле Кемпбелла — Хаусдорфа и носит локальный характер. Среди затронутых вопросов топологии групп Ли основное место занимает доказательство того, что всякая группа Ли аналитически гомеоморфна прямому произведению компактной группы на векторное пространство, использующее теорему Леви — Мальцева и теорию вещественных форм полупростых комплексных алгебр.

Изложены основные результаты Вейля о компактных группах Ли — теоремы о конечности фундаментальной группы полупростой компактной группы Ли и о сопряженности максимальных торов компактной группы Ли. Приведено несколько различных доказательств этих теорем. В заключение доказывается теорема Бореля — Серра о том, что всякая абелева подгруппа компактной группы Ли содержится в нормализаторе некоторого максимального тора. А. Л. Онищик

**177 Д. Коэффициенты Фурье инвариантов $j(\sqrt{2}; \tau)$ и $j(\sqrt{3}; \tau)$. Рали** (The Fourier coefficients of the invariants $j(\sqrt{2}; \tau)$ and $j(\sqrt{3}; \tau)$. Raleigh John. Doc. diss., Univ. Pennsylvania, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **40**, № 10, 1866 (англ.)

Рассматриваются две дискретные группы дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости, одна с образующими $S(\tau) = \tau + \sqrt{2}$, $T(\tau) = -1/\tau$, другая с образующими $S(\tau) = \tau + \sqrt{3}$, $T(\tau) = -1/\tau$. Пусть

$j(\sqrt{2}\,\tau) = x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x = \exp(2\pi i\tau/\sqrt{2})$, $j(\sqrt{3}\,\tau) = x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x = \exp(2\pi i\tau/\sqrt{3})$ — инварианты этих групп. Сообщаются формулы для вычисления коэффициентов $a_n$ и $c_n$. И. И. Пятецкий-Шапиро

178 Д. **Некоторые простые неразрешимые проблемы теории групп, связанные с проблемой слов. Б у н** (Several simple, unsolvable problems of group theory related to the word problem. B o o n e W i l l i a m W e r n e r.— Doct. diss., Princeton Univ., 1952), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 6, 1078—1079 (англ.)

179 Д. **К теории характеров групп. Ф е й т** (Topics in the theory of group characters. F e i t W a l t e r, Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 4, 597—598 (англ.)

180 Д. **Инвариантные усреднения и меры на полугруппах. Ч е й н и** (Invariant means and measures on semigroups. C h a n e y T h e l m a M a e.— Doct. diss., Univ. Washington, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 6, 1079 (англ.)

## ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

181. **Проблема расширения полей Галуа и разложение простейших алгебр. Б е й е р** (Erweiterungsproblem galoisscher Körper und Zerfall einfacher Algebren. B e y e r G u d r u n), J. reine und angew. Math., 1955, **195**, № 3—4, 215—220 (нем.)

Пусть $\Omega$ — нормальное конечное расширение поля $\Omega_0$ с группой Галуа $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. В предположении, что порядок группы $\mathfrak{R}$ не делится на характеристику поля $\Omega$, исследуется вопрос о существовании алгебры $K$, являющейся алгеброй Галуа над полями $\Omega_0$ и $\Omega$ с группами Галуа $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{R}$ соответственно. Этот вопрос тесно связан с изучением алгебры $G$ над полем $\Omega$, элементами которой являются линейные комбинации $\sum_{S\in\mathfrak{G}} Sa_S$, $a_S \in \Omega$. Умножение элементов алгебры $G$ на элементы поля $\Omega$ определяется формулой $aS = Sa^s (a\in\Omega;\ s \equiv S \pmod{\mathfrak{R}})$. Групповая алгебра $N$ группы $\mathfrak{R}$ над полем $\Omega$ является подалгеброй алгебры $G$.

Оказывается, что элементы $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_t$ алгебры $G$, получающиеся в результате сложения минимальных идемпотентов центра алгебры $N$, переходящих друг в друга под действием автоморфизмов $\varphi_S$, определяемых формулой $\varphi_S(x) = S^{-1} \times S (x\in N;\ S\in\mathfrak{G})$, являются идемпотентами центра алгебры $G$. Эти идемпотенты определяют разложения в прямую сумму: $G = G\tilde{e}_1 + \ldots + G\tilde{e}_t$; $N = N\tilde{e}_1 + \ldots + N\tilde{e}_t$. Пусть $C_i$ — центр алгебры $N\tilde{e}_i$. Доказано, что $C_i = Z_i \times \Omega\tilde{e}_i$, где $Z_i$ — совокупность элементов из $C_i$, выдерживающих все автоморфизмы $\varphi_S$. Подалгебра $N\tilde{e}_i$ является алгеброй Галуа с группой $\mathfrak{g}$ над полем $Z_i$, а подалгебра $G\tilde{e}_i$ — скрещенным произведением алгебры $N\tilde{e}_i$ с ее группой Галуа $\mathfrak{g}$. Каждая алгебра $G\tilde{e}_i$ является простой алгеброй с центром $Z_i$. Пусть $\{R_s\}$ $(s\in\mathfrak{g})$ — система представителей смежных классов группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathfrak{R}$ и пусть $R_s R_t = R_{st} Q_{s,t}$ $(Q_{s,t}\in\mathfrak{R})$. Оказывается, что элементы $r_s = R_s\tilde{e}_i$ образуют относительный базис алгебры $G\tilde{e}_i$ над алгеброй $N\tilde{e}_i$, причем имеют место формулы

$$r_s r_t = r_{st} q_{s,t}\ (q_{s,t} = \tilde{e}_i Q_{s,t}), \quad a r_s = r_s a^{R_s}\ (a\in N\tilde{e}_i).$$

Эти результаты были получены Хассе (Hasse H., Math. Nachr., 1948, **1**, 40—61) в случае, когда группа $\mathfrak{R}$ абелева, а поле $\Omega$ содержит значения абсолютно неприводимых характеров группы $\mathfrak{R}$.

Как показали Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев (Матем. сб., 1944, **15**, 243—248), для существования алгебры $K$ необходимо, чтобы в алгебре $N$ существовали регулярные элементы $B_s$ $(s\in\mathfrak{g})$, для которых

$$B_{st} Q_{s,t} = B_t B_s^{R_t} \quad (s, t\in\mathfrak{g}). \tag{1}$$

Используя изложенные выше результаты, автор дает новое доказательство следующей теоремы единственности, полученной в его предыдущей заметке (РЖМат, 1956, 6433): Если $B_s$ и $B'_s$ — два решения системы уравнений (1), то существует такой регулярный элемент $A\in N$, что $AB'_s = B_s A^{R_s}$. С. Д. Берман

182. **Определение степени некоторых алгебраических чисел. М о с т о в с к и й** (Wyznaczanie stopni niektórych liczb algebraicznych. M o s t o w s k i A.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, Ser. 1, **1**, № 2, 239—252 (польск., рез. русс., англ.)

Изложение некоторых понятий и теорем теории Галуа, основывающееся на следующей теореме: Пусть $c_i$ — рациональные, $a_{ij}$ — целые числа и $D_i = \sum_{j=1}^{n} p_j^{a_{ij}}$, где $p_j$ — различные простые числа. Тогда $\sum_{i=1}^{k} c_i \sqrt[p]{D_i}$ является алгебраическим числом степени $p^\alpha$, где $\alpha$ — ранг матрицы $\|a_{ij}\|$ в поле вычетов по модулю $p$. J. Łoś

183. **Теория идеалов в поле Штимке. Н а к а н о** (Idealtheorie im Stiemkeschen Körper. N a k a n o N o b o r u), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A18**, № 3, 271—287 (нем.)

Бесконечное поле алгебраических чисел $\mathfrak{R}$, являющееся объединением возрастающей последовательности конечных алгебраических расширений $\mathfrak{R}_\nu$ поля рациональных чисел, называется полем Штимке, если каждый собственный идеал $\mathfrak{a}$ главного порядка $\mathfrak{O}$ поля $\mathfrak{R}$ обладает лишь конечным числом простых делителей. Для того чтобы бесконечное поле алгебраических чисел $\mathfrak{R}$ было полем Штимке, необходимо и достаточно, чтобы для каждого натурального простого числа $p$ число множителей в разложении $p\mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu_1}^{e_{\nu_1}} \mathfrak{p}_{\nu_2}^{e_{\nu_2}} \ldots \mathfrak{p}_{\nu_{m_\nu}}^{e_{\nu_{m_\nu}}}$, где $(\mathfrak{p}_{\nu_i}, \mathfrak{p}_{\nu_j}) = \mathfrak{O}_\nu$, если $i \neq j$, стабилизировалось, начиная с некоторого $\nu$. Изучаются некоторые свойства идеалов главного порядка $\mathfrak{O}$ поля Штимке $\mathfrak{R}$. Каждый собственный идеал $\mathfrak{a}$ главного порядка $\mathfrak{O}$ однозначно разлагается в произведение конечного числа примарных идеалов: $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_t$; примарные идеалы $\mathfrak{q}_i$ называются примарными компонентами или примарными множителями идеала $\mathfrak{a}$. Идеал $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда обладает конечным базисом, когда каждая примарная компонента $\mathfrak{q}_i$ идеала $\mathfrak{a}$ представляет собой примарный идеал первого или второго рода, т. е. удовлетворяет условию $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал, к которому принадлежит примарный идеал $\mathfrak{q}$. Если $\mathfrak{a}$ — идеал, обладающий конечным базисом, и $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, то равенство $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — некоторый идеал, имеет место тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{b}$ обладает конечным базисом. Произвольный идеал $\mathfrak{a}$ главного порядка $\mathfrak{O}$ либо идемпотентен, либо удовлетворяет условию $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0)$. Если для идеала $\mathfrak{b}$, содержащего идеал $\mathfrak{a} \neq (0)$, справедливо по крайней мере одно из следующих двух равенств: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$

или $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, то идеал $\mathfrak{b}$ идемпотентен (обратные утверждения не верны). Если $\mathfrak{h}$ — радикал собственного идеала $\mathfrak{a}$, то: а) равенство $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{h}$ имеет место тогда и только тогда, когда каждый примарный множитель идеала $\mathfrak{a}$ является примарным идеалом третьего или четвертого рода; равенство $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{h}$ имеет место тогда и только тогда, когда каждый примарный множитель идеала $\mathfrak{a}$ является примарным идеалом второго или четвертого рода.

В последнем параграфе доказывается следующая теорема: Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — произвольные идеалы главного порядка $\mathfrak{O}$ поля Штимке $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{q}_{s+1}^{(\mathfrak{b})}, \mathfrak{q}_{s+2}^{(\mathfrak{b})} \dots \mathfrak{q}_r^{(\mathfrak{b})}$ — все примарные компоненты идеала $\mathfrak{b}$, удовлетворяющие условию $(\mathfrak{q}_j^{(\mathfrak{b})}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{O}$ и $\mathfrak{q}_j^{(\mathfrak{a})} = \mathfrak{p}_i$ для каждого $i = t + 1, \dots, s$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1^{(\mathfrak{b})} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t^{(\mathfrak{b})} \cap \mathfrak{p}_{t+1} \cap \dots \dots \cap \mathfrak{p}_s$. Эта теорема является аналогом одной из теорем Зариского, доказанной для нетеровых колец с единицей. В заключение доказывается, что если $\mathfrak{b} = \mathfrak{O}_1^{(\mathfrak{b})} \cap \dots \dots \cap \mathfrak{q}_s^{(\mathfrak{b})} \cap \mathfrak{q}_{s+1}^{(\mathfrak{b})} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r^{(\mathfrak{b})}$ — произвольный собственный идеал и $\bigcap_\sigma \mathfrak{a}_\sigma$ — пересечение всех собственных идеалов $\mathfrak{a}_\sigma$, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{a}_\sigma \subseteq \mathfrak{p}_i$ для $i = 1, 2, \dots, s$ и $\mathfrak{a}_\sigma \subseteq \mathfrak{p}_j$ для $j = s + 1, \dots, r$, то $\bigcap_\sigma (\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1^{(\mathfrak{b})} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s^{(\mathfrak{b})}$. Е. Г. Шульгейфер

**184. Об абсолютной группе классов абелевых полей. Фрёлих** (On the absolute class-group of abelian fields. Fröhlich A.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 2, № 114, 211—217 (англ.)

Абелево поле с $l$-группой Галуа над полем рациональных чисел называется полным, если оно не имеет неразветвленных абсолютно-абелевых расширений с $l$-группой Галуа. Дается описание группы Галуа максимального неразветвленного центрального расширения с $l$-группой Галуа данного полного абелева поля. Доказательство основывается на другой работе автора (РЖМат, 1956, 6432). Устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы число классов идеалов (в узком смысле) абсолютно абелева поля с $l$-группой Галуа делилось на $l$. Из этого условия следует, в частности, что если абелево поле с $l$-группой Галуа имеет более трех критических простых чисел, то число классов идеалов [illegible]ится на $l$.

[illegible] К. Фаддеев

**185. Замечание о числе классов абелевых полей. Фрёлих** (A remark on the class number of abelian fields. Fröhlich A.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 498 (англ.)

Формулируются два следствия результатов предыдущей работы автора (реф. 184). Б. М. Уразбаев

**186. Теория Галуа и арифметика числовых полей. Шафаревич И. Р.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 8

**187. О кольцах с тождественными соотношениями. Амицур** (On rings with identities. Amitsur S. A.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 464—470 (англ.)

Пусть $S$ — операторное ассоциативное кольцо, удовлетворяющее некоторому тождественному соотношению. В предположении, что кольцо операторов является областью целостности, доказаны следующие утверждения: 1) если в кольце $S$ нет делителей нуля, то оно вложимо в некоторое тело $S_1$, имеющее конечный ранг над своим центром; 2) фактор-кольцо $S/N_r$, где $N_r$ — совокупность всех элементов $a$, для которых правый идеал $aS$ является ниль-идеалом ограниченного индекса, вложимо в матричное кольцо $C_n$ над некоторым коммутативным кольцом $C$. При этом можно предполагать, что как тело $S_1$, так и кольцо $C_n$ удовлетворяют всем тождественным соотношениям, которым удовлетворяет кольцо $S$. Приведены некоторые простые следствия, относящиеся к конкретным тождественным соотношениям. А. И. Ширшов

**188. $T$-идеалы свободного кольца. Амицур** (The $T$-ideals of the free ring. Amitsur S. A.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 470—475 (англ.)

Доказано, что в полной матричной алгебре $\Sigma_n$ под бесконечным полем $\Sigma$ выполнение тождественного соотношения вида $f \cdot g = 0$ влечет выполнение по крайней мере одного из тождественных соотношений: $f = 0$, $g = 0$. Для произвольной алгебры над полем $\Sigma$ доказано, что соотношение $f \cdot g = 0$ влечет одно из соотношений: $f^m = 0$, $g^m = 0$, $m$ — некоторое натуральное число.

В качестве приложения получено следующее предложение: Если соотношение $f = 0$ выполняется во всех тех алгебрах $\Sigma_n$, в которых выполняются соотношения $f_\nu = 0$, то для некоторого натурального числа $m$ соотношение $f^m = 0$ является следствием соотношений $f_\nu = 0$.

В случае конечности множества $\{f_\nu\}$ проверка соответствующих условий осуществляется в конечное число шагов. Рассмотрены примеры. А. И. Ширшов

**189. Кольца, сравнения, идеалы. Дюбрей** (Anneaux, congruences, idéaux. Dubreil Paul), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 177, 377—387 (франц.)

Определяются и иллюстрируются примерами основные понятия теории колец.

**190. Представления первичных колец подпрямыми суммами. Мак-Кой** (Subdrect sum representations of prime rings. McCoy Neal H.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 3, 357—363 (англ.)

Основные результаты Крулля об областях целостности (Krull W., Math. Z., 1950, **52**, 810—826) переносятся на первичные кольца, т. е. на кольца $R$, в которых из равенства $AB = (0)$, где $A$ и $B$ — идеалы кольца $R$, следует, что либо $A = (0)$, либо $B = (0)$. Коммутативное первичное кольцо есть область целостности. Пусть $N(R)$ — число элементов первичного кольца $R$. Доказывается, что если первичное кольцо $R$ изоморфно подпрямой сумме первичных колец $R_\alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{A}$) и числа $N(R_\alpha)$ ограничены в совокупности, то $N(R) < \infty$. Если счетное первичное кольцо $R$ с бесконечным центром имеет собственное представление в виде подпрямой суммы счетного числа первичных колец $R_i (i = 1, 2, \dots)$, то кольцо многочленов $R[x]$ имеет собственное представление в виде подпрямой суммы тех же первичных колец. Пусть $R$ — счетное первичное кольцо с конечным ненулевым центром, имеющее собственное представление в виде счетного числа первичных колец $R_i$ ($i = 1, 2, \dots$), и пусть $p_i$ — такие простые идеалы кольца $R$, что $R/p_i \cong R_i$. Тогда: 1) Если существует такая последовательность $i_1 < i_2 < \dots < i_k < \dots$, что $\bigcap_k p_{i_k} = 0$ и $N(R_{ik}) > k$ ($k = 1, 2, \dots$), то кольцо $R[x]$ имеет собственное представление в виде подпрямой суммы тех же первичных колец $R_i (i = 1, 2, \dots)$; 2) Если кольцо $R[x]$ не изоморфно подпрямой сумме колец $R_i$ ($i = 1, 2, \dots$), то существует такая последовательность $i_1 < i_2 < \dots < i_k < \dots$, что $\bigcap_k P_{ik} = 0$ и числа $N(R_{ik})$ ограничены в совокупности.

В. А. Андрунакиевич

**191. Об однозначном представлении идеалов в виде пересечения слабо примарных идеалов. Мори** (Über die eindeutige Darstellung der Ideale als Durch-

schnitt schwacher Primärideale. Mori Shinziro), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 2, 83—85 (нем.)

Доказывается, что в коммутативном кольце $\mathfrak{R}$ с единицей, в котором каждый идеал разлагается в пересечение примарных идеалов, несократимое разложение тогда и только тогда будет однозначным, когда в кольце $\mathfrak{R}$ выполняется следующее условие: если $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, где $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ — простые идеалы, то $\mathfrak{p}'\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ для любого идеала $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. В качестве вспомогательной теоремы доказывается следующее утверждение: Если идеал $\mathfrak{a}$ однозначно разлагается в пересечение примарных идеалов: $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$, то все $\mathfrak{q}_i$ являются изолированными примарными компонентами идеала $\mathfrak{a}$. Е. Г. Шульгейфер

**192. Замечание к теории Галуа колец с делением бесконечной степени. Нагахара, Томинага** (A note on Galois theory of division rings of infinite degree. Nagahara Takasi, Tominaga Hisao), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 655—658 (англ.)

Пусть $G$ — группа автоморфизмов тела $D$, $L$ — подтело $G$-инвариантных элементов, $V$ — централизатор тела $L$ в $D$ и $C$ — центр тела $D$. Предполагается, что группа $G$ содержит все автоморфизмы тела $D$, относительно которых элементы подтела $L$ инвариантны, и что множество $G$-образов любого элемента тела $D$ конечно. Тогда доказывается, что $V = C$, если центр бесконечен, а если $V \neq C$, то тело $V$ конечно.

З. И. Боревич

**193. Оценки, связанные с идеалами. Рис** (Valuations associated with ideals. Rees D.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 22, 161—174 (англ.)

Пусть $A$ — некоторая нетерова область целостности и $\mathfrak{a}$ — ее идеал. Говорят, что идеал удовлетворяет условию (B), если существует такое целое неотрицательное число $t$, что $\overline{\mathfrak{a}^{s+t+1}} \cap \mathfrak{a}^s \subseteq \mathfrak{a}^{s+1}$ для всех достаточно больших значений $s$; через $\overline{\mathfrak{b}}$, где $\mathfrak{b}$ — идеал, обозначается целозамыкание идеала $\mathfrak{b}$. Пусть $v_{\mathfrak{a}}(x)$ — псевдооценка кольца $A$ (РЖМат, 1956, 7187), определяемая следующим образом: $v_{\mathfrak{a}}(x) = n$, если $x \in \mathfrak{a}^n$ и $x \notin \mathfrak{a}^{n+1}$, $v_{\mathfrak{a}}(0) = \infty$. Доказано, что если идеал $\mathfrak{a}$ области целостности $A$ удовлетворяет условию (B), то

$$v_{\mathfrak{a}}(x) \leqslant \min_{i=1,\ldots,k} e_i^{-1} v_i(x) \leqslant v_{\mathfrak{a}}(x) + t(\mathfrak{a}), \qquad (1)$$

где $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ — некоторые оценки, определенные на поле частных $F$ кольца $A$ и принимающие лишь целочисленные значения, а $e_1, \ldots, e_k$ и $t(\mathfrak{a})$ — натуральные числа, не зависящие от $x$. Оценки $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ определяются идеалом $\mathfrak{a}$ однозначно и называются оценками, связанными с идеалом $\mathfrak{a}$.

В случае, когда идеал $\mathfrak{a}$ содержит хотя бы один внешний элемент $u$ первой степени, соотношение (1) доказывается следующим образом. Пусть $R = A[u_1/u, \ldots, u_m/u]$, где $u_1, \ldots, u_m$ — некоторый базис идеала $\mathfrak{a}$. Собственный главный идеал $uR = \mathfrak{a}R$ кольца $R$ обладает тем свойством, что $u^n R \cap A = \mathfrak{a}^n$ для всех $n$, начиная с некоторого. Тем самым доказательство соотношений (1) сводится к случаю главного идеала $uR$ кольца $R$. Расширим кольцо $R$ до кольца $R_u$, состоящего из элементов вида $u^{-s}y$, $y \in R$, целых относительно $R$. Оказывается, условие (B) эквивалентно следующему условию (A): $R_u$ является конечным $R$-модулем. Идеал $uR_u$ кольца $R_u$ является несмешанным идеалом первого ранга, все степени $u^n R_u$ которого целозамкнуты. Для этого идеала весьма просто доказывается, что $v_u R_u(x) = \min_{i=1,\ldots,k} e_i^{-1} v_i(x)$, чем соотношение (1) по существу и доказано. Случай, когда идеал $\mathfrak{a}$ не содержит внешних элементов первой степени, сводится к уже рассмотренному.

Если псевдооценка $v_{\mathfrak{a}}(x)$ удовлетворяет соотношениям (1), то для регулярной псевдооценки $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x)$, соответствующей псевдооценке $v_{\mathfrak{a}}(x)$, будет справедливо равенство

$$\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \min_{i=1,\ldots,k} e_i^{-1} v_i(x); \qquad (2)$$

в упомянутой выше работе автора (РЖМат, 1956, 7187) справедливость равенства (2) была доказана для случая, когда $\mathfrak{a}$ является нульмерным идеалом некоторого равнохарактеристического локального кольца.

Приведены примеры нетеровых областей целостности, каждый идеал которых удовлетворяет условию (B); в частности, этому условию удовлетворяют алгебры с единицей без делителей нуля и с конечным числом образующих, а также геометрические локальные и полулокальные области целостности. Если идеал $\mathfrak{a}$ нетеровой области целостности удовлетворяет условию (B), то этому же условию удовлетворяет и идеал $\mathfrak{a}_S = \mathfrak{a}A_S$ кольца отношений $A_S$, где $S$ — любое мультипликативно замкнутое множество элементов кольца $A$, не содержащее нуля.

С помощью основной теоремы доказываются, в частности, следующие результаты:

1. Если для идеала $\mathfrak{a}$ нетеровой области целостности $A$ имеет место соотношение (1), то $\mathfrak{a}$-адическое пополнение $\bar{A}_{\mathfrak{a}}$ кольца $A$ (т. е. пополнение кольца $A$ в топологии, фундаментальную систему окрестностей которой составляют степени идеала $\mathfrak{a}$) не содержит нильпотентных элементов. В частности геометрическая локальная область целостности $Q$ аналитически неразветвляема.

2. Центр $\mathfrak{p}_i$ любой оценки $v_i(x)$, связанной с идеалом $\mathfrak{a}$ (т. е. простой идеал, состоящий из тех и только тех элементов $x \in A$, для которых $v_i(x) > 0$), содержит радикал идеала $\mathfrak{a}$. Произвольный изолированный простой идеал $\mathfrak{p}$, соответствующий идеалу $\mathfrak{a}$, является центром по крайней мере одной оценки $v_i(x)$, связанной с идеалом $\mathfrak{a}$; такие оценки $v_i(x)$ называются изолированными оценками, связанными с идеалом $\mathfrak{a}$. Если идеал $\mathfrak{a}$ несмешанный, то каждая оценка $v_i(x)$, связанная с $\mathfrak{a}$, является изолированной оценкой. Если $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ — все оценки, связанные с идеалом $\mathfrak{a}$, и $S$ — мультипликативно замкнутое множество элементов кольца $A$, не содержащее нуля, то оценками, связанными с идеалом $\mathfrak{a}_S$ кольца отношений $A_S$, будут те и только те из оценок $v_i(x)$, центры которых не пересекаются с $S$.

3. Пусть $A$ — алгебра с единицей и без делителей нуля, имеющая конечное число образующих над полем $K$. Тогда размерность над $K$ произвольной оценки $v_i(x)$, связанной с некоторым идеалом $\mathfrak{a}$ алгебры $A$, на единицу меньше размерности алгебры $A$.

Е. Г. Шульгейфер

**194. Оценки, связанные с идеалами (II). Рис** (Valuations associated with ideals (II). Rees D.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 221—228 (англ.)

Часть I см. реф. 193 Будем говорить, что в нетеровом кольце $A$ для идеала $\mathfrak{a}$ справедлива теорема об оценке, если регулярную псевдооценку $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x)$, соответствующую псевдооценке $v_{\mathfrak{a}}(x)$, можно представить в виде

$$\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \min_{i=1,\ldots,k} e_i^{-1} v_i(x),$$

где $e_1, \ldots, e_k$ — натуральные числа, а $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ — оценки, определенные на кольце $A$, областью значений которых являются неотрицательные целые числа и $\infty$, причем множество элементов $x \in A$, удовлетворяющих для некоторого $i$ условию $v_i(x) = \infty$, составляет минимальный простой идеал, соответствующий нулевому идеалу. Несколько усовершенствуя метод доказательства, используемый в первой части работы, автор доказывает, что теорема об оценке справедлива для любого идеала $\mathfrak{a}$ произвольного нетерового кольца $A$. Отметим также два результата, доказанных в виде лемм.

1. Теорема об оценках справедлива для всех главных идеалов области целостности $A$ (не обязательно нетеровой) если целозамыкание $\bar{A}$ кольца $A$ в его поле частных $F$ имеет конечный дискретный главный порядок (подкольцо $B$ поля $F$ имеет конечный дискретный главный порядок, если существует совокупность $\Sigma$ таких целозначных оценок $v_\sigma(x)$ поля $F$, что: а) $v_\sigma(x) \geqslant 0$ для всех $v_\sigma \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $x \in B$; б) для любого ненулевого элемента $x \in F$ существует лишь конечное множество индексов $\sigma$, для которых $v_\sigma(x) \neq 0$).

2. Пусть $A$ — нетерово кольцо и $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал кольца $A$. Тогда множество элементов кольца $A$, каждый из которых связан по крайней мере с одной степенью $\mathfrak{a}^n$ идеала $\mathfrak{a}$ (элемент $a$ называется связанным с некоторым идеалом $\mathfrak{a}$, если существует такой элемент $b$, что $b \notin \mathfrak{a}$, а $ab \in \mathfrak{a}$), является теоретико-множественным объединением конечного числа простых идеалов

Е. Г. Шульгейфер

**195. Оценки, связанные с локальным кольцом (II).** Рис (Valuations associated with a local ring (II). Rees D.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 228—235 (англ.)

Продолжение предыдущей работы см. РЖМат, 1956, 7187.

Будем говорить, что в нетеровом кольце $A$ для идеала $\mathfrak{a}$ справедлива усиленная теорема об оценке, если для идеала $\mathfrak{a}$ справедлива теорема об оценке (реф. 194) и для псевдооценки $v_{\mathfrak{a}}(x)$ и соответствующей ей регулярной псевдооценки $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x)$ выполняется условие $0 \leqslant \bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) - v_{\mathfrak{a}}(x) \leqslant t(\mathfrak{a})$ для любых отличных от нуля элементов $x \in A$, где $t(\mathfrak{a})$ — некоторая константа, зависящая лишь от идеала $\mathfrak{a}$. В случае, когда $A$ — нетерова область целостности, усиленная теорема об оценке (для данного идеала $\mathfrak{a}$) равносильна соотношению (1), указанному в реф. 193.

Доказаны следующие утверждения:

1. Усиленная теорема об оценке справедлива для любого идеала $\mathfrak{a}$ локального кольца $Q$, пополнение $\bar{Q}$ которого не содержит нильпотентных элементов.

2. В нетеровой области целостности $A$ тогда и только тогда для каждого идеала $\mathfrak{a}$ справедлива усиленная теорема об оценке, когда для любого максимального простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца $A$ пополнение локального кольца $A_{\mathfrak{p}}$ не содержит нильпотентных элементов.

Е. Г. Шульгейфер

**196. К теории компактных колец.** Нумакура (Theory of compact rings. Numakura Katsumi), Math. J. Okayama Univ., 1955, 5, № 1, 79—93 (англ.)

Вначале для произвольных ассоциативных колец доказываются несколько лемм, среди которых отметим следующую: Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал (под идеалом везде понимается двусторонний идеал) ассоциативного кольца $R$ с единицей, фактор-кольцо $R/\mathfrak{p}$, по которому является телом, и пусть между идеалом $\mathfrak{p}$ и его квадратом $\mathfrak{p}^2$ нет ни одного одностороннего (левого или правого) идеала. Тогда каждый односторонний идеал, содержащий некоторую степень $\mathfrak{p}^m$ идеала $\mathfrak{p}$, сам является степенью идеала $\mathfrak{p}$.

Затем рассматриваются компактные кольца с единицей. Доказано, что если все максимальные открытые идеалы компактного кольца $\mathfrak{O}$ с единицей попарно перестановочны, то кольцо $\mathfrak{O}$ изоморфно топологической прямой сумме компактных примарных колец: эта прямая сумма тогда и только тогда состоит из конечного числа слагаемых, когда кольцо $\mathfrak{O}$ является $Q$-кольцом. При предположении, что между максимальным открытым идеалом $\mathfrak{p}$ и его квадратом $\mathfrak{p}^2$ нет ни одного открытого одностороннего идеала, доказано, что каждое компактное примарное кольцо является либо конечным телом, либо однорядным вполне примарным конечным кольцом, либо максимальным открытым компактным порядком некоторого вполне несвязного локально компактного тела. (Максимальным открытым компактным порядком вполне несвязного локально компактного тела $\mathfrak{S}$ называется подкольцо $\mathfrak{O}$ тела $\mathfrak{S}$, состоящее из всех таких элементов $a \in \mathfrak{S}$, что $a^{-1}$ не является топологически нильпотентным элементом). Приводится ряд свойств компактного кольца с единицей и с попарно перестановочными максимальными идеалами, эквивалентных отсутствию между произвольным открытым максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и его квадратом $\mathfrak{p}^2$ открытых односторонних идеалов. Е. Г. Шульгейфер

**197. Простые алгебры Ли характеристики $p$.** Альберт, Фрэнк (Simple Lie algebras of characteristic $p$. Albert A. A., Frank M. S.), Rend. Seminar. mat. Univ. a Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 117—139 (англ.)

Находятся новые типы простых алгебр Ли над полями простой характеристики. Пусть $F$ — поле характеристики $p > 0$, $B_n = F[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра полиномов над полем $F$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, подчиненных соотношениям $x_1^p = \ldots = x_n^p = 0$. Любые $n$ элементов $a_1, \ldots, a_n$ алгебры $B_n$ определяют дифференцирование $(a_1, \ldots, a_n) : f \to a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ алгебры $B_n$.

Пусть $C_n$ — совокупность всех дифференцирований $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых $\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} = a_1 + \ldots + a_n$, а $U_m$ — совокупность всех дифференцирований $(a_1, \ldots, a_{2m})$, для которых $a_i = \frac{\partial b}{\partial x_i}$, при $1 \leqslant i \leqslant m$, $a_i = -\frac{\partial b}{\partial x_i}$ при $m+1 \leqslant i \leqslant m$, где $b$ — произвольный элемент алгебры $B_{2m}$. Доказывается, что множества $C_n$ и $U_m$ являются алгебрами Ли над $F$, причем при $n > 2$, $p > 2$ алгебра $C_n$ проста, а алгебра $U_m$ содержит идеал $V_m = U_m^2$, являющийся для $p > 2$ и любого $m = 1, 2, \ldots$ простой алгеброй Ли.

Размерности простых алгебр $C_n$ и $V_m$ равны соответственно $(n-1)p^n$ и $p^{2m} - 2$. Размерность $p^{2m} - 2$ при $r = p^m$ имеет хорошо известная простая алгебра Ли $P_r$, состоящая из всех классов (по модулю скалярных матриц) квадратных матриц $r$-го порядка с нулевым следом над полем $F$. Однако алгебры $P_r$ и $V_m$ неизоморфны, за исключением случая $m = 1$, $p = 3$, $r = 3$.

Пусть $G_m$ — $m$-мерное векторное пространство над простым полем $F_p$ характеристики $p$, $f(\alpha, \beta)$ — функция на $G_m \times G_m$ со значениями в $F$, удовлетворяющая тождественным соотношениям $f(\alpha, \alpha) = 0$, $f(\alpha, \beta) =$

$= -f(\beta, \alpha)$, $f(\alpha, \beta+\gamma) = f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \gamma)$. Если $f(\alpha, \beta) \neq 0$, когда $\alpha$ и $\beta$ линейно независимы над $F_p$ и $f(\alpha, \beta) = 0$ в противном случае, то алгебра $X$ над полем $F$, заданная образующими $u_\alpha$ ($\alpha \in G_m$ и определяющими соотношениями $u_\alpha u_\beta = f(\alpha, \beta) n_{\alpha+\beta}$, $u_0 = 0$ ($\alpha, \beta \in G$), является при $m > 1$ простой алгеброй Ли размерности $p^m - 1$.

Пусть, наконец, $f_1(\alpha, \beta) = g(\alpha) h(\beta) - g(\beta) h(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)$, где $g(\alpha)$ — взаимно однозначный, а $h(\alpha)$ — произвольный гомоморфизм векторного пространства $G_m$ в поле $F$. Алгебра $Y$ над полем $F$, заданная образующими $v_\alpha$ ($\alpha \in G_m$) и определяющими соотношениями $v_\alpha v_\beta = f_1(\alpha, \beta) v_{\alpha+\beta}$ ($\alpha, \beta \in G_m$), является простой алгеброй Ли размерности $p^m$ над $F$, если $p > 2$ и содержит простой идеал размерности $p^m - 1$, если $p = 2$.

В. М. Глушков

**198. О сопряженности вещественных картановских подалгебр. I. Костант** (On the conjugacy of real Cartan subalgebras. I. Kostant Bertram), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 11, 967—970 (англ.)

Пусть $\mathfrak{h}_0$ — картановская подалгебра полупростой вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Тогда $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^+ + \mathfrak{h}_0^-$, где $\mathfrak{h}_0^+$ (соответственно $\mathfrak{h}_0^-$) — совокупность всех элементов, соответствующее которым в присоединенном представлении линейное преобразование имеет только вещественные (соответственно чисто мнимые) собственные значения. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра. Для любого подпространства $l$ алгебры $\mathfrak{h}$ обозначим через $\Delta[l]$ совокупность корней алгебры $\mathfrak{g}$, лежащих в $l$. Утверждается, что если алгебра $\mathfrak{g}$ проста и $\mathfrak{g} \neq D_{2k}$, то две картановские подалгебры алгебры $\mathfrak{g}_0$ сопряжены тогда и только тогда, когда каждая из систем $\Delta[i\mathfrak{h}_0^+]$, $\Delta[\mathfrak{h}_0^-]$ одной подалгебры изометрична соответствующей системе другой подалгебры. Случай $\mathfrak{g} = D_{2k}$ изучается отдельно. Доказательств работа не содержит.

А. Л. Онищик

**199. К аддитивной теории идеалов в неассоциативных кольцах. Беренс** (Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen. Behrens Ernst-August), Math. Z., 1956, **64**, № 2, 169—182 (нем.)

Радикалом $R(I)$ идеала $I$ называется пересечение всех простых идеалов, минимальных среди идеалов, содержащих идеал $I$. Радикалом кольца называется радикал $R(0)$ его нуля. Устанавливается, что $R(0)$ обладает свойствами 1,2 и 1,3, указанными в работе Куроша (РЖМат, 1955, 1680). Идеал $Q$ называется примарным, если из $(a)(b) \subset Q$ (где $(x)$ — главный идеал, порожденный элементом $x$) следует, что либо $a \in Q$, либо $b \in R(Q)$. На примере показывается, что в отличие от классического случая радикал $R(Q)$ может быть не простым идеалом. Если кольцо удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей двусторонних идеалов, то радикал каждого идеала является пересечением конечного числа простых идеалов. Представление идеала $I$ в виде пересечения примарных идеалов $Q_1, \ldots, Q_n$ называется нормальным, если пересечение любой системы идеалов $Q_i$ уже не является примарным идеалом, и $R(Q_i) \neq R(Q_k)$, если $i \neq k$. Оказывается, что для двух нормальных представлений из $Q_1 \cap \ldots \cap Q_m = Q_1' \cap \ldots \cap Q_n'$ вытекает, что $m = n$ и, при подходящей нумерации, $R(Q_i) = R(Q_i')$.

В начале статьи указано несколько определений простоты идеала, равносильных обычному.

Л. А. Скорняков

**200. Строение и представления неассоциативных алгебр. Шейфер** (Structure and representation of nonassociative algebras. Schafer R. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 6, 469—484 (англ.)

Обзорная статья, не содержащая доказательств. Библ. 112 назв.

**201. Плоскостные неотела. Хьюз** (Planar division neo-rings. Hughes D. R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 2, 502—527 (англ.)

Множество $R$ с двумя операциями — сложением и умножением — называется плоскостным неотелом, если 1) множество $R$ является лупой с нулем 0 относительно сложения; 2) множество $R^* = R \setminus 0$ является лупой с единицей относительно умножения; 3) $0x = x0 = 0$; 4) $a(b+c) = ab + ac$; 5) $(a+b)c = ac + bc$; 6) уравнение $xa + b = xc + d, a \neq c$, имеет единственное решение; 7) система $ax + y = b$, $cx + y = d$, с $a \neq c$, однозначно определяет элементы $x$ и $y$. В конечном плоскостном неотеле свойство 7) вытекает из свойств 1)—6), а свойство 6) — из 1)—5) и 7). Так же как и тело, плоскостное неотело определяет тернар, а значит, и проективную плоскость. Указываются некоторые алгебраические свойства (главным образом для конечного случая) плоскостных неотел. Приводится пример бесконечного абелева плоскостного неотела (т. е. неотела, для которого лупа $R^*$ является абелевой группой), не являющегося телом. Доказано несуществование абелевых плоскостных неотел некоторых порядков. В частности, доказано, что все абелевы плоскостные неотела, содержащие не более 250 элементов, имеют порядок $p^k$, где $p$ — простое число.

Основная теорема: Если абелево плоскостное неотело имеет порядок $n$ и $p$ — простой делитель $n$, то отображение $x \to x^p$ является автоморфизмом. Кроме того, рассматриваются некоторые специальные свойства конечных тернаров. В частности, приводится способ построения тернара, подобный описанному в РЖМат., 1956, 7624.

Л. А. Скорняков

**202. Линейные дифференциальные уравнения в поле алгебраических функций многих переменных, имеющем простую характеристику. Егер** (Lineare Differentialgleichungen in algebraischen Funktionenkörpern mehrerer Unbestimmter bei Primzahlcharakteristik. Jaeger Arno), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 27—28 (нем.)

**203. Об однородных линейных дифференциальных уравнениях с произвольными постоянными коэффициентами. Зейденберг** (On homogeneous linear differential equations with arbitrary constant coefficients. Seidenberg A.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 599—606 (англ.)

Пусть $u = u_0, u_1, \ldots$ — последовательные производные переменной $u$ в некотором поле $K$ и $c_0, c_1, \ldots, c_m$ — постоянные из поля $K(u_0, u_1, \ldots)$. Элемент $l_0 = c_0 u_0 + \ldots + c_m u_m$ порождает простой идеал $[l_0] = (l_0, l_1, \ldots)$ кольца $S = K(c)\{u\}$, где $l_i = c_0 u_i + \ldots + c_m u_{i+m}$ и $K\{u\} = K[u_0, u_1, \ldots]$.

Доказано, что миноры $(m+1)$-го порядка бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} u_0 u_1 \ldots u_m \\ u_1 u_2 \ldots u_{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

образуют базис идеала $[l_0] \cap K\{u\}$.

Г. И. Дринфельд

**204. Характеристика $\Sigma\Delta$-колец подмножеств. Балачандран** (A characterization of $\Sigma\Delta$-rings of subsets. Balachandran V. K.), Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 38—41 (англ.)

Кольцо $L$ подмножеств множества называется $\Sigma\Delta$-кольцом, если оно замкнуто относительно объединений и пересечений. Каждое $\Sigma\Delta$-кольцо $L$ является вполне дистрибутивной структурой; обратное не верно. Доказано, что структура $L$ тогда и только тогда изоморфна некоторому $\Sigma\Delta$-кольцу множеств, когда она является полной структурой и имеет аддитивный базис, состоящий из суперкомпактных элементов (т. е. таких элементов $a$, что из $\Sigma a_i \geqslant a$ вытекает $a_i \geqslant a$ для некоторого $i$). Этот же результат был получен Райнеем (Raney G. N., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 677—680). Статья автора была представлена в Fundam. math. 9 декабря 1952 г. Кроме того, доказано, что структура $L$ тогда и только тогда изоморфна телу всех подмножеств некоторого множества, когда она является полной структурой, имеющей аддитивный базис, состоящий из суперкомпактных элементов, и для каждого элемента $a \neq 1$ существует такой элемент $b \neq 0$, что $ab = 0$.

H. Rasiowa

**205. Проблема метризации в структурах. Кертис** (A metrization problem concerning lattices. Curtis H. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 319—330 (англ.)

Пусть $L$ — атомичная полудедекиндова структура, точки которой образуют метрическое пространство $P$ с метрикой $\delta$. Доказывается, что эту метрику можно распространить на $L$, если: 1) для любой точки $p \in P$, любых независимых точек $p_1, \ldots, p_n$ (точки $p_1, \ldots, p_n$ называются независимыми, если для любого $m$, $1 \leqslant m < n$, элементы $x = \sum_1^m p_i$ и $y = \sum_{m+1}^n p_i$ образуют модулярную пару (Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, стр. 148), для которой $xy = 0$) и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\gamma > 0$, что из $\delta(p_i, q_i) < \gamma$ следует $|\delta(p, p_1 + \ldots + p_n) - \delta(q, q_1 + \ldots + q_n)| < \varepsilon$; 2) пространство $P$ сепарабельно; 3) если для последовательностей Коши $\{p^\alpha\}$, $\{p_i^\alpha\}$ ($p^\alpha, p_i^\alpha \in P$, $i = 1, \ldots, n$) существует такое $\gamma > 0$, что $\delta(p_k^\alpha, p_{k+1}^\alpha + \ldots + p_n^\alpha) > \gamma$ для всех $\alpha$ и всех $k < n$, то предел $\lim_{\alpha \to \infty} \delta(p^\alpha, p_1^\alpha + \ldots + p_n^\alpha)$ существует и найдется такая последовательность Коши $\{q^\alpha\}$, $q^\alpha \in P$, $q^\alpha \leqslant p_1^\alpha + \ldots + p_n^\alpha$, что $\lim_{\alpha \to \infty} \delta(p^\alpha, q^\alpha) = \lim_{\alpha \to \infty} \delta(p^\alpha, p_1^\alpha + \ldots + p_n^\alpha)$; 4) существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого множества независимых точек $p_1, \ldots, p_n$ найдутся точки $q_1, \ldots, q_n \in P$, для которых $q_1 + \ldots + q_n = p_1 + \ldots + p_n$ и $\delta(q_k, q_{k+1} + \ldots + q_n) > \alpha$ для всех $k < n$. В доказательстве используется метризационная теорема Урысона. Указывается, что перечисленные условия не являются необходимыми.

Л. А. Скорняков

**206. К отношениям «между» в структурах. Колибиар** (K vzťahom «medzi» vo sväzoch. Kolibiar Milan), Mat.-fys. časop., 1955, **5**, № 3, 162—171 (словац.; рез. русс.)

Пусть $a$, $b$ — элементы некоторой структуры $S$, $G(a, b)$ — множество всех элементов $x \in S$, для которых $(a \cap x) \cup (b \cap x) = x = (a \cup x) \cap (b \cup x)$, и $M(ab)$ — множество всех элементов $x \in S$, для которых $a \cap b \leqslant x \leqslant a \cup b$.

Доказано, что тогда и только тогда $G(a, b) = M(a, b)$ для любых элементов $a$, $b$, когда структура $S$ дедекиндова. Кроме того, доказано, что следующие четыре свойства двух структур $S_1$ и $S_2$, определенных на одном и том же множестве $M$, равносильны: 1) любое подмножество, являющееся выпуклой подструктурой одной структуры, является выпуклой подструктурой другой; 2) существуют такие структуры $A$ и $B$, определенные на некоторых множествах $M_1$ и $M_2$ соответственно, и такое взаимно однозначное отображение $\varphi$ множества $M$ на прямое произведение $M_1 \times M_2$ множеств $M_1$ и $M_2$, что $\varphi$ является изоморфным отображением структуры $S_1$ на структуру $A \times B$ и одновременно изоморфным отображением структуры $S_2$ на структуру $\widetilde{A} \times B$, где $\widetilde{A}$ — структура, двойственная структуре $A$; 3) множества типа $G(a, b)$ в обеих структурах совпадают; 4) множества типа $M(a, b)$ в обеих структурах совпадают (см. также РЖМат, 1954, 4762).

J. Jakubík

**207. Замечания об алгебре замыканий, в которой замкнутые элементы являются открытыми. Рубин** (Remarks about a closure algebra in which closed elements are open. Rubin Jean E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 30—34 (англ.)

Рассматриваются алгебры замыканий (определение см. Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, стр. 251; McKinsey and Tarski, Ann. Math., 1944, **45**, 141), в которых операция замыкания $C$ удовлетворяет тождеству (1) — $C - Cx = Cx$. Показывается, что это тождество равносильно каждому из следующих условий: (2) $C - C - x = -C - x$; (3) $C(x \cdot Cy) = Cx \cdot Cy$; (4) если $Cx = x$, то $C - x = -x$; (5) если $xCy = 0$, то $Cx \cdot Cy = 0$; (6) если $x \cdot Cy = 0$, то $Cx \cdot y = 0$. Показывается также, что оператор замыкания, удовлетворяющий условию (1), вполне дистрибутивен относительно сложения. В заключение показывается, что пополнение по Макнилу алгебры с условием (1) также удовлетворяет этому условию.

А. И. Мальцев

**208. IPIC-представление автоморфизмов структуры. Эллис** (IPIC representation of lattice automorphisms. Ellis David), Publs math., 1954, **3**, № 3—4, 217—220 (англ.)

Пусть $\Gamma$ — структура с нулем и единицей, $\widetilde{\Gamma}$ — структура, дуально изоморфная структуре $\Gamma$, $B$ — кардинальное произведение структур $\Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}$ (Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, стр. 25), $C$ — булева алгебра, состоящая из двух элементов, и $f$ — однозначное отображение $B$ на $C$. Положим

$$\Phi(\alpha, f) = \{\xi \in \Gamma;\ f(\alpha, \xi) = 0\},$$

$$\Psi(\alpha, f) = \{\xi \in \Gamma;\ f(\xi, \alpha) = 0\}.$$

Отображение $f$ называется IPIC-отображением, если: а) из $(\alpha, \beta) \leqslant (\gamma, \delta)$ следует, что $f(\alpha, \beta) \leqslant f(\gamma, \delta)$; б) для любого элемента $\alpha \in \Gamma$ существует такой элемент $\beta \in \Gamma$, что $\Psi(\beta, f) = \{\xi \in \Gamma;\ \xi \leqslant \alpha\}$; в) для любого элемента $\beta \in \Gamma$ существует такой элемент $\alpha \in \Gamma$, что $\Phi(\alpha, f) = \{\xi \in \Gamma;\ \xi \geqslant \beta\}$.

Пусть $M$ — множество всех *IPIC*-отображений. Определим произведение $f \times g$ двух *IPIC*-отображений $f$ и $g$ как отображение $h$, заданное формулой

$$h(\alpha, \beta) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (f(\alpha, \gamma) \cup g(\gamma, \beta)).$$

Оказывается, что относительно этого умножения множество $M$ образует группу, изоморфную группе автоморфизмов структуры $\Gamma$.

Л. А. Скорняков

**209. К общей теории алгебраических систем. Мальцев А. И.**, Матем. сб., 1954, **35**, вып. 1, 3—20

Работа в основном посвящена изучению примитивных классов, т. е. совокупности всех алгебраических систем с некоторым произвольным, но фиксированным множеством одноименных операций, которые удовлетворяют произвольному, но фиксированному множеству тождеств.

Выражение вида $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — переменные, а $f$ — произвольная $n$-арная операция, называется полиномом от $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$; сами переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ также причисляются к полиномам. Выражение $f(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_1, \ldots, u_n$ — полиномы, также называется

полиномом. Если в полиноме часть неизвестных заменить фиксированными элементами некоторой алгебраической системы, то получается некоторая операция от оставшихся неизвестных, которая называется производной операцией. Преобразование алгебраической системы $x \to F(x) = xF$, где $F(x)$ — произвольная монарная производная операция, называется трансляцией. Трансляции образуют полугруппу относительно их последовательного применения. Трансляции вида $x \to f(a_1,\ldots,a_{i-1}, x, a_{i+1},\ldots,a_n)$, где $f$ — одна из основных операций алгебраической системы, называются главными трансляциями. Произведения конечного числа главных трансляций называются элементарными трансляциями. Устанавливаются взаимосвязи трансляций с отношениями конгруэнтности относительно основных и производных операций. Доказано, что каждая алгебраическая система некоторого примитивного класса тогда и только тогда содержит производную систему, элементарные трансляции которой образуют транзитивную группу, когда каждая система этого примитивного класса обладает производной системой, являющейся лупой.

Алгебраическая система с двумя тернарными операциями $xyz$ и $x\tau y\tau z$, подчиненными трем тождествам: $(xyz)\,\tau y\tau z = x$, $(x\tau y\tau z)\,yz = x$, $xxz = z$, называется битернарной системой. Доказано, что группы обратимых трансляций всех систем некоторого примитивного класса тогда и только тогда транзитивны, когда существуют производные тернарные операции, относительно которых системы рассматриваемого класса являются битернарными системами.

Относительно перестановочных отношений конгруэнтности доказана, в частности, следующая теорема: Все конгруэнтности каждой системы некоторого примитивного класса тогда и только тогда перестановочны, когда существует такой многочлен $\Psi(x, y, z)$, что $\Psi(x, x, z) = z$, $\Psi(x, z, z) = x$ для всех систем этого примитивного класса. Из последних двух теорем следует, что отношения конгруэнтности на квазигруппах перестановочны (если конгруэнтности на квазигруппе рассматривать как отношения, согласованные с тремя основными операциями квазигруппы). Этим решена 31-я проблема Биркгофа (Биркгоф Г. Теория структур. Изд-во ин. лит., 1952, стр. 130).

Далее детально изучаются нормальные комплексы алгебраических систем, т. е. множества элементов, являющиеся смежными классами для некоторой конгруэнтности. В результате их глубокого изучения простым примером отрицательно решена проблема 33 Биркгофа (там же, стр. 134).

Топологическая система определяется как множество, являющееся одновременно алгебраической системой и топологическим пространством, относительно топологии которого основные операции алгебраической системы непрерывны. Доказано, что если топологическая система некоторого примитивного класса содержит производную систему, элементарные трансляции которой образуют транзитивную группу, то пространства систем этого класса регулярны. Частным случаем этой теоремы является теорема Понтрягина о регулярности пространств групп. Далее доказано, что топологическая система связна, если она порождается некоторой связной окрестностью элемента, который сам по себе образует подсистему (относительно основных операций).

Далее естественным образом определяется непрерывность произвольного отношения и полнота отношения эквивалентности на топологических системах. Доказано, что если на всех алгебраических системах некоторого примитивного класса конгруэнтности перестановочны, то на топологических системах этого же класса все конгруэнтности полны, а непрерывны те и только те конгруэнтности, смежные классы которых замкнуты. Здесь же доказано, что любое непрерывное гомоморфное отображение одной локально компактной битернарной топологической системы, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, на другую такую систему является открытым отображением.

В последнем разделе работы (§ 5) определяются и изучаются накрывающие гомоморфизмы. Отметим следующие результаты: 1) все дискретные нормальные делители связной лупы лежат в ее центре; 2) фундаментальная группа линейно связной топологической системы, имеющей бинарную операцию с нейтральным элементом, коммутативна. Ю. И. Соркин

210. **Алгебраические системы. Мальцев А. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 8

211. **Некоторые свойства частично ассоциативных операций. Терстон** (Some properties of partly-associative operations. Thurston H. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 487—497 (англ.)

Из слова $x_1, x_2 \ldots x_{2\nu+1}$, состоящего из $2\nu+1$ буквы, можно образовать $\nu+1$ последовательных произведений относительно $(\nu+1)$-арной операции, знак $*$ которой условимся без скобок помещать впереди перемножаемых элементов. Произведение $* x_0 x_1 \ldots x_\nu$ сокращенно обозначается через $* \mathbf{x}$, а произведение $** x_0 x_1 \ldots x_{2\nu}$, т. е. произведение элементов $* x_0 \ldots x_\nu$, $x_{\nu+1},\ldots, x_{2\nu}$ — через $*^2\mathbf{x}$; аналогичный смысл имеет обозначение $*^n\mathbf{x}$. Если существуют такие натуральные числа $j$ и $k$, что $\nu$ кратно $k$ и $k$ кратно $j$ и для любых $p$ и $q$ из того, что $p$ кратно $j$, а $q$ кратно $k$, следует, что любое $p$-е последовательное произведение равно соответствующему $(p+q)$-му последовательному произведению, то рассматриваемая $(\nu+1)$-арная операция называется $(j, k)$-ассоциативной. $(\nu+1)$-арная операция называется $l$-обратимой $(0 \leqslant l \leqslant \nu)$, если для любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1},\ldots, x_\nu, z$ существует такой элемент $a$, что $* x_0 x_1 \ldots x_{l-1} a x_{l+1} \ldots x_\nu = z$. Операция $*$ называется однажды обратимой, если она $l$-обратима для некоторого $l$, не равного нулю или $\nu$ (в этом месте в работе допущена опечатка), или же она одновременно 0- и $\nu$-обратима.

Основной теоремой автор считает следующее обобщение одной теоремы Поста: Для любой $(nk+1)$-арной $(1, k)$-ассоциативной однажды обратимой операции $*$ на некотором множестве $S$ существует такая $(k, k)$-ассоциативная $(k+1)$-арная операция $\dagger$ на множестве $U$, содержащем множество $S$, что $\dagger^n\mathbf{x} = *\mathbf{x}$ для любого слова $x$ из $nk+1$ букв. Ю. И. Соркин

212. **Симметричные и самораспределительные системы. Фринк** (Symmetric and self-distributive systems. Frink Orrin), Amer. Math. Monthly, 1956, 62, № 10, 697—707 (англ.)

Бинарная операция $+$ называется симметричной, если $(a+b)+(c+d) = (a+c)+(b+d)$, и нульпотентной, если $a+a=a$. Симметричная нульпотентная операция удовлетворяет левому и правому самораспределительным законам:

$$a+(b+c) = (a+b)+(a+c);\quad (a+b)+c = (a+c)+(b+c).$$

Примером симметричной и нульпотентной операции служит операция образования среднего арифметического чисел.

Множество, в котором определены две бинарные операции — сложение и умножение, называется псевдокольцом, если сложение симметрично, а умножение удовлетворяет аксиомам полугруппы. Доказано, что совокупность всех эндоморфизмов симметричной системы (множества с симметричной операцией) является псевдокольцом относительно естественно определенных операций сложения и умножения. Обратно,

любое псевдокольцо, обладающее правым единичным элементом, является подпсевдокольцом псевдокольца всех эндоморфизмов некоторой симметричной системы. В. Д. Белоусов

**213. Идеалы относительно стрaктов. Уоллес** (Struct ideals. Wallace A. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 634—638 (англ.)

Бинарное отношение $L \subset X \times X$ в хаусдорфовом пространстве $X$ называется стрaктом, если $L$ не пусто, замкнуто и транзитивно. Для любого $A \subset X$ через $L(A)$ обозначается множество всех точек $x \in X$, для которых $(a, x) \in L$ при $a \in A$. Непустое подмножество $A \subset X$ называется $L$-идеалом, если $L(A) \subset A$. Пусть $L_a$ — множество всех таких точек $x \in X$, что $x \cup L(x) = a \cup L(a)$. Элемент $a \in X$ называется $L$-минимальным, если из $x \cup L(x) \subset a \cup L(a)$ следует, что $x \in L_a$. Аналогично определяются $L$-максимальные элементы.

Если для некоторого стракта $L$ в $X$ множество $K_L$ всех $L$-минимальных элементов не пусто, то $K_L$ является $L$-идеалом и совпадает с объединением всех множеств $L_x$ с $x \in K_L$. Если пространство $X$ бикомпактно и стракт $L$ непрерывен ($L(\overline{A}) \subset \overline{L(A)}$ для любого $A \subset X$), то идеал $K_L$ замкнут. Получено много других теорем об отношениях $L$ (и, в частности, о стрaктах), связанных с понятиями $L$-минимальных и $L$-максимальных элементов и минимальных и максимальных $L$-идеалов. Рассмотрены стракты континуумов (РЖМат, 1956, 241, 5742). Л. М. Глускин

**214 Д. Регулярные и сингулярные отображения дистрибутивных структур в полные векторные структуры, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x \cup y) + f(x \cap y) = f(x) + f(y)$. Бауэр** (Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \cup y) + f(x \cap y) = f(x) + f(y)$ genügen. Bauer Heinz. Diss. Naturwiss. F. Erlangen, 1953, V, 91 gez. Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 21, 1773 (нем.)

**215 Д. Корневые числа и отношения между классами групп в полях деления круга. Мак-Кензи** (Root numbers and class group relations in cyclotomic fields. MacKenzie Robert Earl.— Doct. diss., Princeton Univ., 1950), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 601 (англ.)

**216 Д. Приведение поля алгебраических функций по простому модулю $A$ поля констант. Неринг** (Reduction of an algebraic function field modulo A prime in the constant field. Nering Evar Dare.— Doct. diss., Princeton, Univ., 1948), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 601—602 (англ.)

**217 Д. Системы линейных сравнений и левая ассоциативность матриц, элементы которых являются целыми элементами некоторой алгебры. Батсон** (Systems of linear congruences and left-associativity of matrices whose elements are integers from an algebra. Butson Alton Thomas.— Doct. diss., State Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 9, 1623 (англ.)

**218 Д. Нильпотентные группы и кольца Ли. Кострикин А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Матем. ин-т АН СССР, М., 1956

**219 Д. О расщеплении бесконечных алгебр. Лю Шао-сюэ.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. МГУ, М., 1956

**220 Д. Локально нильпотентные топологические кольца. Махарадзе Л. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. МГУ, М., 1956

**221 Д. Локально $a$-выпуклые топологические векторные структуры и их представления. Каллер** (Locally $a$-convex topological vector lattices and their representations. Kuller Robert Garlin.—Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 9, 1625 (англ.)

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

**222. Техническое применение булевой алгебры. Крейвен** (An engineering application of Boolean algebra. Craven T. L.), Proc. Roy. Irish Acad., 1955, A57, № 6, 121—130 (англ.)

В популярной форме изложены основные понятия контактных схем и приведена аналогия между действием контактных цепей и законами математической логики. Применение законов булевой алгебры для преобразования и упрощения контактных схем иллюстрировано одним примером.

В конце имеется краткий обзор развития применения булевой алгебры к контактным схемам, в котором совершенно не указаны работы русских и советских ученых. Утверждается, что первое упоминание о возможности применения математической логики к контактным схемам дано в работах Накасимы (A. Nakasima) и Ганзава (M. Hanzawa) в 1936—1938 гг. В действительности впервые мысль о возможности построения алгебры переключательных схем на базе алгебры логики была высказана физиком П. Эренфестом в 1910 г. (Ж. русс. физ.-хим. об-ва, 1910, физ. отд., 42, отд. 2, № 10, 382). В. Н. Рогинский

**223. Метод эквивалентных схем в изучении временных реле. Иоанин** (Metoda schemelor echivalente în studiul releelor temporizate. Ioanin Gh.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 923—931 (рум.; рез. русс., франц.)

Указываются случаи, в которых релейную схему можно заменить одним временным реле. Зная характер работы реле с замедленным отпусканием или срабатыванием, можно построить схему, выполняющую функции этого реле, и по ней определить его уравнение работы.

Показывается, что отсутствие импульса, отмечающего момент окончания или начала какого-либо процесса, всегда приводит к схеме, по действию эквивалентной реле с замедленным отпусканием или срабатыванием. Эта схема, в свою очередь, может быть заменена одним из таких реле с замедлением в $\nu$ тактов. Такую замену можно делать и в случае схемы с реальными контактами, при этом можно избежать использования специальных контактов.

Предлагается пользоваться изложенным в статье методом для анализа схем автоматических механизмов, работу которых трудно записать непосредственно в алгебраическом виде. Приводится пример (нахождение функции работы для реле с инерцией при передвижении якоря). В заключение отмечается, что метод применим к схемам с любыми элементами релейного действия. В. М. Остиану

**224. Замечания к статье «Метод эквивалентных схем в изучении временных реле». Мойсил** (Observaţii asupra notei «Metoda schemelor echivalente în studiul releelor temporizate». Moisil Gr. C.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 932 (рум.)

Пусть работа некоторого автоматического механизма с $n$ промежуточными элементами описана системой рекуррентных уравнений

$$x^i_{N+1} = f^i(a, \ldots, c, x^1_N, x^1_{N-1}, \ldots, x^1_{N-\nu_1}, \ldots$$

$$\ldots, x^r_N, x^r_{N-1}, \ldots, x_{N-\nu_r}), \qquad (1)$$

где $x^i$ — переменные промежуточных элементов, а $\nu_i$ — временное замедление $i$-го элемента. Вводя в (1) новые переменные

$$x_{N+1}^{i_1} = x_N^i,\ x_{N+1}^{i_2} = x_N^{i_1},\ \ldots,\ x_{N+1}^{i_{\nu_i}} = x_N^{i_{\nu_i - 1}}, \quad (2)$$

получаем уравнения

$$x_{N+1}^i = f^i(a, \ldots, c, x_N^1, x_N^{11}, \ldots, x_N^{1\nu i}, \ldots, x_N^r, x_N^{r_1}, \ldots, x_N^{r\nu_r}). \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) составляют систему рекуррентных уравнений для некоторого механизма с обычными идеальными контактами $r + \nu_1 + \ldots + \nu_r$ промежуточных элементов, которые составляют схему, эквивалентную в смысле Иоанина. В. М. Остиану

**225. Алгебры двухпозиционных устройств. Райский** (Algebry układów dwustanowych. Rajski Czesław), Zesz. nauk. Politechn. Warsz., 1955, № 16, 3—36 (польск.)

Излагается исчисление высказываний и дается понятие о его применении к описанию и синтезу релейно-контактных схем и бесконтактных схем релейного действия. Отмечается важность операции $\bar{A}B \vee A\bar{B}$. В конце статьи рассматривается также булева алгебра. Г. Н. Поваров

---

**См. также:** 24, 53, 255, 265, 512, 561, 870

## ТОПОЛОГИЯ

**226. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. Александров П. С., Ситников К. А.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 49—51

**227. Теория топологических пространств. Смирнов Ю. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 55—56

Излагаются результаты изучения компактности и метризуемости топологических пространств, а также изучения равномерных пространств.

**228. Замечание о ранжированных пространствах. Сираи** (A remark on the ranged space. Shirai Tamekaru), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 2, 120—124 (англ.)

Исследуются окрестностные (в смысле Хаусдорфа) топологические пространства, не удовлетворяющие следующей аксиоме С: Для произвольно заданных точки $x$, ее окрестности $Ox$ и точки $y \in Ox$ существует такая окрестность $Oy$ точки $y$, что $Oy \subseteq Ox$. Полученные результаты применяются к ранжированным пространствам в смысле Кунуги (РЖМат, 1956, 2034).

Ю. М. Смирнов

**229. О счетно-паракомпактных пространствах. Исикава** (On countably paracompact spaces. Ishikawa Fumie), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 686—687 (англ.)

Дается следующее необходимое и достаточное условие для того, чтобы топологическое пространство $R$ было счетно-паракомпактным (т. е. чтобы в любое счетное открытое покрытие пространства $R$ можно было вписать локально конечное покрытие): Для любой убывающей последовательности непустых замкнутых множеств $F_i$ с пустым пересечением существуют такие окрестности $OF_i$, для которых пересечение замыканий также пусто. Ю. М. Смирнов

**230. О покрытиях и непрерывных функциях топологических пространств. Нагата** (On coverings and continuous functions of topological spaces. Nagata Jun-iti), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 688—693 (англ.)

Даются характеристики паракомпактных и метризуемых пространств с помощью семейств непрерывных функций, аналогичные следующей: для того чтобы хаусдорфово пространство $X$ было паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого покрытия $\gamma = \{\Gamma\}$ пространства $X$ нашлось такое семейство функций $f_\Gamma(x)$, $\Gamma \in \gamma$, принимающих действительные значения, что для каждой точки $x \in X$ выполняется равенство $\overline{\lim}_{\Gamma \in \gamma} f_\Gamma(x) = 1$ и, кроме того, для любой системы $\beta$ множеств $\Gamma$ покрытия $\gamma$ верхняя грань $f_\beta(x) = \overline{\lim}_{\Gamma \in \beta} f_\Gamma(x)$ является непрерывной функцией точки $x$ (теорема 1). Кроме этого, доказано следующее обобщение одной теоремы Хаусдорфа (метрический случай): Пусть $X$ и $Y$ — равномерные пространства, заданные системами покрытий одной и той же мощности $\mathfrak{m}$; пусть $f$ — непрерывное отображение некоторого замкнутого множества $\Phi$ пространства $X$ в $Y$; тогда при выполнении следующих двух условий 1), 2) пространство $Y$ можно вложить в некоторое равномерное пространство $Z$ (определяемое системой покрытий той же мощности $\mathfrak{m}$) в качестве замкнутого подпространства таким образом, что отображение $f$ продолжаемо в непрерывное отображение $F$ всего пространства $X$ в пространство $Z$, гомеоморфное на $X \setminus \Phi$. 1) Пространство $X$ — вполне нормально (в каждое его открытое покрытие $\alpha$ можно звездно вписать некоторое открытое покрытие $\gamma = \{\Gamma\}$, т. е. для каждой точки $x \in X$ сумма $\bigcup_{\Gamma \ni x} \Gamma$ содержится в некотором множестве $A$ покрытия $\alpha$). 2) Пространство $X$ нормально и при этом либо $\Phi$, либо $Y$ имеет счетную базу (теоремы 4,5). Ю. М. Смирнов

**231. Замкнутые отображения и метрические пространства. Морита, Ханаи** (Closed mappings and metric spaces. Morita Kiiti, Hanai Sitiro), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 1, 10—14 (англ.)

Дается следующее необходимое и достаточное условие $\mathscr{M}$ для того, чтобы образ метрического пространства $X$ при замкнутом непрерывном отображении был бы метризуемым пространством.

$\mathscr{M}$. Граница полного прообраза каждой точки $y$ пространства $Y = f(X)$ бикомпактна. Интересны обе части доказательства. Необходимость цитированного условия вытекает из следующего общего предложения: При любом замкнутом отображении нормального $T_1$-пространства $X$ на топологическое пространство $Y$, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, граница полного прообраза каждой точки $y$ пространства $Y$ компактна. Наряду с метризуемостью, инвариантным при замкнутых непрерывных отображениях, удовлетворяющих условию $\mathscr{M}$, оказывается также и свойство паракомпактности (если $X$ есть $T_2$-пространство); свойства нормальности и коллективной нормальности инвариантны и без выполнения условия $\mathscr{M}$. Из полученных результатов вытекают следующие три следствия: 1. При любом замкнутом непрерывном отображении метрического пространства $X$ на топологическое пространство $Y$, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, пространство $Y$ является метризуемым про-

странством. Это—прямое усиление одного результата Уайбэрна (Whyburn G. T., Duke Math. J., 1950, 17, 69—74), который получим, если дополнительно потребуем, чтобы пространство $X$ имело счетную базу. 2. Свойство метризуемости инвариантно при замкнутых и одновременно открытых непрерывных отображениях. Это—теорема Балачандрана (РЖМат, 1956, 3723). 3. Свойство иметь счетную базу, а также и свойство локальной компактности инвариантны при замкнутых непрерывных отображениях, если только пространства $X$ и $f(X) = Y$ метризуемы.

Авторы указывают, что в одной работе второго из них (РЖМат, 1955, 3660) в доказательстве утверждения об инвариантности свойства метризуемости при замкнутых непрерывных отображениях допущена ошибка. Ю. М. Смирнов

232. **Замечания о топологических пространствах. I. Одна теорема о равномерных пространствах. И с э к и** (Notes on topological spaces. I. A theorem on uniform spaces. I s é k i K i y o s h i), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 1, 27—28 (англ.)

Рассматривается понятие равномерной полноты для равномерных (вейлевских) пространств: равномерное пространство $P$ называется равномерно полным, если существует хотя бы одно равномерное пространство $P'$, содержащее пространство $P$ в качестве подпространства типа $G_\delta$. Оказывается, что для равномерной полноты равномерного пространства $P$ необходимо и достаточно, чтобы оно являлось пересечением замкнутого множества и множества типа $G_\delta$ в любом равномерном пространстве, содержащем пространство $P$ в качестве подпространства. Ю. М. Смирнов

233. **Заметка о лебеговом свойстве в равномерных пространствах. К а с а х а р а, К а с а х а р а** (Note on the Lebesgue property in uniform spaces. K a s a h a r a S h o u r o, K a s a h a r a K o u j i), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 9, 615—617 (англ.)

По определению, равномерное пространство $P$ обладает (конечным) лебеговым свойством, если каждое его открытое (конечное) покрытие обладает лебеговым свойством в смысле Исеки (РЖМат, 1956, 5146).

Т е о р е м а 1. Для того чтобы хаусдорфово пространство $R$ можно было превратить в равномерное пространство, обладающее лебеговым свойством, необходимо и достаточно, чтобы $R$ было паракомпактным пространством; соответствующая равномерная структура оказывается при требуемом условии единственной, а именно максимальной (the finest) из всех равномерных структур, совместимых с топологией пространства $R$.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы хаусдорфово пространство $R$ можно было превратить в равномерное пространство, обладающее конечным лебеговым свойством, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным. Из этих двух предложений непосредственно выводится ряд следствий. Ю. М. Смирнов

234. **О свойстве Лебега в равномерных пространствах. IV. И с э к и** (On the property of Lebesgue in uniform spaces. IV. I s é k i K i y o s h i), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 8, 524—525 (англ.)

Даются простые необходимые и достаточные условия для того, чтобы каждое бинарное открытое покрытие равномерного пространства обладало лебеговым свойством, с помощью которых из ранее полученных результатов (РЖМат, 1956, 5146, 6476) непосредственно вытекают следующие указанные автором предложения: Если каждое бинарное открытое покрытие равномерного пространства $P$ обладает лебеговым свойством, то этим же свойством обладает и каждое конечное открытое покрытие пространства $P$. Для того чтобы каждое бинарное (конечное) открытое покрытие равномерного пространства $P$ обладало свойством Лебега, необходимо и достаточно, чтобы $P$ было нормальным пространством и чтобы при этом каждая ограниченная непрерывная функция, определенная на $P$, была равномерно непрерывна. Наконец, утверждается, что если равномерное пространство $P$, каждое открытое покрытие которого обладает лебеговым свойством, локально метризуемо, то оно метризуемо и в целом.

Ю. М. Смирнов

235. **О свойстве Лебега в равномерных пространствах. V. И с э к и** (On the property of Lebesgue in uniform spaces. V. I s é k i K i y o s h i), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 9, 618—619 (англ.)

Рассматриваются равномерные пространства, в которых каждое открытое покрытие обладает свойством Лебега (РЖМат, 1956, 5146). Показывается, например, что всякое непрерывное отображение такого пространства в другое равномерное пространство является равномерно непрерывным. Приводится пример, показывающий, что эту теорему нельзя обратить. Этот же пример показывает, что в пространстве, в котором каждое конечное покрытие обладает свойством Лебега, может существовать бесконечное покрытие, не обладающее свойством Лебега. А. С. Шварц

236. **О метрико-топологических свойствах замкнутых множеств. С и т н и к о в К. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 135

237. **Об универсальных метрических пространствах. Т у м а р к и н Л. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 136

Утверждается, что не существует компактного метрического пространства, содержащего изометрически всякое компактное метрическое пространство диаметра $\leqslant d (d > 0)$.

238. **Некоторые критерии компактности в метрических и нормированных пространствах. З а с л а в с к и й И. Д.,** Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 6, 953—956

Псевдометрическое пространство $A$ есть любое множество $X$ с заданной на нем вещественной функцией $\alpha(x, y)$ $(x \in X,\ y \in X)$. Множество $M \subseteq X$ псевдокомпактно в $A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $X_\varepsilon \subseteq X$, что для всякой точки $x \in M$ найдется элемент $y \in X_\varepsilon$, удовлетворяющий условию $\alpha(y, x) \leqslant \varepsilon$. Пусть псевдометрические пространства $A_\xi$, где индексы $\xi$ образуют направленное множество, определены псевдометриками $\alpha_\xi$ на том же $X$. Тогда если $M \subseteq X$ псевдокомпактно во всех пространствах $A_\xi$ и $\alpha_\xi(x, y) \overrightarrow{\xi} \alpha(x, y)$ равномерно при $x \in M$, $y \in M$, то $M$ псевдокомпактно в $A$. Обратно, если $\alpha_\xi$ и $\alpha$ удовлетворяют аксиомам симметрии и треугольника, $\alpha_\xi \leqslant \alpha$, $\alpha_\xi \underset{\xi}{\to} \alpha$ для всех $x \in X$, $y \in X$ и $M$ псевдокомпактно в пространстве $A$, то $M$ псевдокомпактно во всех пространствах $A_\xi$ и $\alpha_\xi(x, y) \underset{\xi}{\to} \alpha(x, y)$ равномерно при $x \in M$, $y \in M$. На основании этих общих утверждений формулируются аналогичные между собой критерии компактности для пространств $C[a, b]$, $V[a, b]$, $V_p[a, b]$ и $D[a, b]$ (функций, удовлетворяющих условию Липшица). Так, для компактности множества $M \subseteq C[a, b]$ необходима и достаточна ограниченность множества $M$ и условие (более слабое, чем условие Арцеля — Асколи.)

$$\inf_{m,\ a \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant b} \sup_{x \in M,\ y \in M} R(x, y) = 0,$$

$$R(x, y) = \left[\max_{[a,\ b]} |x(t) - y(t)| - \max_{i = 1, \ldots, m} |x(t_i) - y(t_i)|\right].$$

При этом заменить $x - y$ на $x$ нельзя. Далее, для компактно-

ти множества $M$ в пространстве $M^*$ измеримых ограниченных функций необходима и достаточна компактность множества $M$ во всех $L_p$ и равномерное стремление $\|x-y\|_{L_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \|x-y\|_{M^*}$ ($x \in M$, $y \in M$). Доказательства отсутствуют. А. Д. Мышкис

**239. О расширениях топологических пространств.** Нёбелинг, Бауер (Über die Erweiterungen topologischer Räume. Nöbeling Georg, Bauer Heinz), Math. Ann., 1955, **130**, № 1, 20—45 (нем.)

В развитие идей Гельфанда — Колмогорова — Шилова о связи между бикомпактными расширениями вполне регулярных пространств и кольцами непрерывных функций строится весьма разветвленная классификация всевозможных расширений произвольных топологических пространств. В отличие от общепринятого определения под расширением топологического пространства $R$ авторы понимают всякое такое топологическое пространство $\varepsilon R$, что: 1) $R \subset \varepsilon R$ и 2) топология в $R$, порождаемая на нем топологией пространства $\varepsilon R$, совпадает или же сильнее, чем собственная топология пространства $R$.

$F$-алгеброй авторы называют произвольное банахово пространство $K$, в котором введена операция умножения так, что, кроме обычных алгебраических аксиом, выполняются еще два условия: $\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ и $\|a^2\| = \|a\|^2$ для любых $a$ и $b$ из $K$. Кольцо $K(R)$ всех ограниченных непрерывных действительных функций, определенных на данном пространстве $R$, является $F$-алгеброй. Основополагающее значение для дальнейшего имеет известная теорема Гельфанда о существовании бикомпакта $R$ с любой заранее абстрактно заданной $F$-алгеброй $K(R)$. Для любого абстрактного множества (топологического пространства) $R$ каждую $F$-алгебру, состоящую из ограниченных действительных (соответственно непрерывных) функций, авторы называют (соответственно непрерывной) $F$-алгеброй над $R$. Далее, $F$-алгебру $K_R$ над $R$, являющуюся гомоморфным (изоморфным) образом некоторой $F$-алгебры $K$, называют (изоморфным) представлением $F$-алгебры $K$ на $R$. Ищутся все представления данной $F$-алгебры $K$ на данном множестве $M$ и с помощью этого исследуется связь между ними и расширениями топологических пространств.

Сформулируем утверждения, представляющиеся референту основными:

1. На любом множестве $M$ и для всякой $F$-алгебры $K$ над $M$, содержащей функцию $1(x) \equiv 1$, можно ввести вполне регулярную топологию $R(K)$, обладающую следующими свойствами: а) $R(K)$ — самая сильная топология на $M$ среди всех тех топологий, в которых всякая функция из $K$ непрерывна; б) для любого замкнутого множества $A$ и любой точки $x \in M \setminus A$ существует функция $f \in K$, разделяющая $A$ от $x$, в) для каждой точки $x_0 \in M$ замыкание $[x_0]$ в топологии $R(K)$ состоит из всех таких точек $x \in M$, что $f(x) = f(x_0)$ для любой функции $f \in K$.

2. Для любого топологического пространства $X$ и любого бикомпактного $T_1$-пространства $Y$ существует и притом лишь одно взаимно однозначное соответствие $\Phi \longleftrightarrow \varphi$ между множеством всех гомоморфизмов $\{\Phi\}$ $F$-алгебры $K(Y)$ в $K(X)$, переводящих функцию 1 в функцию 1, и множеством всех непрерывных отображений $\varphi$ пространства $X$ в $Y$ такое, что выполняется равенство $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$, каковы бы ни были функция $f \in K(Y)$ и точка $x \in X$.

3. Для любого топологического пространства $R$ и любого непрерывного представления $\Phi(K)$ $F$-алгебры $K$ на $R$, переводящих единицу в 1, существует такое расширение $\varepsilon R$ пространства $R$, что $F$-алгебра $K(\varepsilon R)$ является непрерывным изоморфным представлением $\Phi'(K)$ $F$-алгебры $K$ на $\varepsilon R$, удовлетворяющим следующему условию: г) для каждого $f \in K$ функция $\Phi(f)$ совпадает с функцией $\Phi'(f)$, рассматриваемой лишь на $R$. Отсюда легко вытекает известная теорема М. Стоуна о характеризации бикомпактов кольцами непрерывных функций.

Все расширения данного топологического пространства $R$ следующим образом разбиваются на классы: два расширения $\varepsilon R$ и $\varepsilon' R$ считаются принадлежащими одному классу, если существует такой изоморфизм $\Phi$ колец $K(\varepsilon R)$ и $K(\varepsilon' R)$, что для любой функции $f \in K(\varepsilon R)$ функция $\Phi(f)$ совпадает на $R$ с $f$. Гомоморфизм $\Phi$ кольца $K(\varepsilon R)$ в кольцо $K(\varepsilon' R)$, удовлетворяющий только что приведенному условию, авторы называют идентичным. Аналогично, отображение $\varphi$ расширения $\varepsilon R$ пространства $R$ в расширение $\varepsilon' R$ того же пространства $R$ называют идентичным, если $\varphi(x) = x$ для любой точки $x \in R$.

4. В каждом классе $E$ существует бикомпактное (не обязательно, $T_1$-) расширение $\beta_E R$, у которого каждая точка из $\beta_E R \setminus R$ замкнута.

5. Для произвольного расширения $\varepsilon R$ пространства $R$ и любого расширения $\beta_E R$ тогда и только тогда существует идентичное непрерывное отображение $\varphi$ расширения $\varepsilon R$ в $\beta_E R$, когда существует идентичный гомоморфизм $\Phi$ кольца $K(\beta_E R)$ в кольцо $K(\varepsilon R)$, переводящий 1 в 1; при этом $\varphi(\varepsilon R)$ тогда и только тогда плотно в $\beta_E R$, когда $\Phi$ является изоморфизмом.

6. В каждом классе $E$ расширений пространства $R$ расширение $\beta_E R$ единственно с точностью до идентичного гомеоморфизма.

Если $\varepsilon R$ — расширение пространства $R$ класса $E$, то система всех функций $f \in K(\varepsilon R)$, рассматриваемых лишь на $R$, является непрерывной алгеброй над $R$; причем эта алгебра $K_E$ не зависит от выбора расширения $\varepsilon R$, но лишь от класса $E$. Класс $E$ расширений топологического пространства $R$ называют классом однозначной продолжаемости, если каждую функцию $f \in K_E$ можно единственным образом непрерывно продолжить на всякое расширение $\varepsilon R$ из $E$. Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный класс был классом однозначной продолжаемости. Исследуется связь таких классов с непрерывными $F$-алгебрами над пространством $R$. Особо выделяется тот класс $E_0$, который содержит само пространство $R$. Ему (при наличии соответствующих аксиом отделимости) принадлежат воллменовское расширение $\omega R$, чеховское расширение $\beta R$, расширения Катетова $\sigma R$, $\sigma' R$, $\tau R$ и $\tau' R$, расширение Александрова $\alpha R$. Наконец, отметим следующий критерий принадлежности двух расширений $\varepsilon R$ и $\varepsilon' R$ нормального пространства $R$ к одному и тому же классу: замыкания любых двух открытых множеств пространства $R$ в расширении $\varepsilon R$ и в расширении $\varepsilon' R$ должны либо одновременно пересекаться, либо одновременно не пересекаться. Ю. М. Смирнов

**240. О полусводимых мерах.** Исии (On semi-reducible measures. Ishii Tadashi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 648—652 (англ.)

Исследуются полусводимые конечные меры в топологических пространствах. Работа тесно примыкает к работам Катетова (Katětov M., Fundam math., 1951, **38**, 74—84), а также Марчевского и Сикорского (Marczewski E., Sikorski R., Colloque math., 1948, **1**, № 2, 133—139). Мера, определенная на $\sigma$-поле $\mathfrak{B}$ множеств $B$ топологического пространства $R$, называется полусводимой, если существует такое замкнутое множество $\Phi \subset R$, что выполняются следующие два условия: 1) любое открытое пересекающееся с $\Phi$ множество $G \in \mathfrak{B}$ имеет положительную меру, 2) любое замкнутое не

пересекающееся с $\Phi$ множество $F \in \mathfrak{B}$ имеет меру нуль. Для любого топологического пространства $R$ мера $\mu$ называется бэровской (соответственно, борелевской), если область ее определения является наименьшим из $\sigma$-полей $\mathfrak{B}^*(R)$ (соответственно $\mathfrak{B}(R)$), содержащих поле полных прообразов нуля при любых возможных на $R$ непрерывных функциях (соответственно, содержащих поле всех замкнутых множеств). Говорят, что мощность (кардинальное число) $\mathfrak{m}$ имеет меру нуль, если для любой конечной меры, определенной на всех подмножествах какого-либо множества $M$ мощности $\mathfrak{m}$ и обладающей тем свойством, что мера каждого одноточечного множества равна нулю, мера всего множества $M$ также равна нулю.

Отметим следующие результаты: Для того чтобы всякая бэровская мера, определенная в нормальном пространстве $R$, была полусводимой, необходимо и достаточно, чтобы она была полусводимой на любом собственном замкнутом (типа $F_\sigma$) множестве пространства $R$ (у Катетова в соответствующей теореме пространство $R$ предполагается паракомпактным, но вместо замкнутых множеств берутся замкнутые дискретные множества). Для двузначных мер этот же результат верен и для вполне регулярных пространств. В любом паракомпактном пространстве $R$ следующие три условия оказываются эквивалентными: 1) всякая (двузначная) бэровская мера в $R$ полусводима, 2) всякая (двузначная) борелевская мера в $R$ полусводима, 3) для любой (двузначной) бэровской меры $\mu$ и для любой дискретной системы открытых множеств $G_\alpha$ (т. е. такой системы, что замыкания множеств $G_\alpha$ попарно не пересекаются и сумма замыканий множеств $G_\alpha$, взятых в любом числе, является замкнутым множеством) из равенств $\mu(G_\alpha) = 0$ вытекает равенство $\mu(\bigcup G_\alpha) = 0$. При том же предположении эквивалентными оказываются и два следующих условия: A) каждое замкнутое дискретное множество пространства $R$ имеет мощность меры нуль, B) для любой бэровской меры в пространстве $R$ существует такое замкнутое финально-компактное множество $S$ (т. е. множество, из любого открытого покрытия которого можно выбрать счетное или конечное подпокрытие), что мера каждого замкнутого не пересекающегося с $S$ множества из $\sigma$-поля $\mathfrak{B}^*(R)$ равна нулю. Если же, кроме паракомпактности, на пространство $R$ наложить еще требование совершенной нормальности (каждое открытое множество имеет тип $F_\sigma$), то условие A) эквивалентно следующему условию разложения: C) для любой борелевской меры $\mu$ пространство $R$ может быть разложено в сумму множеств $N$ и $S$, где $\mu(N) = 0$, а $S$ — финально-компактно. Если все пространство $R$ метризуемо, то в указанном разложении множество $S$ будет иметь счетную базу, и мы получим основной результат цитированной работы Марчевского и Сикорского.

Примечание референта. Из условий паракомпактности (соответственно, финальной компактности) и совершенной нормальности, налагаемых на пространство $R$ (соответственно, на множество $S$) вытекает, что всякое подмножество пространства $R$ (соответственно, множества $S$) будет также паракомпактным (соответственно, финально-компактным). Имеются опечатки и пропуски. Ю. М. Смирнов

241. **Алгебраические методы в теоретико-множественной топологии. Чогошвили Г. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 56

242. **Непрерывные отображения гильбертова пространства. Мацкина Р. Ю.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 135

243. **О представлении открытых отображений, повышающих размерность в виде суперпозиций. Келдыш Л. В.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 134—135

244. **Некоторые монотонные разбиения куба. Бинг** (Some monotone decompositions of a cube. Bing R. H.), Ann. Math., 1955, 61, № 2, 279—288 (англ.)

Пусть $M$ — шар в пространстве $E^3$, $H'$ — монотонное непрерывное разбиение границы $\mathrm{Bd}\, M$ шара $M$; $H$ — разбиение шара $M$, элементами которого являются элементы из $H'$ и внутренние точки шара $M$. Пусть $f$ — непрерывное отображение, порожденное разбиением $H$. Рассматривается пространство разбиения $H$ при некоторых предположениях, накладываемых на пространство разбиения $H'$.

Если пространство разбиения $H'$ — топологический эквивалент $\mathrm{Bd}\, M$, то существует гомеоморфное отображение пространства $H$ на $M$. При этом можно построить это отображение так, чтобы каждый элемент разбиения $H$ и его образ находились на одинаковом расстоянии от центра шара.

Если пространство $H'$ локально связано и не содержит простой замкнутой дуги, то $H$ гомеоморфно трехмерной сфере.

Если на пространство $H'$ не наложено дополнительных ограничений, то пространство $H$ гомеоморфно некоторому подмножеству $K$ трехмерной сферы $S^3$, причем дополнение $S^3 \setminus K$ распадается на области, границы которых гомеоморфны двумерной сфере $S^2$.

При доказательстве используется следующая характеристика трехмерной сферы, доказанная автором в другой работе (Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, 15—27). Разложением (partitioning) метрического пространства называется конечная совокупность открытых областей, не имеющих попарно общих точек, сумма которых всюду плотна в пространстве. Последовательность $G_i$ разложений метрического пространства $R$ называется убывающей, если каждый элемент из $G_{n+1}$ содержится в некотором элементе из $G_n$ и наибольший диаметр областей из $G_n$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Разложение $G$ называется регулярным, если каждый его элемент $g$ содержит все внутренние точки замыкания $\bar{g}$.

Для того чтобы локально связное множество $S$ было трехмерной сферой, необходимо и достаточно существование убывающей последовательности регулярных разложений $G_n$, обладающих следующими свойствами:

1. Граница каждого элемента из $G_n$ гомеоморфна сфере $S^2$.

2. Если границы двух элементов из $G_n$ пересекаются, то их общая часть есть двумерная клетка.

3. Пересечение границ трех элементов из $G_n$ есть множество, имеющее размерность 1 в каждой своей точке.

4. Если $g \in G_{n-1}$, то элементы $g_1, \ldots, g_n$ из $G_n$, лежащие в $g$, можно перенумеровать так, чтобы

$$(\mathrm{Bd}\, g + \mathrm{Bd}\, g_1 + \ldots + \mathrm{Bd}\, g_{j-1}) \cap \mathrm{Bd}\, g_j$$

было при $j = 1, 2, \ldots, n$ связным множеством.

А. Д. Тайманов

245. **Замкнуто неприводимые связные множества. Стреб** (Irreducible closed connexes. Strebe David D.), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 365—372 (англ.)

Связное множество $M$ называется (замкнуто) неприводимым относительно множества $A \subset M$, если не существует собственного (замкнутого) подмножества множества $M$, содержащего множества $A$. Множество $A$ называется базисом (фундаментальным множеством), если

$M$ (замкнуто) неприводимо относительно множества $A$ и не существует собственного (замкнутого) подмножества множества $A$, относительно которого $M$ было бы (замкнуто) неприводимым. Неприводимость (замкнутая) относительно множества $A$ короче обозначается как $i$-неприводимость ($iC$-неприводимость).

Изучается $iC$-неприводимость и множества, относительно которых данное множество $iC$-неприводимо. Рассматриваются также вопросы существования и единственности фундаментального множества. Точка $x$ множества $M$ называется разбивающей точкой, если $M \setminus x$ несвязно. Базис $B$ множества $M$ (если $M$ имеет базис) совпадает с множеством $N$ всех неразбивающих точек множества $M$. Если множество $M$ имеет фундаментальное множество $F$, то $F \subset B$. Если множество $M$ имеет фундаментальное множество, то оно имеет базис. Если множество $M$ имеет конечный базис, то оно имеет и фундаментальное множество; если базис $F$ состоит из $n$ точек, и $x$—разбивающая точка, то $M \setminus x$ состоит из $n$ компонент, каждая из которых пересекается с $F$.

Фундментальное множество не имеет предельных точек. Если множество $M$ имеет фундаментальное множество $F$, которое содержит множество $N$ всех неразбивающих точек, то $F$ есть единственное фундаментальное множество. Дается необходимое и достаточное условие совпадения базиса $B$ и фундаментального множества $F$. Локально компактное метрическое, связное, локально связное множество может иметь не более одного фундаментального множества.

А. Д. Тайманов

**246. О группе гомеоморфизмов простой дуги. Файн, Швейгерт** (On the group of homeomorphisms of an arc. Fine N. J., Schweigert G. E.), Ann. Math., 1955, 62, № 2, 237—253 (англ.)

Исследуется группа $G$ всех гомеоморфизмов отрезка $I = [0,1]$ на себя. причем $G$ рассматривается как абстрактная группа (без топологии). Через $F$ обозначена подгруппа всех гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию отрезка $I$, через $T$ — множество всех трансляций (т. е. гомеоморфизмов без неподвижных точек внутри отрезка $I$).

Устанавливаются следующие простые факты: каждая трансляция $t \in T$ есть произведение двух инволюций; каждый гомеоморфизм $g \in G$ есть произведение не более четырех инволюций; каждый гомеоморфизм $f \in F$ есть произведение двух трансляций ($F = T \cdot T$).

Дается критерий сопряженности двух элементов из $G$. Перечисляются все нормальные делители группы $G$ (кроме тривиальных — только два: $F$ и $Q$) и подгруппы $F$ (кроме тривиальных — только три: $Q_0$, $Q_1$, $Q$; здесь через $Q_0$ ($Q_1$) обозначено множество всех таких гомеоморфизмов $f \in G$, что $f(x) = x$ для всех $x$ из некоторой окрестности точки 0 (точки 1); $Q = Q_0 \cap Q_1$). Устанавливается, что группа $G$ допускает только внутренние автоморфизмы. Выводится необходимое и достаточное условие (сформулированное в терминах теории групп) для того, чтобы данная абстрактная группа была изоморфна $G$.

Наконец, устанавливается, что всякий гомеоморфизм окружности на себя является произведением не более чем трех инволюций.

В. А. Ефремович

**247. Свойство гомеоморфизмов плоскости. Эггльстон** (A property of plane homeomorphisms. Eggleston H. G.), Fundam. math., 1955, 42, № 1, 61—74 (англ.)

Пусть $(x, y)$ — декартовы координаты точки евклидовой плоскости $E$ и пусть $\theta$ — множество всех таких гомеоморфизмов $(x, y) \to (x', y')$ плоскости $E$ на себя, что или $x' = x$, $y' = \Phi(x, y)$ для всех $(x, y) \in E$, или $x' = \Phi(x, y)$, $y' = y$ для всех $(x, y) \in E$. Пусть $\Xi$ — группа гомеоморфизмов, порожденная множеством $\theta$. Улам (Ulam S., Fundam. math., 1935, 24, 324, problème 60) поставил вопрос, возможно ли аппроксимировать произвольный гомеоморфизм плоскости на себя элементами группы $\Xi$. Автор показывает, что ответ на этот вопрос зависит от значения, приписываемого слову «аппроксимировать», а именно:

1. Существует такой гомеоморфизм $G$ плоскости $E$ на себя, что для каждого элемента $\mathfrak{H} \in \Xi$ имеем:

$$\sup_{p \in E} \rho(\mathfrak{H}(p), G(p)) > 1.$$

2. Для каждого гомеоморфизма $G$ плоскости $E$ на себя существует такая последовательность $\{\mathfrak{H}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, элементов группы $\Xi$, что $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{H}_n(p) = G(p)$ для каждой точки $p \in E$.

Таким образом, решение проблемы Улама отрицательно, если аппроксимация должна быть равномерной. Однако, если мы ограничимся рассмотрением гомеоморфизмов некоторого квадрата на себя, тождественных на границе, то решение будет положительным.

3. Пусть $S$ — замкнутый квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, и пусть $\Gamma$ — множество гомеоморфизмов плоскости $E$ на себя, которые оставляют каждую граничную точку квадрата $S$ неподвижной. Пусть $\theta' = \theta \cap \Gamma$ и $\Xi'$ — группа, порожденная множеством $\theta'$. Тогда для каждого $G \in \Gamma$ и $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $\mathfrak{H} \in \Xi'$, что

$$\sup_{p \in S} \rho(\mathfrak{H}(p), G(p)) < \varepsilon.$$

J. W. Jaworowski

**248. О точках ветвления конечной деформации. Вейер** (Sur les points de ramification d'une déformation finie. Weier Josef), J. math. pures et appl., 1955, 34, № 2, 137—143 (франц.)

Приведены некоторые свойства неподвижных точек.

Пусть $F : P \times I \to P$ — непрерывное отображение, где $P$ — полиэдр, а $I$ — единичный отрезок. Множество всех точек $(p, \tau) \in P \times I$, удовлетворяющих условию $F(p, \tau) = p$, автор называет сингулярной формой деформации $F$. Деформация $F$ называется конечной, если ее сингулярная форма пуста или является одномерным размерно однородным полиэдром. Утверждается (без доказательства), что любая деформация $F$ может быть с какой угодно степенью точности аппроксимирована конечной деформацией.

Пусть $S$ — сингулярная форма конечной деформации $F$. Существует тогда такая конечная система простых дуг, дающая в сумме множество $S$, что внутренность каждой простой дуги не пересекается с остальными дугами и каждая из этих простых дуг не содержит двух точек $(p_1, \tau_1)$, $(p_2, \tau_2)$ с одним и тем же значением $\tau_1 = \tau_2$. Такое разбиение на простые дуги неоднозначно, но существует одно разбиение с наименьшим числом простых дуг; в этом случае рассматриваемые простые дуги, взятые без концевых точек, называются особенностями деформации $F$. Для всех точек $(p, \tau)$, принадлежащих одной и той же особенности, индекс неподвижной точки $p$ относительно отображения $f^\tau$, определяемого равенством $f^\tau(x) = F(x, \tau)$, $x \in P$, одинаков; этот индекс называется степенью рассматриваемой особенности. Особенности, имеющие ненулевую степень, называются существенными.

Точку $(q, \alpha) \in P \times I$ автор называет точкой разветвления деформации $F$, если, каковы бы ни были окрестности $U$, $V$ точек $q$, $\alpha$ соответственно в $P$, $I$, найдется такое $\beta \in V$, что отображение $f^\beta$ имеет в $U$ по край ней мере две существенные неподвижные точки.

Автор приводит подробные доказательства ряда очевидных свойств точек разветвления. Напрпмер, всякая точка разветвления конечной деформации является концевой точкой некоторой особенности (теорема 1); кон-

цтевая точка некоторой особенности тогда и только согда является точкой разветвления, когда хотя бы одной стороны к ней примыкает не менее двух существенных особенностей (теорема 2), и т. п.

В. Г. Болтянский

**249. Замечания к одной гомотопической проблеме.** **Вейер** (Bemerkungen zu einem Homotopieproblem. Weier Josef), Arch. Math., 1956, 7, № 2, 106 (нем.)

Приводятся определения и теоремы, мало отличающиеся от тех, о которых говорилось в предыдущем реферате. Кроме того, вводятся два числа: если $f$ и $f'$ — два гомотопных между собой отображения полиэдра $P$ в себя, не имеющих неподвижных точек, то через $\eta$ автор обозначает наименьшее число точек разветвления конечной деформации $F$, соединяющей эти отображения а через $\zeta$ — наименьшее число «ординат» $\tau$ точек ветвления $(q, \tau) \in P \times I$ деформации $F$. Доказаны некоторые (очевидные) свойства чисел $\zeta, \eta$, например: $\zeta \leqslant \eta$ (теорема 11); если $\zeta > 0$, то не существует деформации $F$, соединяющей $f$ и $f'$ и имеющей пустую сингулярную форму (теорема 8), и т. п.

В начале статьи приведены проблемы, из которых проблема IV вызывает недоумение. Автор интересуется, могут ли быть соединены деформацией с пустой сингулярной формой два отображения сферы в себя, не имеющие неподвижных точек. «Проблема» эта (в которой автор излишне требует, чтобы рассматриваемые отображения были гомотопны между собой) допускает тривиальное решение: если $f$—отображение сферы $S$ в себя, не имеющее неподвижных точек, то заставив (для любой точки $p \in S$) точку $f(p)$ равномерно по дуге большой окружности двигаться в точку $p$, диаметрально противоположную точке $p$, мы построим деформацию с пустой сингулярной формой, соединяющую $f$ с «антиподным» отображением сферы.

В. Г. Болтянский

**250. Одна аппроксимационная теорема.** **Вейер** (Ein Approximationssatz. Weier Josef), Compositio math., 1956, 12, № 3, 185—216 (нем.)

Доказана следующая теорема: Пусть $f^\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная деформация отображений топологического многообразия $P$ в себя и $\varepsilon$ — положительное число. Тогда существует такое натуральное $\zeta$ и такая непрерывная деформация $g^\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, отображений многообразия $P$ в себя, что $\rho(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и все отображения $g^\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, имеют самое большее $\zeta$ неподвижных точек. Если при этом отображения $f^0$ и $f^1$ сами имели лишь конечное число неподвижных точек, то можно дополнительно потребовать, чтобы было $f^0 = g^0$, $f^1 = g^1$.

Приведены некоторые простые следствия, например доказана гомотопическая инвариантность алгебраического числа неподвижных точек. Отметим, что доказанная теорема была использована автором в одной из предыдущих работ (РЖМат, 1955, 139), где она была приведена без доказательства.

В. Г. Болтянский

**251. О несущественных одномерных особенностях.** **Вейер** (Über unwesentliche eindimensionale Singularitäten. Weier Josef), Monatsh. Math., 1955, 59, № 3, 165—177 (нем.)

Рассматривается непрерывное семейство непрерывных отображений $F = \{f^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$ замкнутого многообразия $M$ положительной размерности, расположенного в евклидовом пространстве $R^n$. Предполагается, что каждое отображение $f^\tau : M \to M$ имеет только конечное число неподвижных точек и сингулярная форма $A$ семейства $F$ (объяснение терминологии см. реф. 248) является размерно однородным одномерным полиэдром (о естественности этого предположения см. РЖМат, 1956, 2048).

Доказывается, что если у семейства $F$ имеется особенность $A_1$ степени нуль, то сколь угодно малым изменением семейства $F$, не затрагивающим других особенностей и не меняющим данного семейства $F$ вне некоторой окрестности рассматриваемой особенности $A_1$, указанную особенность можно превратить в изолированную.

В случае двумерного многообразия $M$ доказывается, что если $A_1, \ldots, A_m$ — все особенности семейства $F$, причем $A_1$ имеет нулевую степень, то семейство $F$ можно тем же способом, что и выше, изменить таким образом, что вновь полученное семейство отображений будет иметь только особенности $A_2, \ldots, A_n$ (особенность $A_1$ называется в этом случае несущественной).

Л. Д. Кудрявцев

**252. О разложении одномерных множеств неподвижных точек.** **Вейер** (Über Zerlegung eindimensionaler Nullstellengebilde. Weier Josef), Math. Z., 1956, 64, № 1, 115—122 (нем.)

Пусть $P$ — замкнутое $r$-мерное многообразие в евклидовом пространстве $R^n$, $r > 1$, и $F$ — непрерывное семейство непрерывных отображений $P$ в себя: $F = \{f^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$, $f^\tau(P) = F(P, \tau)$. Для особенностей $A$ семейства $F$ предполагаются выполненными предположения, сформулированные в реф. 251. Через $a^\tau$ обозначается точка из многообразия $P$, непрерывно зависящая от параметра $\tau$.

Доказывается теорема: Пусть $A = \{a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1\}$ — особенность семейства $F$, а $U$ — такая окрестность множества $A$ в $R^{n+1}$, что $\overline{U}$ не пересекается ни с какой другой особенностью семейства $F$, кроме $A$; пусть далее $\zeta$ равно степени особенности $A$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — целые числа, для которых $\sum_{i=1}^m \zeta_i = \zeta$ и $\varepsilon > 0$, тогда существует такое семейство $F'$ отображений многообразия $P$ в себя (особенности которого удовлетворяют тем же исходным предположениям, что и особенности семейства $F$), что: 1) $\rho(F, F') < \varepsilon$ на $P$, причем $F = F'$ на $P \times I \setminus U$; 2) каждая особенность семейства $F'$ либо не пересекается с $\overline{U}$, либо содержится в $U$; 3) особенности семейства $F'$, расположенные в $U$, имеют вид: $A_i = \{a_i^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, причем $\lim a_i^\tau = \lim a^\tau$ при $\tau \to \alpha_k$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 0, 1$, и степень особенности $A_i$ равна $\zeta_i$.

Отмечается, что при некоторых предположениях имеет место в известном смысле и обратное утверждение о «стягивании» нескольких особенностей в одну.

Л. Д. Кудрявцев

**253. К теории эйлеровых полиэдров.** **Котциг** (Príspevok k teórii eulerovských polyédrov. Kotzig Anton), Mat.-fyz. časop., 1955, 5, № 2, 101—113 (словац.; рез. русс.)

Каждому ребру $h$ эйлерова многогранника ставится в соответствие целое число $\sigma(h)$, определяемое как сумма степеней его концевых вершин (степенью вершины называется число ребер многогранника, инцидентных с этой вершиной). Доказывается, что $\min_h \sigma(h) \leqq 13$; если степень всех вершин многогранника не ниже четырех, то $\min_h \sigma(h) \leqq 11$. Числа 13 и 11 в этих соотношениях понизить невозможно.

M. Fiedler

**254. О ремонтируемых схемах.** **Врублевская И. Н.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 134

Конечный связный граф без петель называется $k$-ремонтируемой схемой, если после удаления любых $k$

его элементов все оставшиеся вершины будут соединимы. Формулируется условие $k$-ремонтируемости, а также способы построения 2-ремонтируемых схем.

**255. О некоторых разложениях графа. Котциг** (O istých rozkladoch grafu. Kotzig Anton), Mat.-fys. časop., 1955, 5, № 3, 144—151 (словац.)

В конечном графе $G$ определяется степень связности $\sigma_G(u, v)$ между углами $u$, $v$ как целое число $k$, для которого: 1) в $G$ существуют такие $k$ ребер, что удаление их из графа $G$ делает узлы $u$, $v$ несоединимыми, 2) если в $G$ выпустить $k-1$ произвольных ребер, то в полученном таким образом графе узлы $u$ и $v$ будут соединимы. Далее полагаем $\sigma_G(u, u) = +\infty$. Показывается, что отношения $(\overset{k}{=})$ для $k = 1, 2, \ldots$, определенные соответствием $u (\overset{k}{=}) v \Leftrightarrow \sigma_G(u, v) \geqq k$, являются для любого $k = 1, 2, \ldots$ отношениями эквивалентности, относительно которых разложения на классы постепенно уплотняются. Далее, будем считать два ребра $h_1$, $h_2$ эквивалентными ($h_1 \sim h_2$) или, если $h_1 = h_2$, или, если каждая окружность графа $G$, содержащая $h_1$, содержит и $h_2$. Обозначим через $T_i$ ($i = 1, \ldots, r$) классы ребер по отношению к этому соотношению эквивалентности. Пусть $h$ — ребро в $G$ с концевыми узлами $u$, $v$. Оказывается, что $\sigma_G(u, v) = 1$ тогда и только тогда, когда $h$ не входит ни в одну окружность в $G$ (множество таких ребер обозначается через $H(1,2)$); $\sigma_G(u, v) = 2$ тогда и только тогда, когда $h$ принадлежит некоторому классу $T_i$, содержащему хотя бы два ребра (множество таких ребер обозначается через $H(2,3)$). Далее исследуются некоторые свойства регулярного графа $G$ $n$-й степени (т. е. графа, для которого степень каждого узла равна $n$).

Доказывается теорема: Если существует разложение графа $G$ на $n$ линейных факторов (König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Лейпциг, 1936, стр. 10), то $H(1,2) = \phi$ и для каждого $i = 1, \ldots, r$ все ребра класса $T_i$ заключаются в одном линейном факторе графа $G$. Если, далее, $n$ — четное число, то для любых двух узлов $u$, $v \in G$ число $\sigma_G(u, v)$ четно. Если $n$ — нечетное число, то для $u$, $v \in G$ число $\sigma_G(u, v)$ или четно, или равно $n$.

M. Fiedler

**256. Действительные функции на сферах. Флойд** (Real-valued mappings of spheres. Floyd E. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 957—959 (англ.)

Заметка относится к кругу вопросов, объединяющих теоремы Борсука, Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1942, 43, 739—741; Yamabe H., Yujobo Z., Osaka Math. J., 1950, 2, 19—22), Дайсона (Dyson F. J., Ann. Math., 1951, 54, 534—536) и др. Автор ставит вопрос об отыскании всех множеств $\Delta$ на сфере $S$, обладающих следующим свойством (*): для каждой непрерывной действительной функции $f$ на $S$ найдется такое вращение $r$ сферы, что во всех точках множества $r\Delta$ функция имеет одинаковые значения. В силу теоремы Какутани свойством (*) обладает множество $\Delta$ концов ортонормальных векторов. Доказывается, что свойством (*) обладает и любая тройка точек на двумерной сфере $S^2$.

В. А. Ефремович

**257. Теорема об антиподных множествах на $n$-мерной сфере. Яворовский** (A theorem on antipodal sets on the $n$-sphere. Jaworowski J. W.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, 3, № 5, 247—250 (англ.)

Пусть $M$ — замкнутое антиподное множество (т. е. множество, инвариантное относительно антиподного преобразования) $n$-мерной сферы $S^n$. Множество $M$ называется $p$-ацикличным, если оно ациклично во всех размерностях, меньших чем $p$. Если множество $M$ ациклично, то в $M$ существует истинная антиподная $p$-система $(\gamma^{-1}, \varkappa^0, \gamma^0, \ldots, \varkappa^p, \gamma^p)$, которая является такой последовательностью истинных цепей (в смысле Вьеториса) по модулю 2, лежащих в $M$, что: 1) $\gamma^{-1} = 1$, 2) $\partial\varkappa^{\nu+1} = \gamma^\nu$; 3) $\gamma^{\nu+1} = \varkappa^{\nu+1} + \widetilde{\varkappa}^{\nu+1}$, где $\widetilde{\varkappa}^{\nu+1}$ есть антиподный образ цепи $\varkappa^{\nu+1}$.

Автор приводит (без доказательства) следующую теорему: Пусть $A$ и $B$ — два замкнутых непересекающихся антиподных подмножества сферы $S^n$. Пусть далее множества $A$, $B$ являются $p$-ацикличными, соответственно $(n-p-1)$-ацикличным. Пусть, наконец, $(\gamma^{-1}, \varkappa^0, \ldots, \varkappa^p, \gamma^p)$ — истинная антиподная $p$-система в $A$ и $(\delta^{-1}, \lambda^0, \ldots, \lambda^{n-p-1}, \delta^{n-p-1})$ — истинная антиподная $(n-p-1)$-система в $B$. Тогда циклы $\gamma^p$ и $\delta^{n-p-1}$ зацеплены по модулю 2.

A. Kosiński

**258. Обобщенные спектры и их применения в теории гомологий. Гогошвили Г. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 136

**259. Гомологии многообразий. Альбер С. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 51—52

Рассматривается метод вычисления групп гомологий многообразий, основанный на теории двойственности Л. С. Понтрягина и примененный автором в ряде конкретных случаев (РЖМат, 1954, 1686; 1955, 4313; 1956, 3730).

**260. О группах гомологий расслоенных пространств. Серр** (Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés. Hirsch Guy), Bull. Soc. Math. Belgique, 1953 (1954), 6, 79—96 (франц.)

Излагается (без подробных доказательств) новый метод вычисления групп когомологий расслоенных пространств $(\widetilde{M}, F, M)$

Метод этот основывается на построении отображения $U: H^*(F) \to C^*(\widetilde{M})$, удовлетворяющего следующим условиям: 1) для любого $h \in H^*(F)$ часть копепи $U(h)$ на слое $F$ является коциклом класса $h$; 2) отображение $V: C^*(M) \otimes H^*(F) \to C^*(\widetilde{M})$, определенное формулой $V(c \otimes h) = p^*(c) \smile U(h)$, является мономорфизмом; 3) $\delta(\operatorname{Im} V) \subset \operatorname{Im} V$, где $\delta$ — кограничный оператор. Из этих условий следует, что группы гомологий произведения $C^*(M) \otimes H^*(F)$ относительно дифференциала $\Delta = V^{-1}\delta V$ изоморфны группам $H^k(\widetilde{M})$.

Примечание референта. Хотя метод применим, по-видимому, в весьма общей ситуации, автор предполагает рассматриваемое расслоенное пространство $\widetilde{M}$ конечным полиэдром, его проекцию $p$-симплициальным отображением, а область коэффициентов групп когомологий — полем. По мнению референта, единственное серьезное ограничение на пространство $\widetilde{M}$, необходимое для применения метода автора, состоит в том, чтобы фундаментальная группа базы $M$ пространства $\widetilde{M}$ тривиально действовала на группах когомологий $H^k(F)$ его слоя $F$.

М. М. Постников

**261. Характеристические циклы гладких многообразий. Рохлин В. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 55

Упоминаются работы Штифеля, Уитнея, Понтрягина, Черна и других авторов по теории характеристических циклов. Указано, что докладчику и Тому принадлежит единственный полный результат об инвариантности характеристических циклов Понтрягина (инвариантность характеристического числа четырехмерного ориентированного замкнутого многообразия).

**262. Алгебраические методы гомотопической топологии. Постников М. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 54—55

Рассматривается принадлежащее докладчику понятие натуральной системы и указаны некоторые применения этого понятия.

**263. Гомологии пространств замкнутых кривых на сферах. Шварц А. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 137

Утверждается, что данное Морсом вычисление типовых чисел mod 2 невырожденной замкнутой геодезической, вообще говоря, неверно для кратной геодезической. Однако типовые числа невырожденной геодезической по полю рациональных чисел все равны нулю, кроме, может быть, одного.

**264. Гомологии некоторых пространств отображений. Шварц А. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 137

Утверждается, что метод спектральных последовательностей позволяет вычислить гомологии пространства замкнутых путей односвязного компактного многообразия, откуда, в частности, вытекает теорема Люстерника — Фета о существовании замкнутой геодезической.

**265. Локально тривиальные точные последовательности пучков. Дёвель** (Notion de suite exacte de faisceaux localement triviale. Deheuvels René), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 11, 1183—1185 (франц.)

Пусть $F$ и $G$ — произвольные пучки абелевых групп над топологическим пространством $X$. Естественно определенный пучок ростков отображений пучка $F$ в пучок $G$ обозначим через $(F, G)$. Пучок $(F, G)$ содержит подпучок $\mathrm{Hom}(F, G)$ ростков гомоморфизмов. Тождественное отображение пучка $F$ определяет сечение пучка $\mathrm{Hom}\,(F,F)$ над всем пространством $X$. Это сечение автор называет фундаментальным классом пучка $F$ над пространством $X$.

Точная последовательность $0\to A\to B\to C\to 0$ пучков называется локально тривиальной (локально вполне тривиальной), если в окрестности каждой точки пространства $X$ фундаментальный класс пучка $C$ является образом некоторого сечения пучка $(C, B)$ (соответственно, пучка $\mathrm{Hom}(C, B)$).

Утверждается, что локальная тривиальность (локальная полная тривиальность) последовательности $0\to A\to B\to C\to 0$ является необходимым и достаточным условием точности последовательности $0\to(F, A)\to(F, B)\to(F, C)\to 0$ (соответственно, последовательности $0\to \mathrm{Hom}\,(F, A)\to \mathrm{Hom}\,(F, B)\to, \mathrm{Hom}\,(F, C)\to 0$).

М. М. Постников

**266. О работах Хирша. Лепаж** (Rapport sur les travaux de M. Guy Hirsch pendant la période. Prix François Deruyts (12-e période, 1950—1954). Lepage Th.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 11, 1025—1026 (франц.)

Отзыв о работах известного тополога Хирша в связи с присуждением ему премии Ф. Дерюи. Отзыв, составленный Лепажем, подписан также Годо и Бюро.

М. М. Постников

**267. Характеристичеекие классы комплексных алгебраических многообразий. Гамкрелидзе Р. В.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 53

Излагаются результаты В. И. Бурдиной (РЖМат, 1955, 2606) и докладчика (РЖМат, 1954, 2061).

---

**См. также:** 153, 154, 176 К, 209, 221, 288, 289, 533 К, 618, 808 Д

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**268. Расширимость разрешимых классов. Пхакадзе Ш. С.**, Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 10, 761—768

**Расширимость разрешимых классов. Пхакадзе** (ამოხსნად კლასთა გაფართოებადობა. ფხაკაძე შ.), საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 1955, 16, № 10, 761—768 (груз.)

Класс М множеств, лежащих в евклидовом пространстве $R^{(n)}$, называется инвариантным, если он замкнут относительно сложения (при не более чем счетном числе слагаемых), образования дополнения и движения, а также содержит пустое множество и единичный куб $R_0^{(n)}$ пространства. Если на таком классе можно задать неотрицательную, вполне аддитивную, инвариантную относительно движения меру $\mu$, для которой $\mu(R_0^{(n)})=1$, то класс называется разрешимым.

Для всякого разрешимого класса М существует содержащий его, более обширный, разрешимый класс $\mathbf{M}_1$.

Примечание референта. В определении понятия расширения (стр. 761) упущено указание на то, что класс $\mathbf{M}_1$ также должен обладать свойством $(P)$.

И. П. Натансон

**269. О компактности семейства вполне аддитивных функций. Клементьев З. И.**, Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 9—12

Пусть $R$ — абстрактное множество, $S=\{e\}$ — счетная система подмножеств $R$, причем $R\in S$, и если $e\in S$, то также $R-e\in S$. Пусть $T$ — наименьшее борелевское тело, содержащее все множества системы $S$. Семейство Ф вполне аддитивных функций $f(e)$, определенных на $T$, называется равномерно аддитивным, если $f(e^n+e_{n+1}+\ldots)\to 0$ равномерно относительно $f\in\Phi$ при $n\to\infty$, какова бы ни была сумма $e_1+e_2+\ldots$ непересекающихся множеств из $T$.

Доказывается теорема: Для компактности семейства Ф (в смысле сходимости для любого $e\in T$) необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равномерно аддитивным.

Эта теорема была доказана референтом при менее общих предположениях относительно $T$ (Матем. сб., 1947, 20(62), № 2, 317—329). В. М. Дубровский

**270. Теорема Витали и интегрирование. Данжуа** (Théorème de Vitali et intégration. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 13, 1385—1388 (франц.)

В абстрактной форме дается связь между свойством Витали для покрытий и представлением функций множеств в качестве интегралов от их производных; рассматривается ряд примыкающих сюда вопросов.

Л. Д. Кудрявцев

**271. Теория емкостей. Шоке** (The theory of capacities. Choquet Gustave), Ann. Inst. Fourier, 1953—1954 (1955), 5, 131—295 (англ.; рез. франц. XI)

Емкостью называется действительная функция $\varphi$, определенная в некотором классе $\mathcal{E}$ подмножеств топологического пространства $E$, неубывающая и полунепрерывная сверху. Внутренняя емкость $\varphi_*$ для каждого $A\subset E$ определяется либо формулой $\varphi_*(A)=\sup_{X\subset A}\varphi(X)\,(X\in\mathcal{E})$, когда существует множество из $\mathcal{E}$, содержащееся в $A$, либо формулой $\varphi_*(A)=\inf_{X\in\mathcal{E}}\varphi(X)$ в противном случае.

Внешняя емкость $\varphi^*$ определяется формулой $\varphi^*(A)=\inf\varphi_*(G)$, где $G$ — любое открытое множество

такое, что $A \subset G$. Исследуются условия выполнения равенства

$$\varphi_*(A) = \varphi^*(A). \qquad (1)$$

В частности, в случае классической ньютоновой емкости, определенной на компактных подмножествах некоторой области трехмерного пространства, равенство (1) устанавливается для борелевских и даже для аналитических подмножеств области. Это является решением проблемы, поставленной Брело и Картаном.

Автор выделяет интересные классы емкостей. В частности, исследуются емкости, удовлетворяющие неравенству

$$\varphi(X) - \sum_i \varphi(X \cup A_i) + \sum_{i,j} \varphi(X \cup A_i \cup A_j) - \ldots \ldots + (-1)^n \varphi(X \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant 0,$$

и дается их интегральное представление при помощи экспоненциальных функций множества, т. е. функций, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi(A \cup B) = \psi(A)\psi(B)$. Даются численные примеры и приложения полученных теорем. K. Urbanik

**272. О теореме Рисса. Фугледе** (On a theorem of F. Riesz. Fuglede Bent), Math. scand., 1955, **3**, № 2, 283—302 (англ.)

В абстрактной форме дается обобщение теоремы Рисса. Пусть $X$ — какое-либо множество, $\mathfrak{M}$ — некоторое σ-кольцо его подмножеств, $\mu$ — мера, определенная на множествах $M \in \mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ и совокупность всех конечных сумм непересекающихся множеств $A$ из системы $\mathfrak{A}$ вместе с пустым множеством образует поле, причем $0 < \mu(A) < \infty$, $A \in \mathfrak{A}$. Пусть $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — множество всех $\mu$-измеримых функций, определенных на $X$, для которых $\int_X |f(x)|^p \mu(dX) < \infty$, и $\varphi$ — комплекснозначная аддитивная функция множеств, определенная на множествах $A \in \mathfrak{A}$. Для того чтобы существовала функция $f \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $1 < p < \infty$, такая, что $\varphi(A) = \int_A f(x)\mu(dX)$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi(A_\nu)|^p / \mu(A_\nu)^{p-1} < c < \infty$$

для любой конечной системы непересекающихся множеств из $\mathfrak{A}$. Изучаются также случаи $p = 1$ и $p = \infty$, даются некоторые обобщения полученных теорем.

При более сильных ограничениях ($\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$) подобного рода теоремы были получены ранее Фуллертоном (РЖМат, 1956, 579) и референтом (РЖМат, 1956, 5791). Л. Д. Кудрявцев

**273. Замкнутые не σ-конечные подмножества аналитических множеств. Дейвис** (Non σ-finite closed subsets of analytic sets. Davies Roy O.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 174—177 (англ.)

Множество называют σ-конечным относительно меры Хаусдорфа размерности $s$, если его можно представить в виде счетной суммы множеств конечной меры. В 1952 г. автор показал, что каждое не σ-конечное аналитическое множество евклидова пространства содержит замкнутое подмножество бесконечной меры. В реферируемой заметке этот результат усилен: доказывается, что каждое не σ-конечное аналитическое множество в евклидовом пространстве содержит не σ-конечное замкнутое подмножество. Р. С. Гутер

**274. О плотности совершенных множеств. Безикович** (On density of perfect sets. Besicovitch A. S.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 48—53 (англ.)

Пусть задано ограниченное линейное совершенное множество $E$ и пусть $\psi = \{a_n\}$ — невозрастающая последовательность длин дополнительных интервалов $E$. Пусть

$$r_n = \sum_{m \geqslant n} a_m, \quad n\left(\frac{r_n}{n}\right)^{\alpha_n} = 1, \quad \alpha(\psi) = \varlimsup a_n \leqslant 1$$

и $\delta(\psi)$ — показатель сходимости ряда $\sum a_n$. Доказываются следующие теоремы, в которых мера и размерность хаусдорфовы: 1) Множество точек $E$, в которых верхняя плотность $E$ меньше 1, имеет размерность $\leqslant \alpha(\psi)$. 2) Множество точек $E$, в которых нижняя плотность $< 1$, имеет размерность $\leqslant \delta(\psi)$. Неравенства точные. Работа примыкает к статье РЖМат, 1955, 4945. С. И. Залгаллер

**275. Об одном обобщении интеграла Хана. Столяров Н. А.**, Уч. зап. Чкаловского пед. ин-та, 1956, № 9, 3—26

Вводится понятие обобщенного интеграла Хана $\int_a^b f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{d\psi(x)}$, где $\psi(x)$ — возрастающая функция (при $\psi(x) \equiv x$ получается интеграл Хана). Изучаются свойства и теоремы существования этого интеграла при различных предположениях о $f$, $\varphi$, $\psi$; устанавливаются аналоги формулы интегрирования по частям; отмечаются связи с интегралом Хеллингера; рассматриваются предложения о предельном переходе под знаком обобщенного интеграла Хана. П. И. Романовский

**276. Преобразование $m$-мерных интегралов Лебега. Мержик** (Transformation of $m$-dimensional Lebesgue integrals. Mak Jařín), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 2, 212—216 (англ.; рез. русс.)

Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi$ открытого множества $G$, лежащего в $F$-мерном евклидовом пространстве $E^m$, снова в $E^m$ доказывается формула замены переменного в виде.

$$\int_G f(t) \,|\, D\varphi(t) \,|\, dt = \int_{\varphi(G)} g(x)dx,$$

где

$$g(x) = \sum_{\varphi(t)=x} f(t)$$

При значительно более общих предположениях подобная теорема была получена ранее референтом (РЖМат, 1956, 5791, теорема 4°). Л. Д. Кудрявцев

**277. Интеграл от функции по функции. II. Лейн** (The integral of a function with respect to a function. II. Lane Ralph E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 392—401 (англ.)

Непосредственное продолжение предыдущей статьи (РЖМат, 1955, 1700). Рассматривается обобщенный интеграл Стилтьеса $\int_a^b u(x)\,dv(x)$ и изучается его связь с интегралом $\int_a^b u_1(x)\,dv_1(x)$ при наличии тех или иных связей между функциями $u$, $v$ и $u_1$, $v_1$, например, если $u_1 = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}$, $v_1 = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}$, где $a_{ij}$ — числа. Л. Д. Кудрявцев

**278. Интегральные неравенства. Роджерс** (Two integral inequalities. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 235—238 (англ.)

Величина интеграла

$$\iint \rho(X)\sigma(Y)\tau(-X-Y)\,dXdY$$

(где $\rho$, $\sigma$, $\tau$ — неотрицательные измеримые функции в $n$-мерном пространстве) не уменьшается после применения к $\rho$, $\sigma$, $\tau$ рассматриваемого в работе процесса сферической симметризации. П. И. Романовский

**279. О тотализации в пространствах нескольких измерений. II. Эномото** (Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. II. Enomoto Shizu), Osaka Math. J., 1955, 7, № 2, 157—178 (франц.)

В ч. I работы (РЖМат, 1956, 7255) автором введена для многомерных пространств тотализация ($\mathfrak{D}$). Отмечается, что для ($\mathfrak{D}$)-интегрируемой на многомерном интервале $R_0$ функции $f(p)$ найдется неубывающая последовательность замкнутых множеств $F_n$, почти покрывающая $R_0$ и такая, что ($\mathfrak{D}$)-интеграл от $f(p)$ по $R_0$ является пределом интегралов Лебега от $f(p)$ по $F_n$. Далее устанавливается, что ($\mathfrak{D}$)-интеграл, как функция интервала, внешне и внутренне непрерывен. Наконец изучаются производная неопределенного ($\mathfrak{D}$)-интеграла и вопросы обращения дифференцирования. П. И. Романовский

**280. Теорема аддитивности для лебеговой площади. Федерер** (An addition theorem for Lebesgue area. Federer Herbert), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 911—914 (англ.)

Пусть $K$ — конечное множество компактных топологических элементов размерности $\leqslant 2$ без общих внутренних точек, причем граница каждого элемента $K$ есть объединение некоторых элементов $K$ низшей размерности. Рассматривается непрерывное отображение $f$ комплекса $K$ в евклидово $n$-мерное пространство с $n \geqslant 2$ и $k$-мерная лебегова мера $L_k$. Через $L_2(f)$ обозначается площадь образа $K$, через $L_2(f|A)$ и $L_1(f|B)$ соответственно площадь или длина образа двумерного элемента $A$ или одномерного элемента $B$ из $K$. Доказывается теорема аддитивности: Если для каждого одномерного элемента $B$ из $K$ имеем $L_1(f|B) < \infty$, то $L_2(f) = \Sigma_A L_2(f|A)$, причем суммирование распространяется на все двумерные элементы $A$ из $K$.

Эта теорема является ответом на вопрос, поставленный Лебегом (Lebesgue H., Ann. mat. pura ed appl., 1902, 7, 231—359). Р. С. Гутер

**281. Распределения положительной массы, которые максимизируют некоторый обобщенный интеграл энергии. Бьерк** (Distributions of positive mass, which maximize a certain generalized energy integral. Björck Göran), Arkiv mat., 1956, 3, № 21, 255—269 (англ.)

Пусть $\mu$ — распределение массы на компактном множестве $F$ $n$-мерного евклидова пространства $R_n$ ($n \geqslant 1$); $x$, $y$ — точки $R_n$, $|x-y|$ — расстояние между ними; $\lambda > 0$ — число. Интегралы

$$p_\mu(x) = \int_F |x-y|^\lambda \, d\mu(y),$$

$$I(\mu) = \int_F p_\mu(x) \, d\mu(x)$$

называются потенциалом и обобщенным интегралом энергии массы $\mu$. Пусть $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_F$ — множество положительных масс на $F$ таких, что $\mu(F) = 1$. Доказывается, что существует такое распределение $\mu \in \mathfrak{M}$, называемое максимальным, что

$$I(\mu) = \sup_{\mu' \in \mathfrak{M}} I(\mu') = M.$$

Доказывается ряд теорем, описывающих максимальное распределение $\mu$ и его носитель $F_1 \subset F$, например: 1) $p_\mu(y) = M$, $y \in F_1$; $p_\mu(y) \leqslant M$, $y \in F$. 2) Если $n > 1$, то $F_1$ есть подмножество границы $F$. 3) Если $0 < \lambda < 2$, то $\mu$ единственно.

В случае $\lambda = 2$ доказано: 1) $F_1$ есть подмножество сферы (и подмножество границы $F$). 2) Если $F$ — шар радиуса $r$, то $M = 2r^2$ и распределение $\mu$ максимально тогда и только тогда, когда центр тяжести массы $\mu$ находится в центре шара (а носитель на границе $S$ шара). 3) Если $F$ содержится в шаре $K$ радиуса $r$ с границей $S$, причем $r$ — минимальный радиус шара, содержащего $F$, то $M = 2r^2$, $F_1 \subset S \cap F$ и существует максимальное распределение, для которого $F_1$ состоит не более чем из $n+1$ точек. В случае $\lambda > 2$ доказано, что $F_1$ всегда содержит не более $n+1$ точек, и приводятся примеры наличия нескольких неконгруэнтных максимальных распределений.

Распределения $\mu_1$ и $\mu_2$, для которых

$$\max_{x \in F} p_{\mu_1}(x) =$$

$$= \min_{\mu \in \mathfrak{M}} \max_{x \in F} p_\mu(x) = M',$$

$$\min p_{\mu_2}(x) = \max_{\mu \in \mathfrak{M}} \min_{x \in F} p_\mu(x) = M'',$$

называются min max и max min. Доказаны теоремы: 1) Если $F$ — сфера (не шар), то $p_{\mu_1}$ и $p_{\mu_2}$ постоянны на $F$. 2) Если $\lambda > 1$ и $F$ выпукло, то $\mu_1$ — одноточечная масса. Если в определении $\mu_1$ требование $\mu \in \mathfrak{M}$ заменить на $\mu \geqslant 0$, $\int_{R_n} d\mu = 1$, то $\mu_1$ называется свободным min max распределением. Тогда 3) в случае $\lambda > 1$ свободное min max распределение есть одноточечная масса. Х. Л. Смолицкий

**282. Свойства измеримости баз производных. Хаупт, Пок** (Propriétés de mesurabilité de bases de dérivation. Haupt O., Pauc Chr.), Portugaliae math., 1954, 13, № 1—2, 37—54 (франц.)

Даются достаточные условия измеримости верхних и нижних производных для функций множеств относительно некоторых производных баз (РЖМат, 1954, 2912). Л. Д. Кудрявцев

**283. Заметка о равномерных производных и полных дифференциалах. Островский** (Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales. Ostrowski Alexandre), Comment. math. helv., 1955, 29, № 4, 298—300 (франц.)

Доказывается эквивалентность предложенных автором и ранее установленных Севери (Severi F., Ann. mat. pure ed appl., 1935, 13, 1—35) необходимых и достаточных условий существования полного дифференциала для функций двух переменных. М. И. Алхимов

**284. Заметка о производных по направлению измеримых функций. Дейвис** (A note on linear derivates of measurable functions. Davies Roy O.), Proc. Cambridge Philos Soc., 1956, 52, № 1, 153—155 (англ.)

Мерой множества направлений в плоскости называют линейную меру множества точек $M$ на единичной окружности, для которых направление из центра к $M$ принадлежит множеству направлений. Через $P(\theta)$ обозначают луч, выходящий из точки $P$ в направлении $\theta$.

Строится плоское множество $E$ меры нуль такое, что почти в каждой точке $P$ плоскости либо множество направлений $\theta$ таких, что $P$ есть предельная точка множества $E \cap P(\theta)$, имеет полную внешнюю меру, либо множество направлений $\theta$ таких, что $E \cap P(\theta)$ пусто, также имеет полную внешнюю меру.

Отсюда автор заключает, что верхняя производная $\partial^\theta f(x,y)$ по направлению $\theta$ измеримой функции $f(x,y)$ двух действительных переменных не обязательно является измеримой функцией трех переменных $x$, $y$, $\theta$.

Уорд показал, что если $f(x, y)$ измерима по Борелю, то почти во всех точках $P$ или

I. $\partial^{\theta} f(P) = +\infty$ и $\partial_{\theta} f(P) = -\infty$ почти для всех $\theta$, или

II. Существует асимптотический дифференциал, заданный посредством $A\cos\theta + B\sin\theta$, и почти для всех $\theta$ имеет место

$$1)\ \partial^{\theta} f(P) = -\partial^{\theta+\pi} f(P) = A\cos\theta + B\sin\theta$$

$$\text{или } \partial^{\theta} f(P) = \partial^{\theta+\pi} f(P) = +\infty;$$

$$2)\ \partial_{\theta} f(P) = -\partial_{\theta+\pi} f(P) = A\cos\theta + B\sin\theta$$

$$\text{или } \partial_{\theta} f(P) = \partial_{\theta+\pi} f(P) = -\infty.$$

Показывается, что эти соотношения могут не иметь места почти всюду, если $f(x, y)$ измерима только по Лебегу. Ф. И. Шмидов

285. **Об обобщении понятия производной. Часар** (Sur une généralisation de la notion de dérivée. Csász ár Ákos), Acta scient. math., 1955, **16**, № 3—4, 137—159 (франц.)

Пусть дано произвольное семейство $\mathfrak{N}$ подмножеств прямой $-\infty < x < \infty$, обладающее свойствами: 1) если $A \in \mathfrak{N}$ и $B \subset A$, то $B \in \mathfrak{N}$; 2) если $A_i \in \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то $\sum_1^{\infty} A_i \in \mathfrak{N}$.

Обозначим через $\sup_{\mathfrak{N}}\limits_{x_0 < x < x_0+\delta} f(x)$ нижнюю грань множества чисел $y$, для каждого из которых $E\{x : f(x) > y, x_0 < x < x_0 + \delta\} \in \mathfrak{N}$. Тогда $\lim\limits_{\delta \to 0+} \sup_{\mathfrak{N}}\limits_{x_0 < x < x_0+\delta} f(x)$ называется верхним пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ справа при пренебрежении множеств семейства $\mathfrak{N}$. Аналогично определяются остальные три предела функции $f(x)$ в точке $x_0$.

С помощью понятий верхнего и нижнего пределов функции в точке справа и слева обычным образом определяются производные числа $\overline{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x_0)$, $\underline{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x_0)$, $\overline{f}^{-}_{\mathfrak{N}}(x_0)$ и $\underline{f}^{-}_{\mathfrak{N}}(x_0)$ и производная функции $f(x)$ при пренебрежении множеств семейства $\mathfrak{N}$.

Показывается, что пределы и производные числа, определенные таким способом, обладают привычными нам свойствами.

Основным результатом работы является следующее обобщение теоремы Данжуа о производных числах (Сакс С., Теория интеграла, 1949, М., 391): Всюду, за исключением множества семейства $\mathfrak{N}$ и множества меры нуль, для любой функции $f(x)$ имеет место один из четырех случаев: 1) все производные числа в точке конечны и равны между собой; 2) $\overline{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^{-}_{\mathfrak{N}}(x)$ — конечное число, другие производные числа бесконечны; 3) $\overline{f}^{-}_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x)$ — конечное число, другие производные числа бесконечны; 4) верхние производные числа равны $+\infty$, нижние равны $-\infty$.

Доказательство этой теоремы получается с помощью теоремы о контингенциях, являющейся соответствующим обобщением теорем Колмогорова и референта, Сакса и Хаслам-Джонса (см. предыдущую ссылку, стр. 384—385).

В работе изучены необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в новом смысле всюду, за исключением множества семейства $\mathfrak{N}$ и множества меры нуль. Они являются естественным видоизменением понятия функции с ограниченной обобщенной вариацией (см. предыдущую ссылку, стр. 318, 329).

Намечен путь распространения части указанных результатов на функции двух переменных.

И. Я. Верченко

286. **Обобщение дифференциала и его интегрирования. Родстрём** (A generalized differential and its integration. Rådström Hans), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 260—262 (англ.)

Дифференциал функции $f$ (действительного переменного) в точке $x$ определяется как класс эквивалентных функций от $h$, содержащий $f(x+h) - f(x)$ ($f_1(h)$ и $f_2(h)$ называются эквивалентными, если $f_1(h) - f_2(h) = o(h)$ при $h \to 0$). Приводятся краткие предварительные замечания об этом определении дифференциала и о процессах его интегрирования. П. И. Романовский

287. **Об асимптотически дифференцируемых функциях двух переменных. Гехер** (On approximately differentiable functions of two variables. Gehér László), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 3—4, 439—444 (англ.; рез. русс.)

По аналогии с одной одномерной теоремой референта (C. r. Acad. sci., 1917, 164, 142—144) доказывается теорема: Для того чтобы конечная измеримая функция $F(x, y)$, определенная на измеримом множестве $M$ евклидовой плоскости, была асимптотически дифференцируемой почти всюду на $M$, необходимо и достаточно, чтобы $M$ могло быть представлено как соединение множества меры нуль и конечной или счетной последовательности измеримых (замкнутых) множеств, на каждом из которых $F(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица.

А. Я. Хинчин

288. **Обобщения непрерывности. Каргал** (Generalizations of continuity. Cargal Buchanan), Proc. Iowa Acad. Sci., 1953 (1954), **60**, 477—481 (англ.)

Дается обобщение понятия непрерывности отображения хаусдорфова пространства в регулярное сепарабельное пространство. Введенное определение содержит как частный случай другие подобные определения (например, Bledsoe W. W., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, № 1, 114—115; Blumberg H., Duke Math. J., 1944, **11**, 671—685). Изучается связь между обобщенной непрерывностью в точке последовательности функций и предельной функции, а также связь обобщенной непрерывности с обычной. Л. Д. Кудрявцев

289. **Об одном пространстве функций. Куратовский** (Sur l'espace des fonctions partielles. Kuratowski K.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 61—67 (франц.)

Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства, $P(X, Y)$ — семейство всех непрерывных функций $y = f(x)$, определенных на компактных подмножествах пространства $X$ и значения которых принадлежат $Y$; $A_f$ — область определения функции $f$.

Пусть $f_n \in P(X, Y)$, $n = 1, 2, \ldots$. По определению, $f_n \to f$ при $n \to \infty$, если

1) $\rho(A_{f_n}, A_f) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\rho$ означает расстояние между указанными множествами;

2) из условий $x_n \to x$, $x_n \in A_{f_n}$, $x \in A_f$ следует, что $f_n(x_n) \to f(x)$.

Обозначая образ множества $A_f$ через $f(A_f)$, сопоставим каждой функции $y = f(x)$ множество $E_f = A_f \times f(A_f)$.

Доказывается следующее предложение: Если для $f \in P(X, Y)$ и $g \in P(X, Y)$ определить расстояние по формуле $d(f, g) = \rho(E_f, E_g)$, то $P(X, Y)$ будет метрическим пространством, причем соотношения $f_n \to f$ и $d(f_n, f) \to 0$ эквивалентны. А. Г. Джваршейшвили

**290. Непрерывные функции в логарифмико-степенной классификации согласно условиям Гёльдера. Тарнавский** (Continuous functions in the logarithmic-power classification according to Hölder's conditions. Tarnawski E.), Fundam. math., 1955, 42, № 1, 11—37 (англ.)

Результаты статьи тесно связаны с некоторыми исследованиями Орлича (Orlicz W., Studia math., 1948, 10, 21—39). Ее цель — построение функций с некоторыми особенностями вида

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n x) \qquad (1)$$

или

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \varphi(b^n x), \qquad (2)$$

где $\varphi$ — произвольная непостоянная функция периода $l$, удовлетворяющая условию Липшица (с постоянной $K$), коэффициенты $a_n$, $b_n$ и $a$, $b$ соответственно выбираются. Предполагается всегда, что $a_n>0$, $b_n\uparrow\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$, $0<a<1<b$.

Пусть $\omega$ — неубывающая функция, определенная для $h>0$, $\omega(h)\not\equiv 0$, $\omega(h)\to 0$ при $h\to+0$.

Предполагается, что $\lim_{h\to+0}\Lambda(h)<\infty$, где $\Lambda(h)=\sup\{t/\omega(t);\ 0<t\leqslant h\}$.

Вводятся следующие классы: класс $H_\omega$ функций $f$, удовлетворяющих неравенству $|f(x+h)-f(x)|\leqslant M\omega(|h|)$ с $M$, не зависящей от $x$ и $h$; и класс $H_\omega^\infty$ функций, удовлетворяющих всюду условию

$$\overline{\lim}_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)|/\omega(|h|)=\infty.$$

Если $\omega(h)=h^\delta|\log h|^\gamma$, то $H_\omega$ и $H_\omega^\infty$ обозначаются соответственно $H(\delta,\gamma)$ и $H^\infty(\delta,\gamma)$.

При рассмотрении двух функций $\omega_1$ и $\omega_2$ выражения, связанные с ними (например, $\Lambda$), различаются соответствующими значками 1 и 2.

Вначале доказывается существование постоянных $s$, $r$ и $D$ таких, что $0<r\leqslant s\leqslant l$ и для каждого $x$ существует $h_x$, удовлетворяющее условиям $r\leqslant|h_x|\leqslant s$, $|\varphi(x+h_x)-\varphi(x)|\geqslant 2^{-1}D$.

Основные результаты статьи:

A. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\Lambda(b_n^{-1}l)<\infty$, то функция (1) принадлежит $H_\omega$.

B. Если при $n\to\infty$ $\overline{\lim}\, a_n/\omega(sb_n^{-1})=\infty$,

$$\overline{\lim}\,\omega(sb_n^{-1})[a_nb_n\omega(rb_n^{-1})]^{-1}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i<\theta D(2sK)^{-1},$$
$$\overline{\lim}\,\omega(sb_n^{-1})[a_n\omega(rb_n^{-1})]^{-1}\times$$
$$\times\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i<2^{-1}(1-\theta),$$

где $0<\theta<1$, то функция (1) принадлежит $H_\omega^\infty$.

C. Если $\lim_{h\to+0}\omega_2(h)h^{-1}\Lambda_1(h)>0$, то $H_{\omega_1}\subset H_{\omega_2}$.

D. Если $\overline{\lim}_{h\to+0}\omega_2(h)h^{-1}\Lambda_2(h)=0$, то класс $H_{\omega_1}\cap H_{\omega_2}^\infty$ не пуст и содержит функцию вида (1).

E. Функция (1) принадлежит $H^\infty(\delta,\gamma)$, если выполняются условия (в них $n\to\infty$):

$$\lim a_n b_n^\delta(\log b_n)^{-\gamma}=\infty,$$
$$\lim(a_nb_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i<\theta D(2sK)^{-1},$$
$$\lim a_n^{-1}\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i<(1-\theta)2^{-1}r^\delta s^{-\delta},\ 0<\theta<1.$$

Далее результаты применяются для получения достаточных условий принадлежности функции (1) к $H(\delta,\gamma)\cap H^\infty(\delta_1,\gamma_1)$ с некоторыми $\delta$, $\gamma$, $\delta_1$, $\gamma_1$. Показывается, что для $0<\delta<1$ существует функция типа (2), принадлежащая к $H(\delta,0)\cap H^\infty(\delta,\gamma)$ для каждого $\gamma<0$.

В заключение рассматриваются «классические» функции с особенностями. Из предыдущих результатов следует, что при $ab>1+\pi$, $a<1/13$, $ab^\delta=1$ функция $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos b^nx$ принадлежит к $H(\delta,0)\cap H^\infty(\delta,\gamma)$ для каждого $\gamma<0$, $0<\delta<1$. Если $\varphi(x)=\min|x-N|$, где $N$ — произвольное целое, то функция (2) при всех $\gamma<0$, $0<\delta<1$ принадлежит $H(\delta,0)\cap H^\infty(\delta,\gamma)$, если $ab>2$, $ab^\delta=1$. Функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}\varphi(b^{n(n+\alpha)}x)$ обладает свойствами: если $ab>1$, $\alpha=0$, $ab^\delta=1$, то $f\in H(\delta,0)\cap H^\infty(\delta,\gamma)$ для каждого $\gamma<0$ независимо от выбора $\varphi$. С другой стороны, если $ab=1$, $\alpha>0$, $b>(1+2sKD^{-1})^{1/\alpha}$, то $f\in H(\delta,0)\cap H^\infty(1,\gamma)$ для произвольных $0<\delta<1$, $\gamma<0$. Построены также другие примеры. A. Alexiewicz

**291. Об одном условии компактности семейства непрерывных функций. Клементьев З. И.,** Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 13—14

Доказывается теорема: Для того чтобы семейство $\{x(t)\}$ непрерывных функций, заданных на $[a,b]$, было компактным, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n(t)\}\subset\{x(t)\}$ функции

$$\bar{x}(t)=\sup\{x_n(t)\},$$
$$\varphi(t)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n(t),$$
$$\underline{x}(t)=\inf\{x_n(t)\},\ \psi(t)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n(t)$$

были непрерывны. В. М. Дубровский

**292. Свойства (по расстоянию) действительных функций, заданных в евклидовом пространстве. Фрода** (Propriétés (à distance) des fonctions réelles dans un espace euclidien. Froda Alexandre), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 16, 1948—1951 (франц.)

Устанавливается ряд предложений о поведении произвольной конечной функции, заданной на $E^n$, по отношению к семействам множеств вида $\{\mathscr{J}(\mathscr{P})\}$, где $\mathscr{P}\in E^n$, а множество $\mathscr{J}(\mathscr{P})$ удовлетворяет условиям: 1) $\mathscr{J}(\mathscr{P})$ пересекается с каждым лучом, исходящим из $\mathscr{P}$, в единственной точке $P$; 2) $d(\mathscr{P},P)$ — непрерывная функция точки $P$; 3) существует постоянная $\rho>0$ такая, что $\rho<d(\mathscr{P},P)<2\rho$. А. Я. Дубовицкий

**293. О разрывах квазимонотонных функций многих переменных. Кидзу** (Some notes on the discontinuity of a quasi-monotone function in many variables. Kizu Ichiro), 京都工藝纖維大學. 纖維學部學術報告, Кёто когэй сэньи дайгаку. Сэньи гакубу гакудзюцу хококу, Bull. Fac. Text. Fibers. Kyoto Univ. Industr. Arts and Text. Fibers, 1954, 1, № 1, 136—141 (англ.)

Функция $F(x_1,\ldots,x_n)$, определенная на $E^n$, называется квазимонотонной, если:

I. $\Delta F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Delta_1[\Delta_2[\ldots[\Delta_nF(x_1,x_2,\ldots,x_n)]\ldots]]\geqslant 0$, где $\Delta_iG(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=G(x_1,\ldots,x_i'',\ldots,x_n)-G(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n)$ и $x_i''>x_i'$.

II. $F(-\infty,x_2,\ldots,x_n)=F(x_1,-\infty,x_3,\ldots,x_n)=\ldots=F(x_1,\ldots,x_{n-1},-\infty)=0$.

III. $F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = k$.

Устанавливается, что такая функция монотонно не убывает с возрастанием координат точки $x$.

1. Для того чтобы $F(x_1, \ldots, x_n)$ была разрывна в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ по переменным $x_1, \ldots, x_s$, $s \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы $F(x_1^0 + 0, \ldots, x_s^0 + 0, x_{s+1}^0, \ldots, x_n^0) - F(x_1^0 - 0, \ldots, x_s^0 - 0, x_{s+1}^0, \ldots, x_n^0) > 0$.

2. $F(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на всем $E^n$, исключая не более, чем счетное множество гиперплоскостей $x_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Если $F(x_1, \ldots, x_n)$ имеет разрыв в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ по переменным $x_1, \ldots, x_s$, то $F(x_1, \ldots, x_n)$ разрывна во всех точках $(x_1^0, \ldots, x_s^0, x_{s+1}, \ldots, x_n)$, где $x_{s+j} \geqslant x_{s+j}^0$. А. Я. Дубовицкий

**294. Об определении функции, непрерывной по каждому переменному в отдельности, ее значениями на плотном множестве. Маркус** (Asupra determinării unei funcţii parţial continue prin valorile luate pe o mulţime densă. Marcus S.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 11, 1563—1568 (рум.; рез. русс., франц.)

Содержатся некоторые обобщения результатов Серпинского и референта о функциях, непрерывных по каждой переменной. Однако следствие к теореме III и теорема, приведенная в резюме, неверны. Г. П. Толстов

**295. О продолжении функций и о вложении классов функций. Кудрявцев Л. Д.**, Докл. АН СССР, 1956, 107, № 4, 501—504

Обозначения см. РЖМат, 1953, 148, 149. Пусть $K^{(m)}$ есть $m$-мерное $k$ раз дифференцируемое многообразие в $n$-мерном пространстве $R_n$ и $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пусть далее каждой (допустимой) системе $(\lambda) = \{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n\}$ неотрицательных целых чисел соответствует определенная на $K^{(m)}$ функция $\psi_{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n} \in H_p^{(\rho-\lambda)}(K^{(m)})$, где $\rho = r - (n-m)/p$, $\lambda = \sum_{m+1}^{n} \lambda_k$. Тогда при $k > r$ по по теореме референта (РЖМат, 1953, 148, 149) можно в $R_n$ определить функцию $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, обладающую свойствами:

1) $f \in H_p^{(r)}(R_n)$;

2) $\| f \|_{H_p^{(r)}(R_n)} \leqslant c \Sigma_{(\lambda)} \| \psi_{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n} \|_{H_p^{(\rho-\lambda)}(K^{(m)})}$, где суммирование распространяется на все допустимые $(\lambda)$;

3) $f^{(\lambda)}|_{K^{(m)}} = \psi_{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n}$, где $f^{(\lambda)}$ — производная от $f$ порядков $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ по $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Эту теорему при $1 \leqslant p < \infty$ автор усиливает, добавляя, что функция $f$ может быть построена так, что она будет $k$ раз непрерывно дифференцируемой вне $K^{(m)}$ и, кроме того, ее частные производные в окрестности компактного подмногообразия $K^{(m)}$ будут иметь определенный рост, характеризуемый конечностью некоторых интегралов.

Усиление имеет место еще в том отношении, что многообразие $K^{(m)}$ не обязательно замкнуто и ограничено. Вводится норма функции $f$

$$\| f \|_{E}^{(n)}{}_{p(\sigma, r_\Gamma)} = \left( \int_E r_\Gamma^{\sigma} |f|^p \, dE \right)^{1/p}, \qquad (1)$$

где $1 \leqslant p < \infty$, $\sigma > 0$, $E$ — соответствующим образом определяемая $n$-мерная окрестность $m$-мерного многообразия $\Gamma$ и $r_\Gamma$ — расстояние точки $E$ до $\Gamma$. Автор доказывает ряд неравенств типа неравенств Пуанкаре. В левой части их фигурирует норма вида (1) функции $f$, а в правой — нормы этого же вида частных производных от $f$ и нормы граничных для $f$ функций, определенных на $(n-1)$-мерных граничных для $E$ многообразиях. В частности, в теореме 2 оцениваются нормы вида (1) частных производных от $f$ через подобные нормы частных производных от $f$ более высокого порядка и нормы некоторых граничных функций.

Даются достаточные условия для того, чтобы функция $f \in H_p^{(r)}(G)$ могла быть продолжена за пределы $G$ с сохранением класса.

Отмечается, что на основе указанных общих результатов могут быть эффективно исследованы при помощи вариационных методов эллиптические уравнения, вырождающиеся на границе области. В качестве примера указывается дифференциальное уравнение

$$L[u] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( x_n^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0 \qquad (0 \leqslant \alpha < 1),$$

рассматриваемое для области $n$-мерного пространства, граница которой содержит части, находящиеся в плоскости $x_n = 0$. С. М. Никольский

**296. Продолжение функций класса $C^\infty$. Ивамура** ($C^\infty$級函數のextension.岩村聯), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 2, 91—92 (япон.)

Рассматривается вопрос о продолжении функции класса $C^\infty$, заданной на прямоугольнике $A$: $|x_i| \leqslant a_i$, $i = 1, \ldots, n$, на все пространство $R^n$. Он сводится к следующему: при заданной последовательности функций $f_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots$ класса $C^\infty$ в $A_k^{n-1}$: $x_1 \leqslant 0, \ldots, x_k \leqslant 0, |x_{k+1}| \leqslant a_{k+1}, \ldots, |x_{n-1}| \leqslant a_{n-1}$, найти функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$ класса $C^\infty$ в $A_k^n$, удовлетворяющую при $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A_k^{n-1}$ условиям

$$\frac{\partial^i F}{\partial x_n^i} = f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad i = 0, 1, \ldots$$

При помощи функции $\varphi(t)$ класса $C^\infty$ в $R^1$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(t) \geqslant 0, \ \varphi(0) = 1, \ \varphi^{(j)}(0) = 0 \ (j \geqslant 1), \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \, dt = 1,$$

строится последовательность функций $\varphi_j(t; c)$:

$$\varphi_j(t; c) = \int_0^t \varphi_{j-1}(\tau; c) \, d\tau, \ \varphi_0(t; c) = \varphi(t/c).$$

Решение второго вопроса получается с помощью ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varphi_j(x_n; c_j),$$

где $c_j$ — некоторые постоянные.

Указывается приложение метода автора в общих случаях. Ким Зи Зень

**297. Об экстремумах по одной переменной функции двух переменных и понятии полунепрерывности в семействе множеств. Скорца-Тозо** (Sugli estremi parziali di una funzione di due variabili e la nozione di semicontinuità in una famiglia di insiemi. Scorza Toso Annamaria), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte I, 1955, 24, 93—102 (итал.)

Пусть $I$ — плоское множество, $I_y$ — его проекция на вертикальную ось и $S(y)$ — пересечение $I$ с горизон-

тальной прямой, имеющей ординату $y$; $f$ — функция, определенная на $I$. Положим

$$e'(y) = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in S(y)\},$$
$$e''(y) = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in S(y)\}.$$

Рассматриваются следующие свойства (Scorza Dragoni G., Rend. Acad. naz. Lincei, 1930, 11, 865—872): c) если множество $I' \subset I$ замкнуто в $I$, то и $I'_y$ замкнуто в $I_y$; a) если множество $I' \subset I$ открыто в $I$, то и $I'_y$ открыто в $I_y$. Известны (см. предыдущую ссылку) следующие теоремы:

Если $I$ обладает свойством c), все множества $S(y)$ замкнуты и $f$ полунепрерывна снизу в $I$, то $e' \in I_y$. Если $I$ обладает свойством a) и $f$ полунепрерывна сверху в $I$, то $e'' \in I_y$.

Цель статьи — дать эквивалентные формулировки свойств c) и a). Функция $S(y)$ (ее значениями являются множества) называется полунепрерывной снизу в $y_0$, если для каждой окрестности $U$ каждой точки $(x, y_0) \in S(y_0)$ существует окрестность $V$ точки $y_0$ такая, что $S(y) \cap U \neq 0$ для каждого $y \in I_y \cap V$. Функция $S$ называется полунепрерывной сверху в $y_0$, если $S(y_0)$ содержит все точки $(x, y_0)$, удовлетворяющие условию: для каждой окрестности $U$ точки $(x, y_0)$ и окрестности $V$ точки $y_0$ из $y_0 \neq y \in I_y \cap V$ следует, что $S(y) \cap U \neq 0$. Доказывается, что свойство a) эквивалентно полунепрерывности снизу $S$.

Основные результаты. Если множества $S(y)$ замкнуты и имеет место свойство c), то функция $S$ полунепрерывна сверху. Если имеет место свойство c) и множество $S(y)$ ограничено для каждого $y$, то множество $I$ локально ограничено в вертикальном направлении. Наконец, если множество $I$ локально ограничено в вертикальном направлении и $S$ полунепрерывна сверху, то имеет место свойство c). Эти утверждения дают возможность автору переформулировать теоремы Скорца-Драгони. В заключение рассматриваются некоторые частные случаи. Если $I$ — замкнутый прямоугольник и $f$ полунепрерывна снизу относительно $y$, то $e''$ полунепрерывна снизу. Однако полунепрерывность снизу $f$ в прямоугольнике относительно $y$ не влечет полунепрерывности сверху $e''$. A. Alexiewicz

298 К. **Мера, интеграл и их алгебраизация.** К а р а т е о д о р и (Mass und Integral und ihre Algebraisierung. C a r a t h é o d o r y C.), Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1956, 337 S. (нем.)

Систематически излагается абстрактная теория меры и интеграла над элементами булевой алгебры, построенная в ранее опубликованных работах автора (1938—1944 гг). Изложен также ряд приложений этой общей теории. Р. С. Гутер

## ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

299. **Система аксиоматической теории множеств. Часть VII. Б е р н е й с** (A system of axiomatic set theory. Part VII. B e r n a y s P a u l), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 2, 81—96 (англ.)

Продолжение ряда статей автора (J. Symbolic Logic, 1937, 2, 65—77; 1941, 6, 1—17; 1942, 7, 65—89, 133—145; 1943, 8, 89—106; 1948, 13, 65—79), содержащих следующую систему аксиом классической теории множеств.

Основные понятия аксиоматики: множество (м.), класс (к.), быть элементом м., быть элементом к. Множества обозначаются строчными, классы — прописными буквами. Пара $\langle a, b\rangle$ всегда понимается в смысле упорядоченной пары. Обратным к к. пар $\langle a, b\rangle$ называется к. соответствующих пар $\langle b, a\rangle$. Областью к. пар $A$ называется к. первых членов пар; обратной областью $A$ называется область обратного к. К. пар $F$ называется функцией, если для каждого элемента $a$ области имеется единственный элемент $b$ обратной области такой, что $\langle a, b\rangle$ принадлежит $F$. Говорится, что к. $A$ представлен множеством $b$, если каждый элемент $A$ является элементом $b$, и наоборот. К. пар $A$ называется взаимно однозначным соответствием, если как $A$, так и обратный к. являются функциями. Аксиомы:

I (1). Если м. $a$ имеет те же элементы, что и м. $b$, то эти м. равны.

I (2). То же для к. $A$ и $B$.

II (1). Существует пустое м.

II (2). К множеству $s$ можно добавить в качестве элемента любое м. $c$, не входящее в $s$ в качестве элемента.

IIIa (1). Для каждого м. $a$ существует к., единственным элементом которого является $a$.

IIIa (2). Для каждого к. $A$ существует к., которому некоторое м. принадлежит тогда и только тогда, когда оно не принадлежит $A$.

IIIa (3). Для всяких двух к. $A$, $B$ существует к., которому м. принадлежит тогда и только тогда, когда оно принадлежит как $A$, так и $B$.

IIIb (1). Существует к., элементами которого являются м., содержащие точно один элемент.

IIIb (2). Существует к., элементами которого являются такие пары $\langle a, b\rangle$, что м. $a$ является элементом м. $b$.

IIIb (3). Для каждого к. $A$ существует к., элементами которого являются пары м. $\langle a, b\rangle$ такие, что $a$ является элементом $A$.

IIIc (1). Для каждого к. пар существует область.

IIIc (2). Для каждого к. пар $A$ существует обратный к.

IIIc (3). Для каждого к. пар вида $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ существует к., элементами которого являются соответствующие пары $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$.

IV (аксиома выбора). Каждый к. пар $C$ имеет подкласс, который является функцией и имеет ту же область, что и $C$.

Va. Если класс представлен множеством, то каждый подкласс его также представлен множеством.

Vb. Если область взаимно однозначного соответствия представлена множеством, то обратная область также представлена множеством.

Vc. К., являющийся суммой элементов некоторого м., представлен множеством.

Vd. К. всех подмножеств некоторого множества представлен множеством.

VI (аксиома бесконечности). Существует к., элементы которого взаимно однозначно соответствуют элементам некоторого собственного подкласса, причем область соответствия представлена множеством.

VII. Для каждого непустого к. $A$ существует м. $b$, являющееся элементом $A$ и не имеющее ни одного общего элемента с $A$.

При помощи I—III и VII в предыдущих частях развивается арифметика порядковых чисел. Анализ (дедекиндовы сечения, предельная точка, мера Лебега) строится на основе I—III, VII и двух аксиом, которые следуют из I—VI:

IVs. Каждый к. пар, областью которого является к. конечных порядковых чисел $N$, имеет подкласс, который является функцией с областью $N$.

А к с и о м а о с ч е т н о м. Каждый счетный к. представлен множеством.

Доказываются теоремы Бернштейна о мощностях и Цермело о полном упорядочении всякого множества. Основой для «общей теории м.» служат I—IV, Va, Vb.

При помощи интерпретаций $\Pi_0$, $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ доказывается независимость аксиом VI, Vb, Vc, Vd.

(В первой части работы были введены аксиомы I—III и была доказана теорема о существовании классов; во второй введены остальные аксиомы и построена неймановская теория ординалов, а также пеановская арифметика; в третьей рассматривался анализ; в четвертой — построение теории мощностей и порядковых типов; в пятой — трансфинитная рекурсия, а также абстрактные алгебры; в шестой части изучалась роль аксиомы VII, в частности в связи с вопросами сравнимости классов, а также рассматривались некоторые вопросы независимости аксиом).

В реферируемой части работы построена модель $\mathfrak{M}_1$, доказывающая независимость VII. Другая модель $\mathfrak{M}_2$ удовлетворяет I—IV, Vc и VII, но не удовлетворяет Vabd. На основе системы $Z$ (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, I, Berlin, 1934, стр. 371) строится модель, доказывающая непротиворечивость I—III, VII; утверждается, что эта модель удовлетворяет также IV, V.

Наконец, показано, что аксиома III b (1) может быть выведена из остальных аксиом III и I (1). В одной из сносок отмечается, что в гёделевской системе Σ (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 96—149) аксиома B8 вытекает из B1—B7.

В. К. Детловс

**300. О теории трансфинитов. Ака** (超限論法について. 赤攝也), 數學. Сугаку, 1955, **7**, № 1, 31 (япон.)

Известно, что аксиома выбора ([$A$]), лемма Цорна ([$Z$]), теорема о возможности сравнения мощностей ([$M$]) и теорема о возможности вполне упорядочения ([$W$]) эквивалентны между собой.

Автор упрощает доказательства утверждений [$A$]→[$Z$] и [$M$]→[$W$]. Лю Чун Хо

**301. Абстрактные множества и основания математического анализа. Вьола** (Gli insiemi astratti e i fondamenti dell' analisi matematica. Viola Tullio), Archimede, 1955, **7**, № 4—5, 150—164 (итал.)

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1955, 5571). Дискуссии подвергаются: 1) общее понятие предела вещественной функции абстрактного аргумента (включая концепцию Мура); 2) понятие предела множества, зависящего от абстрактного аргумента; 3) общие идеи теории меры. Статья не содержит новых результатов.

А. Я. Хинчин

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

**302. Колебание частных сумм рядов Фурье. Боас** (Oscillation of partial sums of Fourier series. Boas R. P., Jr), J. Analyse Math., 1952—1953, **2**, 110—125 (англ.; рез. иврит)

Пусть $f(x)$ — действительная интегрируемая функция периода $2\pi$ с рядом Фурье $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, для которой существует сопряженная функция $\tilde{f}(x)$, и пусть $s_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ — соответственно суммы Фурье и Фейера для $f(x)$.

Теорема 1. Если $s_n(0) \geqslant f(0)$ для всех $n$, функция

$$\varphi(t) = f(t) + f(-t) - 2f(0)$$

имеет в окрестности нуля абсолютно непрерывную производную и, кроме того, $\varphi''(0) = 0$, а $x^{-1}\varphi''(x) \in L(0, 2\pi)$, то $\varphi(x) = 0$ почти всюду, $f(x) - f(0)$ — нечетная функция и $s_n(0) = f(0)$ для всех $n$.

Теорема 2. Если $s_n(0) \geqslant f(0)$ для всех $n$ и в некоторой окрестности нуля $\tilde{f}(x)$ абсолютно непрерывна, причем $x^{-1}\tilde{f}'(x) \in L(0,2\pi)$, то $f(x) - f(0)$ нечетна.

Кроме того, доказывается группа теорем, в которых при условиях, налагаемых на $f(x)$ в окрестности нуля, и некоторых предположениях относительно $s_n$ получаются выводы о поведении $f(x)$ почти всюду. Так, по теореме 4 из постоянства $\varphi(x)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и выполнения неравенств

$$s_n(0) - f(0) \geqslant -e^{-an},\ s_{n+1}(0) - f(0) \geqslant -e^{-an},\ a > 0$$

(или им противоположных с правой частью $e^{-an}$) вдоль некоторой целочисленной последовательности следует, что $\varphi(x) = 0$ почти всюду (а значит, $f(x) - f(0)$ нечетна и $s_n(0) = f(0)$ для всех $n$).

В теоремах 6—8 из аналитичности $f(x)$ (соответственно $\tilde{f}(x)$) в окрестности нуля и подобных же неравенств относительно $s_n$ следует аналитичность $f(x)$ ($\tilde{f}(x)$) почти всюду.

Установлено еще несколько аналогичных предложений. И. М. Ганзбург

**303. Лакунарные ряды Фурье. II. Сато** (Lacunary Fourier series. II. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 8, 508—510 (англ.)

Изучаются вопросы абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами. Методы доказательства аналогичны методам предыдущей заметки (РЖМат, 1956, 5806).

Теорема. Пусть функция $f(t) \in L(0,2\pi)$ имеет ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos n_k t + b_{n_k} \sin n_k t) \qquad (1)$$

и пусть $1/2 < a < \alpha < 1$, $0 < \beta < (2-\alpha)/3$, $\beta/2 < \alpha - a \leqslant (2-\alpha-\beta)/4$. Если $|n_{k+1} - n_k| > 4ekn_k^{\beta}$, $k^{1/(2\alpha-2a-\beta)} < n_k < e^{2k/(2+\alpha+\beta)}$, $h^{-\beta}\int_0^{h^\beta} |f(t) - f(t \pm h)|^2 dt = O(h^{2\alpha})$ при $h \to 0$ и $\tau^{-1}\int_0^{\tau} |f(t) - f(t \pm h)|^2 dt = O(1)$ равномерно при $\tau > h^\beta$, то ряд (1) абсолютно сходится при всех $t$. П. Л. Ульянов

**304. О некоторых тригонометрических рядах. XVI. Идзуми** (Some trigonometrical series. XVI. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 8, 511—512 (англ.)

Статья посвящена тем же вопросам, как и некоторые предыдущие заметки автора (см., например, РЖМат, 1955, 2156; 1956; 2890), и касается сильной сходимости рядов Фурье почти всюду.

Доказывается теорема: Пусть $f(x) \in L(0,2\pi)$ имеет ряд Фурье $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$ с частными суммами $s_n(x)$. Если $p > 1$, $p \geqslant \lambda \geqslant 1$ и

$$\left\{\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant At^{1/\lambda} (\log t^{-1})^{-(1+\varepsilon)/\lambda}$$

для некоторых постоянных $A > 0$ и $\varepsilon > 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |s_k(x) - f(x)|^{\lambda}$$

сходится почти всюду на $[0,2\pi]$. П. Л. Ульянов

**305. О некоторых тригонометрических рядах. XVII. Идзуми, Сато** (Some trigonometrical series. XVII. Izumi Shin-ichi, Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 659—664 (англ.)

Обобщаются теоремы Харди и Литлвуда о дробных интегралах и производных. Доказываются, например,

Теорема 4. Пусть $2\pi$-периодическая функция $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ и $0 < \alpha < 1$, $p > 1$, $\alpha - 1/p = \beta > 0$,

$\gamma > 0$, $\alpha + \gamma < 1$. Тогда для всех $x$

$$|s_n(x, f_\gamma) - f_\gamma(x)| \leqslant An^{-(\beta+\gamma)},$$

где $A$ — постоянная, $f_\gamma(x)$ — интеграл порядка $\gamma$ от функции $f(x)$, а $s_n(x, f_\gamma)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f_\gamma(x)$.

Авторы приводят в статье, кроме своего доказательства этой теоремы, еще доказательство Цутикуры.

Теорема 6. Пусть $2\pi$-периодическая функция $f(x) \in L^p(0,2\pi)$, $p > 1$, и пусть $1/p < \alpha < 1$. Тогда для всех $x$

$$|s_n(x, f_\alpha) - f_\alpha(x)| \leqslant An^{-(\alpha-1/p)},$$

где $f_\alpha(x)$ и $s_n(x, f_\alpha)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 4.

В работе имеются опечатки. Например: на стр. 659, строка 13 сверху, напечатано $\sigma$ вместо $\alpha$; на стр. 662, строка 8 снизу, нужно $t^{\beta-1}$ вместо $t^\beta$; на стр. 663, строка 3 сверху, напечатано $S_n^*(x, f) - f(x)$ вместо $S_n^*(x, f_\alpha) - f_\alpha(x)$. П. Л. Ульянов

**306. О некоторых тригонометрических рядах. XVIII. Идзуми, Сато** (Some trigonometrical series. XVIII. Izumi Shin-ichi, Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 1, 20—23 (англ.)

Приводятся достаточные условия для справедливости равенства Парсеваля.

Пусть

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$g(x) \sim a_0'/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx).$$

Теорема 1. Если $g(x) \in L(0,2\pi)$, а $f(x) \in L^\infty$ (т. е. существенно ограничена и измерима), причем

$$\int_0^h [f(x+u) - f(x-u)]\,du = o(h/\lg h^{-1}) \qquad (1)$$

при $h \to 0$ равномерно по всем $x$, то равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = a_0a_0'/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n a_n' + b_n b_n') \qquad (2)$$

имеет место, причем ряд в правой части (2) сходится.

Если заменить сходимость суммируемостью $(C, 1)$, то справедливость (2) была и ранее известна, причем гипотеза (1) оказывалась тогда излишней.

Теорема 3. Если $g(x)$ с ограниченным изменением и

$$dg(x) \sim a_0'/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx),$$

а $f(x) \in L^\infty$ и удовлетворяет равномерно по всем $x$ условию (1), то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dg(x) = a_0a_0'/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n a_n' + b_n b_n'),$$

причем ряд в правой части сходится.

Харди и Литлвудом (Hardy G. H., Littlewood J. E., Proc London Math. Soc., 1927, 26) было доказано, что если

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},\quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n' e^{inx},$$

причем $f \in L^p$, $g \in L^q$, $p < 2$, $q \leqslant p'$ $(1/p + 1/p' = 1)$, и если $f_\alpha(x)$ — интеграл порядка $\alpha$ от $f(x)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(x)\,g(-x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha\pi i \operatorname{sgn} n}}{|n|^\alpha} c_n c_n' \qquad (3)$$

при $\alpha = 1/p + 1/q - 1$.

Авторы показывают, что при сохранении тех же обозначений, если $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$, $g(x) \in L$ и $\alpha > 1/p$, то формула (3) снова справедлива, причем ряд в правой части сходится.

В работе ошибочно всюду вместо $a_0a_0'/2$ напечатано $a_0a_0'/4$. Н. К. Бари

**307. О характере сходимости рядов Фурье. Кинукава** (On the convergence character of Fourier series. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 8, 513—516 (англ.)

Обобщаются некоторые результаты Идзуми (РЖМат, 1956, 2880). Сформулируем характерные теоремы.

Теорема 1. Если $2\pi$-периодическая функция $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha < 1/2)$, то ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} |s_n(x) - f(x)|^k n^{-\delta} (\log n)^{-\gamma}$$

сходится равномерно на $[0,2\pi]$, где $s_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$, а $\gamma > 1$, $k > 0$, $\delta = 1 - k\alpha > 0$.

Случай $k = 2$ был рассмотрен Идзуми.

Теорема 3. Если $2\pi$-периодическая функция $f(x)$ такова, что равномерно относительно $x$

$$|f(x+t) - f(x)| = O\{|t|^\alpha (\log|t|^{-1})^{-\gamma}\},$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - f(x)|^k n^{-\delta}$$

сходится равномерно на $[0,2\pi]$, где $0 < \alpha < 1/2$, $k > 0$, $\delta = 1 - k\alpha > 0$, $\gamma > 1/k$. П. Л. Ульянов

**308. О характере сходимости рядов Фурье. II. Кинукава** (On the convergence character of Fourier series. II. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 1, 24—26 (англ.)

Доказывается, что теорема 1 предыдущей статьи (реф. 307) остается верной при всех $0 < \alpha \leqslant 1$ и $k > 0$, а теорема 2 при всех $0 < \alpha < 1$.

Таким образом теоремы Идзуми (РЖМат, 1956, 2890) оказываются обобщенными на произвольные показатели $k$, при этом значение $\gamma$ можно иногда брать даже меньшим, чем у Идзуми. П. Л. Ульянов

**309. О суммируемости $(C, 1)$ ряда Фурье. Синвхал** (Sur la sommabilité $(C, 1)$ de la série de Fourier. Sinvhal S. D.), Bull. sci. math., 1955, **79**, nov.— dec., 169—173 (франц.)

Доказывается, что ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем $(C, 1)$ в точке $x$ к $f(x)$, если существует предел

$$\xi(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_\varepsilon^t u^{-1}\varphi(u)(\log u^{-1})^\sigma\,du \qquad (0 < \alpha < 1),$$

где $\varphi(u) = [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]/2$, и если при $n \to \infty$

$$\int_0^\delta \frac{\xi(t)}{(\log t^{-1})^\alpha}\frac{\sin 2nt}{t}\,dt \to 0 \qquad (\delta > 0). \qquad (1)$$

В силу признака Юнга, условие (1) будет выполнено, если $\theta(t) = \xi(t)(\log t^{-1})^{-\alpha} \to 0$ при $t \to 0$ и полная ва-

риация функции $t\theta(t)$ на $(0,t)$ равна $O(t)$. Дается пример функции, для которой (1) выполнено, а условие Вана $\int_0^t \varphi(u)\,du = o(t/\log t^{-1})$ не выполняется. Имеются опечатки. А. А Шнейдер

**310. О суммируемости $|C,1|$ рядов Фурье. Моханти** (On the summability $|C,1|$ of Fourier series. Mohanty R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 1, 53—54 (англ.)

Рассматривается абсолютная суммируемость $|C,1|$ рядов Фурье в точке. Доказывается

Теорема. Пусть $f(t)\in L(0,2\pi)$ и имеет ряд Фурье

$$f(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

Если в точке $x$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\,k^{-1}\log k<\infty,$$

то суммируемость $|C,1|$ ряда Фурье в точке $x$ зависит лишь от свойств функции $f(t)$ в окрестности точки $x$. П. Л. Ульянов

**311. О коэффициентах Фурье — Стилтьеса сингулярных функций. Иващев-Мусатов О. С.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 2, 179—196

Известно, что если $F(x)$ монотонна и сингулярна, т. е. имеет производную, равную нулю почти всюду, но не всюду, то ее коэффициенты Фурье — Стилтьеса $c_n=\int_0^{2\pi}e^{-inx}\,dF$ таковы, что ряд $\Sigma|c_n|^2$ расходится.

Автор доказывает, что этот ряд может расходиться как угодно медленно, если только удовлетворены некоторые условия регулярности стремления $c_n$ к нулю. Точнее, имеет место теорема:

Пусть $\chi(y)$ определена для $y\geqslant 0$, положительна, монотонно убывает, дифференцируема и удовлетворяет условиям: 1) $\psi(y)=\int_0^y\chi^2(\eta)\,d\eta\to\infty$ при $y\to\infty$; 2) $y^{1+\varepsilon}\chi^2(y)\to\infty$ при $y\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$; 3) $y\chi^2(y)\to 0$ при $y\to\infty$; 4) существует такое $y_0$, что для всех $y\geqslant y_0$ и любого $\theta\geqslant 1$ $\chi(y)/\chi(\theta y)\leqslant\theta^{3/4}$.

Тогда существует такая непрерывная монотонно убывающая сингулярная функция $F(x)$, что $c_n=o(\chi(|n|))$.

Н. К. Бари

**312. Почленное интегрирование и теоремы единственности для тригонометрических рядов. Юркат** (Gliedweise Integration und Einzigkeitssätze bei trigonometrischen Reihen. Jurkat Wolfgang), Math. Ann., 1956, **131**, № 2, 141—150 (нем.)

Пусть $I$ — открытый интервал, $I'$ — замкнутый интервал, содержащийся в $I$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Re\,a_n e^{inx} \qquad (1)$$

(где $\Re$ обозначает действительную часть) называется почленно интегрируемым на $I$, если он почти всюду на $I$ $A$-суммируем к функции $f(x)$, интегрируемой на всяком $I'$, и если $A$-сумма $F_q(x)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Re\,a_n e^{inx}/(in)^q \qquad (2)$$

всюду на $I$ существует и равна интегралу порядка $q$ от $f(x)$ $(q=1,2,\ldots)$.

Подразумевая под равномерной $A$-равносуммируемостью двух рядов равномерную $A$-суммируемость к нулю разности этих рядов, автор называет ряд (1) локальным рядом Фурье на $I$ от функции $f(x)$, если он почти всюду на $I$ $A$-суммируем к $f(x)$ и на всяком $I'$ равномерно $A$-равносуммируем с обычным рядом Фурье (зависящим от выбора $I'$).

Теорема 6. Если при некотором $q$ ряд (2) является локальным рядом Фурье на $I$, то для почленной интегрируемости ряда (1) на $I$ необходимо и достаточно, чтобы ряд (1) был локальным рядом Фурье на $I$.

Теорема 8. Если ряд (1) всюду на $I$ $A$-суммируем к функции, интегрируемой на всяком $I'$, то для того чтобы ряд (1) был локальным рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы ряд (2) при $q=2$ равномерно $A$-суммировался на всяком $I'$. Это условие достаточно для почленной интегрируемости ряда (1) на $I$, а также и необходимо, если $a_n=o(n^{\alpha})$, $\alpha\geqslant 0$.

Теоремы 12 и 13. Если ряд (1) всюду на $I$ $A$-суммируем к функции, интегрируемой на всяком $I'$, то для почленной интегрируемости ряда (1) на $I$ необходимо и достаточно, чтобы $A$-суммы $F_{2p}(x)$ $(p=1,2,\ldots)$ были непрерывны на $I$ или чтобы $A$-суммы $F_q(x)$ $(q=1,2,\ldots)$ существовали на $I$ и были интегрируемы на всяком $I'$.

Некоторые результаты получены также для метода суммирования Чезаро. Подробных доказательств автор почти не дает, ссылаясь на аналогию с известными в теории тригонометрических рядов рассуждениями.

А. А. Шнейдер

**313. Об интеграле типа Перрона, определенном с помощью тригонометрических рядов. Тейлор** (An integral of Perron's type defined with the help of trigonometric series. Taylor S. J.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 24, 255—274 (англ.)

Используя идеи определений $(SCP)$-интеграла и $(P^2)$-интеграла, автор вводит понятие $(AP)$-интеграла, устанавливает его основные свойства и применяет к тригонометрическим рядам, суммируемым по Абелю. Сформулируем основной результат.

Теорема 11. Пусть

$$a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

— тригонометрический ряд с $a_n=o(n)$, $b_n=o(n)$ и пусть $f(r,x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,r^n$, где $0\leqslant r<1$. Тогда, если при $r\to 1$ а) $\overline{\lim}\,f(r,x)$, $\underline{\lim}\,f(r,x)$ конечны всюду, кроме, быть может счетного множества $E$; б) $\lim f(r,x)=f(x)$ существует и конечен почти всюду на $[0,2\pi]$; в) $\lim(1-r)f(r,x)=0$ при $x\in E$; г) $\lim(1-r)\sum_1^{\infty}(b_n\cos nx-a_n\sin nx)\,r^n=0$ при $x\in[0,2\pi]$, то

$$\pi a_k=(AP)\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,$$

$$\pi b_k=(AP)\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx\quad(k=0,1,\ldots),$$

т. е ряд (1) является рядом Фурье от функции $f(x)$ в смысле $(AP)$-интегрирования. П. Л. Ульянов

**314. Обобщение двух теорем А. Н. Колмогорова для лакунарных последовательностей. Федулов В. С.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, **115**, № 14, 87—95

Доказываются теоремы:

1. Пусть $f(x,y)\in L^2[0,2\pi;0,2\pi]$. Если $\{m_i\}$, $\{n_j\}$ — лакунарные последовательности, удовлетворяющие условиям: $m_{i+1}/m_i>\lambda>1$, $n_{j+1}/n_j>\mu>1$, то почти везде на $[0,2\pi;0,2\pi]$ будет $S_{m_in_j}(x,y)\to f(x,y)$, где $S_{mn}$ — частичная сумма двойного ряда Фурье функции $f$.

2. Если двойной ряд Фурье суммируемой функции является лакунарным, то он сходится к $f(x,y)$ почти везде. И. Е. Жак

**315. Почти периодические функции. Хартман** (Funkcje prawie okresowe (szkic teorii). Hartman S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, ser. 1, **1**, № 2, 323—343 (польск.; рез. русс., англ.)

Популярная статья о почти периодических функциях Бора, обобщениях Степанова, Вейля и Безиковича, аналитических почти периодических функциях, почти периодических функциях на группах и связи с теорией представлений. R. Sikorski

**316. О полиномах с наименьшим взвешенным максимумом. Аткинсон** (On polynomials with least weighted maximum. Atkinson F. V.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 267—270 (англ.)

Доказывается, что если на отрезке $[a, b]$ многочлены $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являются наименее уклоняющимися от нуля с непрерывным и положительным на этом отрезке весом $w(x)$, т. е. минимизируют выражение

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |w(x)\, p_n(x)|,$$

то при $n \geqslant 2$ нули многочленов $p_n(x)$ и $p_{n-1}(x)$ взаимно разделены.

Примечание референта. Референтом была доказана более общая теорема о взаимном разделении нулей для полиномов наименьшего отклонения вида $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, где функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют систему Чебышева. Она вошла в дипломную работу референта, защищенную в 1947 г. В. С. Виденский

**317. О системе дифференциальных уравнений некоторых экстремальных полиномов. Воронов-ская Е. В.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 251—254

Утверждается, что в классических задачах всякий полином $\sum_0^n p_i x^i$, наименее уклоняющийся от нуля на $[0, 1]$, коэффициенты которого удовлетворяют данным условиям $(A)$ и у которого число точек уклонения больше $n/2 + 1$, является также одним из полиномов $P_n(x)$, наименее уклоняющихся от нуля на $[0,1]$, коэффициенты которых связаны одной линейной неоднородной зависимостью $\sum_0^n p_i \mu_i = M\ (\neq 0)$ (условие В. А. Маркова). Задача нахождения последних полиномов эквивалентна задаче нахождения экстремальных полиномов $Q_n(x)$ линейного функционала, определенного отрезком чисел $(\mu_i)_0^n$ (РЖМат, 1956, 2119, 2120), причем $Q_n(x) = P_n(x)/L$ ($L$ — уклонение $P_n(x)$).

При помощи паспортизации можно все множество экстремальных полиномов $\{Q_n(x)\}$ разбить на семейства, зависящие от одного, двух и т. д. параметров Рассматривается однопараметрическое семейство экстремальных полиномов $Q_n(x, \vartheta) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(\vartheta)\, x^k + \vartheta x^n$ с параметром $\vartheta$ и для коэффициентов $y_k(\vartheta)$ приводится система дифференциальных уравнений.

Указывается на возможность приближенного интегрирования этой системы и отмечаются некоторые частные случаи, когда она интегрируется в конечном виде. Доказательства не приводятся. С. И. Зуховицкий

**318. Об аппроксимации разрывных функций обобщенными полиномами типа С. Н. Бернштейна. Гусейнов Г. А.**, Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, **2**, 133—145

А. О. Гельфонд (Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, 44, 413—420) показал, что если:

1) последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots,\ \alpha_n \to \infty,$$

$$\sum_1^\infty \alpha_n^{-1} = \infty;$$

2) $\sigma_{k,n} = \left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)\right]^{1/\alpha_1}$, $\sigma_{n,n} = 1$,

$$q_{k,n}(x) = (-1)^{n-k}\frac{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}{2\pi i}\int_{|z|=1+\alpha_n} \frac{x^z\, dz}{(z-\alpha_k)\ldots(z-\alpha_n)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \beta_{s,\nu_s} x^{\alpha_s} \ln^{\nu_s} x$$

$(k = 0, 1, \ldots; n;\ \nu_s \leqslant \mu_s - 1,\ \mu_s$ — кратность $\alpha_s)$;

3) $f(x)$ ограничена на сегменте $[0,1]$, непрерывна на отрезке $[a', b']$: $0 < a' < a < b < b' < 1$, то последовательность полиномов типа С. Н. Бернштейна

$$B_n^{(1)}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(\sigma_{k,n})\, q_{k,n}(x)$$

сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$. Для $f(x)$, удовлетворяющей условию Липшица, им же установлена и скорость сходимости.

В реферируемой статье эти утверждения распространяются на полиномы

$$B_{n,m}^{(1)}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f(\sigma_{k,n}, \sigma_{l,m})\, q_{k,n}(x)\, q_{l,m}(y),$$

причем не только для непрерывных, но и для некоторых разрывных функций.

Примечание референта. Теорема 6 ошибочна. А. Ф. Ипатов

**319. Об аппроксимации суммируемых полунепрерывных и измеримых функций обобщенными полиномами типа С. Н. Бернштейна. Гусейнов Г. А.**, Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, **2**, 163—180

Из полиномов

$$B_n^{(1)}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(\sigma_{k,n})\, q_{kn}(x)$$

типа С. Н. Бернштейна (реф. 318) строятся три обобщенных полинома $B_n^{(i)}(f; x)$ $(i = 2, 3, 4)$.

Доказывается, что: $B_n^{(2)} \to f(x)$ в каждой точке Лебега $f(x)$, т. е. почти везде на $[0,1]$; $\{B_n^{(3)}\}$ не возрастает и на $[0,1]$ $B_n^{(3)} \to f(x)$; $B_n^{(4)} \to f(x)$ в каждой точке аппроксимативной непрерывности $f(x)$, т. е. почти везде на $[0,1]$.

В частном случае $\alpha_k = k$ обобщенные полиномы типа С. Н. Бернштейна превращаются в соответствующие обобщенные полиномы, введенные Л. В. Канторовичем, подобно тому, как $B_n^{(1)}$ превращаются в полиномы С. Н. Бернштейна. Все предложения распространяются на случай двух переменных. А. Ф. Ипатов

**320. О наилучшем приближении в среднем функций вида $\int_0^\infty x^S\, d\psi(s)$ на отрезке $[-1;+1]$. Абдуллаев И. К.**, Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, 2, 97—109

Выводится формула, дающая асимптотическое выражение (при $n \to \infty$) наилучшего приближения алгебраическими полиномами в среднем для функций указанного вида при некоторых ограничениях, накладываемых на вес $\psi(s)$. Она применяется затем для нахождения асимптотического выражения наилучшего прибли-

жения в среднем для функции вида $|x|^s (b-\ln|x|)^{-m}$, $m \geqslant 1$ — целое.

В работе имеется большое число опечаток и неясных мест. И. Г. Соколов

**321. О наилучшем приближении в среднем функции $F_{s,m}(|a-x|) = |a-x|^s \ln^m |a-x|$. Ааундов А.,** Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, 2, 117—132

Пусть $s > -1$ и не есть целое четное, $m$ — целое положительное, $a$ — любое вещественное. Следуя методу С. М. Никольского (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 139—175) и И. И. Ибрагимова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, 429—460), автор изучает асимптотическое выражение наилучшего приближения в среднем функции $F_{s,m}(|a-x|)$ на промежутке $[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени не выше $n$ при $n \to \infty$.

Главный член асимптотического выражения для $E_n[F_{s,m}(|a-x|)]$ отличается от главного члена для $E_n(|a-x|^s)$, полученного С. М. Никольским, лишь множителем $\ln^m n$. Имеются многочисленные опечатки и неточные выражения.

Примечание референта. Отметим результат В. И. Гукевич (Докл. АН СССР, 1951, 77, 5), относящийся к случаю $s=0$, $m=1$. И. Г. Соколов

**322. О наилучшем (равномерном) приближении многочленами функции вида $\psi_{s,m}(a-x) = (a-x)^{s/2} / [b-\ln(a-x)]^m$. Абдуллаев И. К.,** Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, 2, 181—187

С. Н. Бернштейном (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, 185—196) рассматривалась задача нахождения асимптотического значения (при $n \to \infty$) наилучшего приближения функций вида $|x|^s / [b - \ln|x|]$ алгебраическими полиномами порядка не выше $n$ на отрезке $[-1,1]$. Автор решает эту задачу для функций указанного в заглавии вида. В работе много опечаток и неясных мест. И. Г. Соколов

**323. О среднеквадратическом наилучшем приближении периодических функций многих переменных посредством тригонометрических многочленов. Джафаров А. С.,** Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, 2, 159—162

Рассматривается класс $2\pi$-периодических по каждому аргументу функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, являющихся кратными интегралами порядка $(r_1, \ldots, r_n)$ в смысле Вейля от функций $\varphi(t_1, \ldots, t_n) \in L_2$, и устанавливается точная верхняя граница отклонений в метрике $L_2$ от этих функций их сумм Фурье порядка $(m_1, \ldots, m_n)$. Если функция $\varphi$ изменяется так, что $\|\varphi\| \leqslant K$, то упомянутая граница равна

$$K \left[\sum_{s=1}^{n} (m_s+1)^{-2r_s}\right]^{1/2}.$$

В статье много опечаток. И. П. Натансон

**324. О суммировании рядов Фурье — Якоби способом Бернштейна — Рогозинского. Натансон Г. И.,** Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 103, 161—177

Приводится развернутое доказательство теорем, опубликованных ранее без доказательства (РЖМат, 1954, 2206). Ф. И. Харшиладзе

**325. Несколько элементарных замечаний о фундаментальных полиномах параболического интерполирования. Фейер** (Verschiedene Bemerkungen elementarer Natur über die Grundpolynome, die bei den parabolischen Interpolationen auftreten. Fejér L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 3—4, 227—240 (нем.; рез. русс.)

Отмечаются некоторые свойства фундаментальных полиномов 1-го и 2-го рода $h_k(x)$ и $\widetilde{h}_k(x)$ интерполяционной формулы Эрмита

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k(x)\, y_k + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{h}_k(x)\, y'_k,$$

построенной для узлов $x_1, \ldots, x_n$ из промежутка $[a,b]$ ($h_k$ и $\widetilde{h}_k$ — это $A_k$ и $B_k$ в книге И. П. Натансона «Конструктивная теория функций» (М., 1949, стр. 504)).

1. Если обозначить через $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ корни $\omega'(x)$, где $\omega(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$, то справедлива формула

$$h_k(x) = 1 - 12^{-1}\left\{5\left[\sum_{m=1}^{n-1}(x_k-\xi_m)^{-1}\right]^2 + 4\sum_{m=1}^{n-1}(x_k-\xi_m)^{-2}\right\}(x-x_k)^2 + \ldots,$$

откуда следует, что $h_k(x)$ имеет при $x = x_k$ максимум (равный 1).

2. Полином $\sum_{k=1}^{n} \widetilde{h}_k(x)$ (степени $\leqslant 2n-1$) может быть представлен в виде $\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)\,h_k(x)$ или $\omega(x) \times \times \sum_{k=1}^{n} l_k(x)/\omega'(x_k)$; из последнего выражения следует, что этот полином имеет в промежутке $[a,b]$ $2n-1$ простых корней.

3. Если узлы $x_k$ распределены в промежутке $[-1,1]$ «нормально», т. е. так, что все $h_k(x) \geqslant 0$ при $x \in [-1,1]$, то в этом промежутке $x-1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \widetilde{h}_k(x) \leqslant x+1$, откуда $|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{h}_k(x)| \leqslant 2$. В. Ф. Николаев

**326. Несколько элементарных замечаний о фундаментальных полиномах параболического интерполирования. Фейер** (Néhány elemi természetü észrevétel a parabolikus interpolációnál fellépö alappolinomokra vonatkozólag. Fejér L.), Math. lapok, 1955, 6, № 4, 293—308 (венг.; рез. русс., англ.) См. реф. 325.

**327. О дифференцировании интерполяционных последовательностей Лагранжа. Фрейд** (Über differenzierte Folgen der Lagrangeschen Interpolation. Freud G.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 3—4, 467—473 (нем.; рез. русс.)

Построим для заданной на $[-1,1]$ $m$ раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа $L_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} l_{kn}(x)\, f(x_{kn})$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствующую заданной матрице узлов $\{x_{kn}\}$ на $[-1,1]$, и рассмотрим $m$-е производные $L_n^{(m)}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^{(m)}(x)\, f(x_{kn})$. Модуль непрерывности $f^{(m)}(x)$ обозначим через $\omega_m(\delta)$.

Теорема I. Пусть узлами интерполирования $x_{kn}$ являются корни ортонормированных полиномов $p_n(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, соответствующих суммируемому на $[-1,1]$ дифференциальному весу $w(x)$. Пусть в некоторой части $[a,b] \subset [-1,1]$ нижняя грань $w(x)$ положительна. Тогда, если $\omega_m(\delta) = o(\delta^{1/2})$, то при $n \to \infty$ $L_n^{(m)}(f;x) \to f^{(m)}(x)$, равномерно в любом внутреннем подинтервале $[a_1, b_1]$ промежутка $[a,b]$.

Доказательство основано на оценке: $\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}^{(m)}(x)| = O(n^{m+\frac{1}{2}})$ равномерно в $[a_1, b_1]$.

**Теорема II.** Заключение теоремы I справедливо, если $\mu_1 \geqslant w(x) \geqslant \mu_2$, $|p_n(x)| \leqslant K$, $n = 0, 1, \ldots$, в промежутке $[a, b]$ ($\mu_1, \mu_2, K$ — абсолютные постоянные) и $\omega_m(\delta) = o(\lg^{-1} \delta^{-1})$.

Доказательство основано на оценках

$$\sum_{x_{kn} \in (a_1, b_1)} |l_{kn}^{(m)}(x)| = O(n^m \lg n),$$

$$\sum_{x_{kn} \notin (a_1, b_1)} |l_{kn}^{(m)}(x)| = O(n^m).$$

Отмечается, что при $m \geqslant 1$ первая из этих оценок не может быть улучшена никаким (даже независимым от ортогональных полиномов) выбором узлов $x_{kn}$.

Опечатка: в формуле (25) для функции $\Phi(x)$ пропущен множитель $\frac{1}{(m-1)!}$. В. Ф. Николаев

**328. Об одном видоизменении формулы параболического интерполирования. Ланцевицкий И. Л.,** Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, 5, № 1, 29—33

К интерполяционному полиному Лагранжа с чебышевскими узлами $P_n(f; x)$, построенному для непрерывной на $[-1,1]$ функции $f(x)$, применяем следующий процесс: разлагаем этот полином по полиномам Чебышева

$$P_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu^{(n)} T_\nu(x), \quad T_\nu(x) = \cos \nu \arccos x$$

и преобразуем результат с помощью «множителей» $\lambda_\nu^{(n)}$, получая новый полином

$$U_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu^{(n)} \lambda_\nu^{(n)} T_\nu(x).$$

**Теорема.** Если треугольная матрица множителей $\{\lambda_\nu^{(n)}\}$ такова, что: а) $\lim_{n\to\infty} \lambda_\nu^{(n)} = 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), б) $\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu + 1) |\Delta^2 \lambda_\nu^{(n)}| < A$, где $A$ не зависит от $n$, то (при $n \to \infty$) $U_n(f; x) \to f(x)$ равномерно на $[-1,1]$.

Отмечается, что этот результат автора примыкает к работе С. М. Никольского о линейных методах суммирования рядов Фурье (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, 259—278). Специализируя вид матрицы $\{\lambda_\nu^{(n)}\}$, автор получает известные результаты о методах арифметических средних, средних Валле-Пуссена, С. Н. Бернштейна и некоторых других.

В. Ф. Николаев

**329. Интерполирование непрерывной функции $F(P)$ точки $P$ на поверхности сферы. Куильгини** (Interpolazione di una funzione $F(P)$ continua nei punti $P$ di una superficie sferica. Quilghini Demore), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 1, 40—45 (итал.)

На поверхности данной сферы $\omega$, отнесенной к системе географических координат $\varphi, \theta$ ($\varphi$ — дополнение широты до $\pi/2$), рассматривается непрерывная функция $F(P) = F(\varphi, \theta)$. Тригонометрический полином (порядка $2n$ относительно $\varphi$ и порядка $2m$ относительно $\theta$), интерполирующий функцию $F(\varphi, \theta)$, взят в виде

$$H_{n,m}(\varphi, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} F(\varphi_\nu, \theta_\mu) h_\nu(\varphi) k_\mu(\theta).$$

Здесь $h_\nu(\varphi)$ есть основной полином 1-го рода интерполяционной формулы Эрмита с заменой $x = \cos\varphi$, т. е.

$$h_\nu(\varphi) = [1 - 2l'_\nu(\cos\varphi_\nu)(\cos\varphi - \cos\varphi_\nu)] l_\nu(\cos\varphi),$$

а $k_\mu(\theta)$ — основной полином интерполяционной формулы Джексона:

$$k_\mu(\theta) = \left[ \frac{\sin(m+1)\frac{\theta - \theta_\mu}{2}}{(m+1)\sin\frac{\theta - \theta_\mu}{2}} \right]^2$$

(узлы $\theta_\mu$ выбраны равноотстоящими: $\theta_\mu = 2\pi\mu/(m+1)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$); в качестве $\varphi_\nu$ взяты те значения $\varphi$, которые соответствуют корням $x_\nu$ полинома Лежандра $P_{n+1}(x)$, т. е. $\varphi_\nu = \arccos x_\nu$.

Доказываются теоремы: 1. Для любой непрерывной на $\omega$ функции $F(\varphi, \theta)$ и для любой точки $\omega$ (за исключением, может быть, точки $\varphi = 0, \theta = 0$):

$$\lim_{n,m\to\infty} H_{n,m}(\varphi, \theta) = F(\varphi, \theta). \quad (1)$$

2. Если функция $F(\varphi, \theta)$ удовлетворяет на $\omega$ условию

$$|F(\varphi_1, \theta_1) - F(\varphi_2, \theta_2)| \leqslant L\{|\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2|^\alpha + |\theta_1 - \theta_2|^\beta\},$$

где $L$ — абсолютная постоянная, $4/5 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, то (1) выполняется равномерно на $\omega$ (Дается оценка для $|F - H_{n,m}|$.) Ср. РЖМат, 1956, 5183.

В. Ф. Николаев

**330. О наилучшем приближении в среднем функций многих переменных при помощи целых функций конечной степени. Джафаров А. С.,** Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, 2, 110—116

Рассматривается пространство $M^{(m)} L_p^{(n-m)}$ функций, определенных и измеримых на $R_n$, с конечной нормой

$$\|f\|_p^{(n,n-m)} = \sup_{(x_1,\ldots,x_m)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p \, dx_{m+1} \ldots dx_n \right)^{1/p}$$

При помощи существующих рассуждений дается оценка сверху наилучшего приближения в пространстве $M^{(m)} L_p^{(n-m)}$ посредством целых функций конечной степени через модули непрерывности.

Основной результат: Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет частные производные $\partial^{r_i} f / \partial x_i^{r_i} \in M^{(m)} L_r^{(n-m)}$ ($i = 1, \ldots, n$), где $r_i \geqslant 0$ — целые числа, то

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f)_p^{(n,n-m)} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i^{r_i}} \omega_{k_i x_i}^{(n,n-m)} \left( \frac{1}{\nu_i}, \frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}} \right)_p$$

($C$ не зависит от $\nu_1, \ldots, \nu_n$), где

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(f)_p^{(n,n-m)} = \inf_{g_{\nu_1 \ldots \nu_n}} \|f - g_{\nu_1 \ldots \nu_n}\|_p^{(n,n-m)},$$

$$\omega_{k x_s}^{(n,n-m)}(\delta, f)_p = \sup_{|h| \leqslant \delta} \|\Delta_{h x_s}^k f\|_p^{(n,n-m)}.$$

Этот результат является обобщением соответствующих результатов С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера, С. М. Никольского, С. Б. Стечкина.

Примечание референта. Утверждение 3 (§ 1) ошибочно, но в дальнейшем не используется.

О. В. Бесов

**331. О наилучшем приближении в среднем суммируемых функций посредством целых функций конечной степени. Юсуф-Заде Б. М.,** Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1955, 7, 71—85 (рез. азерб.)

Для функций $f(x) \in L(-\infty,\infty)$ доказывается, что: 1) $A_p(f)_L \leqslant C\omega(f, p^{-1})$, 2) $\omega(f,\delta) \leqslant 2A_p(f)_L + p\delta M$, где $A_p(f)_L$ — наилучшее приближение $f$ при помощи целых функций степени $p$ в метрике $L(-\infty,\infty)$, $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности $f$ в той же метрике, $C$ и $M$ — константы.

Аналогичные теоремы доказываются для функций двух переменных. Кроме того, устанавливается оценка для наилучшего приближения функции $f \in L(-\infty,\infty)$ на отрезке $[-\lambda,\lambda]$ посредством многочленов (в смысле $L$)

$$E_n(f,\lambda)_L \leqslant A_p\{f,\lambda\}_L + \varepsilon_n$$

при $p \leqslant qn/(\lambda e)$, где $q$ — некоторая константа (абсолютная), $0<q<1$, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

О. В. Бесов

См. также: 247, 256, 464, 560, 568, 626, 640, 641, 895, 896, 899

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**332. О коэффициентах ряда Тейлора рациональных функций. Малер** (On the Taylor coefficients of rational functions. Mahler K.), Proc. Cambridge Philos Soc., 1956, 52, № 1, 39—48 (англ.)

Пусть $F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h z^h$ — рациональная функция. В работе доказано, что если среди коэффициентов $f_h$ ряда имеется бесконечно много нулей, то существуют такие числа $L$ и $L_1$, что $f_h = 0$, если $h \equiv L_1 \pmod L$ и $h \geqslant h_0$. Ранее автором (Mahler K., Proc. Acad. Sci. Amst., 1935, 38, 51—60) эта теорема была доказана в предположении, что все коэффициенты ряда $f_h$ являются алгебраическими числами. Далее доказывается более сильное утверждение, что номера обращающихся в нуль коэффициентов (кроме конечного числа) образуют несколько арифметических прогрессий с одинаковой разностью. В качестве следствия доказывается, что уравнение $\sum_{\nu=1}^{h} P_\nu(h)\beta_\nu^h = 0$, где $P_1(h),\ldots,P_n(h)$ — многочлены, не равные нулю тождественно, а $\beta_1,\ldots,\beta_n$ — произвольные числа, такие, что все отношения $\beta_i/\beta_k$ отличны от корней из единицы, не может иметь бесконечно много решений.

Примечание референта. На стр. 43, § 8, одинаковыми символами $A_\mu(\sigma_1,\ldots,\sigma_p;\tau)$, $\mu=0,1,\ldots,m$, и $A_\nu(\sigma_1,\ldots,\sigma_p;\tau)$, $\nu=1,\ldots,n$, обозначены различные величины.

Н. И. Фельдман

**333. О теореме Сеге. Хелсон** (On a theorem of Szegö. Helson Henry), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 235—242 (англ.)

Автор обобщает свой предыдущий результат о гармонических функциях, имеющих конечное число различных коэффициентов в разложении Фурье: $u(r;x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ikx}$ (РЖМат, 1955, 692).

В настоящей заметке условие $\int_0^{2\pi} |u(r,x)|\,dx \leqslant M$ заменено более слабым $\int_\alpha^\beta |u(r,x)|\,dx \leqslant M$, $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$. Автор опирается на интересную лемму: Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность индексов и пусть $\mu(x)$ и $\gamma(x)$ — функции с ограниченным изменением на $[0\,2\pi]$. Если

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x)\,d\gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{-in_k x}\,\Phi(x)\,d\mu(x)$$

для всякой непрерывной $\Phi(x)$, то $\gamma(x)$ — сингулярная функция. То же утверждение справедливо, если

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x)\,d\gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} [e^{in_k x} - e^{-im_k x}]\,\Phi(x)\,d\mu(x),$$

где $\{m_k\}$ — другая последовательность индексов.

С. Я. Хавинсон

**334. О поведении мажорантной функции степенного ряда. Риччи** (Sull' andamento delle funzioni maggioranti delle serie di potenze. Ricci Giovanni), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 285—306 (итал.)

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится для $|z|<1$ и пусть

$$z = re^{i\theta},\ 0 \leqslant r < 1,\ M(f;r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|,$$

$$M_2(f;r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right\}^{1/2},$$

$$B(f,r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Харди доказал, что если $M(f,r) < c < \infty$, то $\sqrt{1-r}\,B(f,r) \to 0$ при $r \to 1$. Если при $r \to 1$ $M(f,r) \leqslant (1+o(1))/(1-r)^\alpha$ $(\alpha \geqslant 0)$, то

$$B(f,r) \leqslant \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\alpha+1/2)^{\alpha+1/2}\cdot\alpha^{-\alpha} + o(1)\right] \Big/ (1-r)^{\alpha+1/2}.$$

В работе устанавливаются аналогичные предложения для функций $M_2(f,r)$ и $B(f,r)$.

Теорема 2. Если $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$, то $\overline{\lim}_{r\to 1} \frac{B(f,r)}{M_2(f,r)} \geqslant \sqrt{2}$. Константа $\sqrt{2}$ — наилучшая.

Теорема 5. Пусть $\alpha(r)$ — невозрастающая функция в $0<r<1$, $\alpha(r) \to \beta\ (\geqslant 0)$ при $r \to 1$. Если $M_2(f,r) \leqslant (1-r)^{-\alpha(r)}$, то

$$\sqrt{1-r}\,B(f,r) \leqslant (1+o(1))\sqrt{\alpha(r)+1/2}\cdot M_2(f,r),$$

$$B(f,r) \leqslant (1+o(1))\,(\beta+1/2)^{\beta+1/2}\beta^{-\beta}\,(1-r)^{-\alpha(r)-1/2}$$

Теорема 7. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ и существуют число $\lambda \geqslant 0$ и функция $L(x)$, определенная для $x>0$, $L(x)>0$ для $x>x_0$, для каждого $c>0$ $L(cx) \sim L(x)$ при $x \to \infty$ и такие, что $\sum_{-1}^{\infty} n^{2\lambda} L^2(n)\,|a_n|^2 < \infty$.

1) Если $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{2}$ (когда $\lambda = 0$ следует еще предполагать, что $L(x)$ — неубывающая), то

$$B(f,r) = o\left((1-r)^{\lambda-1/2}\cdot\frac{1}{L\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)$$

2) Если $\lambda = 1/2$ и $L_1^2(x) = \int_1^x \frac{du}{uL^2(u)} \to +\infty$ при $x \to \infty$,

то

$$B(f,r)=o\left(L_1\left(\frac{1}{1-r}\right)\right).$$

3) Если $\lambda=1/2$ и $L_1^2(x)\to L^*(>0)$ при $x\to\infty$ или если $\lambda>1/2$, то $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$. Н. А. Давыдов

**335. Функции, регулярные в единичном круге. Линден** (Functions regular in the unit circle. Linden C. N.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 49—60 (англ.)

Картрайт (Cartwright M. L., Quart. J. Math., 1933, 4, 246—257) показала, что если для функции $f(z)=f(re^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, регулярной в $|z|<1$, $f(0)=0$ и $u(r,\theta)<(1-r)^{-\alpha}$, $0\leqslant r<1$, где $\alpha$ — некоторая положительная постоянная, то на $|z|=r$ соответственно случаям $\alpha<1$, $\alpha=1$ или $\alpha>1$ имеем $|f(z)|<K(\alpha)\times(1-r)^{-1}$, $|f(z)|<\frac{K(\alpha)}{1-r}\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^2$ или $f(z)|<K(\alpha)(1-r)^{-\alpha}$ с постоянной $K(\alpha)$, зависящей лишь от $\alpha$. Эти результаты обобщаются на случай $\alpha$, зависящего от $r$. Из доказанных в работе трех теорем приведем две.

Теорема 1. Пусть $\chi(x)$ есть положительная непрерывная функция, для которой $\int_{x_0}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi\chi(\xi)}$ конечен, и такая, что $\chi(x)$ и $(\ln x)^d[\chi(x)]^{-1}$ при некотором конечном $d$, возрастая, стремятся к бесконечности вместе с $x$ при $x>x_0$. Тогда, если $f(z)$ регулярна для $|z|<1$, $f(0)=0$ и

$$u(r,\theta)<\frac{1}{1-r}\left[\chi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]^{-2},\quad r_0<r<1,$$

существует такая постоянная $K$, зависящая только от $r_0$ и функции $\chi(x)$, что для $|z|\leqslant r$ имеем $|f(z)|<K(1-r)^{-1}$, $0\leqslant r<1$.

Положим $L(t;m,n;\alpha_m,\ldots,\alpha_n)\equiv\prod_{\nu=m}^{n}\left(\ln_\nu\frac{1}{t}\right)^{\alpha_\nu}$, где $1\leqslant m\leqslant n$, $\ln_m x=\ln(\ln_{m-1}x)$; $\ln_1 x=\ln x$, $\alpha_m,\ldots,\alpha_n$ вещественны, $\alpha_m\neq 0$ и $L(t;m)\equiv L(t;1;m;-1,\ldots,-1)$.

Теорема 2. Если $f(z)$ регулярна в $|z|<1$, $f(0)=0$ и $u(r,\theta)<(1-r)^{-1}\{L(1-r;m)\}^2L(1-r;m,\iota;\alpha_m,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_m>0$ и $r_0\leqslant r<1$, то существует такая постоянная $K$, зависящая только от множества значений $r_0$, $m,n,\alpha_m,\ldots,\alpha_n$, что для $|z|\leqslant r$, $r_0\leqslant r<1$ имеем $|f(z)|<K(1-r)^{-1}L(1-r;m,n;\alpha_m,\ldots,\alpha_n)$.

Строится пример, показывающий, что теорема 2 при указанных предположениях в некоторых частных случаях не улучшаема. Ю. Е. Аленицын

**336. О некоторых множествах особых точек непрерывных аналитических функций. Трохимчук Ю. Ю.**, Зап. Укр. полигр. ин-та, 1955, 11, 133—135

Доказывается теорема, являющаяся в некотором смысле обобщением теоремы автора (Укр. матем. ж., 1952, 4, № 3, 318).

Пусть плоской области $D$ принадлежит ограниченное множество $K$, обладающее свойством $(T_2)$ (Сакс С., Теория интеграла, М. Изд-во ин. лит., 1949) в двух непараллельных направлениях. И пусть функция $f(z)$ моногенна вне $K$ и непрерывна на $K$. Тогда функция $f(z)$ аналитична на $D$ тогда и только тогда, когда $\iint_{D-K}|f'(z)|dxdy<\infty$.

Примечание референта. На стр. 133, строка 2 снизу, написано «в двух параллельных» вместо «в двух непараллельных». При определении свойства $(T_2)$ допущена неточность. Именно, вместо «бесконечное количество раз» следует говорить «несчетное количество раз». Н. Л. Ульянов

**337. О мере неаналитичности функций комплексного переменного. Мартино** (Concerning a measure of non-analyticity for functions of a complex variable. Martino Michael Anthony.—Doct. diss. Univ. Illinois, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 10, 1865 (англ.)

Пусть $D$ — односвязная (конечная) область плоскости комплексного переменного $z$; $L$ — множество всех функций $f(z)$, однозначных и суммируемых по Лебегу в $D$; $A$ — множество всех функций $f(z)$, $f(z)\in L$, эквивалентных функциям, аналитическим в $D$; $B$ — множество всех функций $f(z)$, $f(z)\in L$, представимых в области $D$ формулой вида:

$$f(z)=a(z)+\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{d\mu_f(e_\zeta)}{\zeta-z}\ ;\quad (B)'$$

где $a(z)\in A$, $\zeta$ — переменная интеграции, $\mu_f(e)$ — комплекснозначная мера Бореля множеств $e\subset D$. Изучаются условия представления функций $f(z)$ формулой $(B)$ и зависимость между дифференциальными свойствами функции $f(z)$, $f(z)\in B$, и соответствующей функции $\mu_f(e)$. Отметим некоторые результаты:

1. Если $f(z)$, $f(z)\in B$, имеет полный дифференциал в смысле Штольца в точке $z_0\in D$, тогда $\mu_f(e)$ имеет в этой точке обыкновенную производную $\mu_f'(z_0)$, причем, если существует в точке $z_0$ производная $f'(z_0)$, то $\mu_f'(z_0)=0$.

2. Если в некоторой окрестности $\eta$ точки $z_0$ $(\eta\subset D)$ существует производная $\mu_f'(z)$, причем

$$|\mu_f'(z)|\leqslant M\cdot|z-z_0|^\alpha,\ (z\in\eta),$$

где $M$ и $\alpha$ — положительные постоянные, то в точке $z_0$ существует производная $f'(z_0)$.

3. Пусть функция $f(z)$ непрерывная в области $D$ и обладает свойствами: а) $f(z)$ имеет аппроксимативную производную почти всюду в $D$; б) существует конечный

$$\lim_{h\to 0}\sup\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$$

во всех точках области $D$, исключая, самое большее, счетное множество таких подмножеств этой области, каждое из которых имеет конечную длину в смысле Каратеодори. Тогда $f(z)$ — аналитическая в области $D$.

Доказательства теорем и библиография не приведены. В. С. Федоров

**338. Общий метрический критерий полноты системы полиномов. Мергелян С. Н.**, Докл. АН СССР, 1955, 105, № 5, 901—904

Рассматривается произвольная односвязная область $D$ в конечной части плоскости и класс функций $f(z)$, аналитических внутри $D$ и удовлетворяющих условию: $\iint_{(D)}|f(z)|^2dx\,dy<\infty$, $z=x+iy$. Полнота системы полиномов в этом классе в смысле квадратического приближения по площади, т. е. справедливость равенства $\inf_P\iint_{(D)}|f(z)-P(z)|^2dx\,dy=0$, ранее была доказана для областей Каратеодори (А. И. Маркушевич и О. Фаррель) и областей типа «луночек» (М. В. Келдыш); ряд предварительных результатов был получен и для областей с граничными разрезами (С. Н. Мергелян, РЖМат, 1954, 1629). В настоящей статье дается достаточный

признак полноты для произвольной области $D$. Пусть $S$ — окружность, заключающая $\overline{D}$.

Теорема. Система полиномов полна в $D$, если существует множество точек $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ (лежащих вне D или на ее границе) с замыканием, содержащим границу области $D$, обладающее следующим свойством: каждой точке $\zeta$ этого множества соответствует число $\delta_0(\zeta)$ такое, что для любого $\delta < \delta_0(\zeta)$ точку $\zeta$ можно соединить с $S$ спрямляемой линией $l$ с условием:

$$\operatorname{mes} D_\delta(l) < \exp\left\{-\exp 5\ \frac{\text{дл. } l}{\delta}\right\},$$

где $D_\delta(l)$ — часть $D$, принадлежащая $\delta$-окрестности линии $l$.

Ранее построенный пример (РЖМат, 1955, 2631) показывает, что этот признак близок к необходимому. Высказывается предположение: для полноты системы полиномов в $D$ необходимо и достаточно, чтобы множество полиномов, ограниченное в среднем по области $D$, не было бы равномерно ограничено ни в одной окрестности граничной точки, т. е. для совокупности полиномов, удовлетворяющих неравенству $\iint_{(D)} |P(z)|^2\, dx\, dy \leqslant C$, нельзя по заданной окрестности $|z-\zeta|<\delta$ граничной точки $\zeta$ области $D$ найти константу $C_1$ такую, что $|P(z)| \leqslant C_1$. М. Г. Хапланов

**339. Об однолистных функциях в многосвязных областях. Аленицын Ю. Е.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 251

См. РЖМат, 1956, 6525

**340. Об одном классе однолистных аналитических функций. Чакалов** (Sur une classe de fonctions analytiques univalentes. Tchakaloff Lubomir), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 4, 437—439 (франц.)

Доказывается теорема: Если круг $|z-z_0|<R$ содержит все полюса функции

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z-a_k}$$

(где $A_k > 0$ и $a_k$ — комплексные числа, $k = 1, 2, \ldots, n$), то функция однолистна в области $|z-z_0| > R\sqrt{2}$. Эта оценка точная.

Высказываются аналогичные утверждения: функции

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)\, dt}{z-e^{it}} \quad \text{и} \quad h(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{z-t}$$

однолистны в области $|z| > \sqrt{2}$, если $\varphi(t)$ положительна на сегменте $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ и $\alpha(t)$ — ограниченная функция, неубывающая и обладающая по крайней мере одной точкой роста на сегменте $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Б. Н. Рахманов

**341. К теории однолистных функций. Рахманов Б. Н.**, Науч. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т, Саратов, 1955, 663—666

По определению автора, регулярная в круге $|z|<1$ функция $f_n(z) = z + c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \ldots$ принадлежит семейству $M(n, a)$, если в этом круге для нее справедливо неравенство $\operatorname{Re} \dfrac{d \ln [z f_n'(z) f_n^{-1}(z)]}{d \ln z} \geqslant -a$, где $a = \text{const} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Теорема 1. Если $f_n(z) \in M\left(n, \dfrac{n}{2}\right)$, то она однолистна и звездообразна в круге $|z|<1$ и имеет радиус выпуклости $R_k^{(n)} = n^{-\frac{1}{n}} > 0{,}693$, $n = 1, 2, \ldots$

Для функций семейства $M\left(n, \dfrac{n}{2}\right)$ имеют место точные оценки:

$$-\frac{nr^n}{1+r^n} \leqslant \operatorname{Re} \frac{d \ln [z f_n'(z) f_n^{-1}(z)]}{d \ln z} \leqslant \frac{nr^n}{1-r^n},$$

$$\frac{1}{1+r^n} \leqslant \operatorname{Re} \frac{z f_n'(z)}{f_n(z)} \leqslant \frac{1}{1-r^n},$$

$$\frac{1-nr^n}{1+r^n} \leqslant 1 + \operatorname{Re} \frac{z f_n''(z)}{f_n'(z)} \leqslant \frac{1+nr^n}{1-r^n},$$

в которых знак равенства достигается функцией $f_n(z) = z(1-z^n)^{-\frac{1}{n}}$.

Теорема 2. Если функция $f(z) \in M(1,1)$, то она однолистна и звездообразна в круге $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

И. Е. Базилевич

**342. О параметрическом представлении функций, регулярных и однолистных в кольце. Лебедев Н. А.**, Докл. АН СССР, 1955, 103, № 5, 767—768

Пусть: $K\left(\dfrac{m}{M}\right)$ — класс функций $w = f(\zeta)$, регулярных и однолистных в кольце $m < |\zeta| < M$ $(m > 0)$, не обращающихся в нуль, таких, что при $m < r_1 < r_2 < M$ образ окружности $|\zeta| = r_1$ лежит внутри образа $|\zeta| = r_2$; $K\left(\dfrac{m}{M}, \dfrac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $f(\zeta) \in K\left(\dfrac{m}{M}\right)$ и принимающих в заданной точке $z_0$ из $m \leqslant |z| \leqslant M$ заданное значение $w_0$; $K_T\left(\dfrac{m}{M}, \dfrac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w = f(\zeta) \in K\left(\dfrac{m}{M}, \dfrac{z_0}{w_0}\right)$, отображающих кольцо $m < |z| < M$ на область, лежащую в $m_T < |w| < M_T$, где $\dfrac{m_T}{M_T} = \dfrac{m}{M} e^{-T}$, $T > 0$; $\widetilde{K}\left(\dfrac{m}{M}, \dfrac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w = f(\zeta) \in K\left(\dfrac{m}{M}, \dfrac{z_0}{w_0}\right)$ и отображающих кольцо $m < |\zeta| < M$ на область, которая получена из плоскости $w$ выбрасыванием двух кривых Жордана, кончающихся одним своим концом соответственно в точках 0 и $\infty$.

Автор доказывает следующую теорему:

Теорема: Пусть $w = f(\zeta) \in \widetilde{K}\left(\dfrac{m}{M}, \dfrac{1}{1}\right)$. Тогда для каждой функции $\lambda(t)$, $0 \leqslant \lambda(t) \leqslant 1$, непрерывной в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \infty$, за исключением конечного числа разрывов первого рода, и такой, что интегралы $\int_0^\infty \lambda(t)\, dt$, $\int_0^\infty (1-\lambda(t))\, dt$ расходятся, найдутся непрерывные функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $|k_1| = |k_2| = 1$ и такие, что функция $f(\zeta)$ представима по формуле

$$f(\zeta) = \lim_{t \to \infty} f(\zeta, t),$$

где $f = f(\zeta, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{d}{dt} \ln f = \lambda(t) [K_{gt}(f^{-1} m_t k_1(t) - K_{gt}(m_t k_1(t))] -$$

$$- (1-\lambda(t)) [K_{gt}(f M_t^{-1} k_2(t)^{-1}) - K_{gt}(M_t^{-1} k_2(t)^{-1})] \quad (1)$$

при $f|_{t=0} = \zeta$; функция $K_g(\zeta)$ определяется формулой

$$K_g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta} - \frac{1+q\,\zeta^{-1}}{1-q^{2\nu}\zeta^{-1}}\right),$$

$q = \frac{m}{M}$, $q_t = \frac{mt}{M_2} = qe^{-t}$. Величина $m_t$ есть решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\ln m_t = -\lambda(t)\,\mathrm{Re}\,K_{qt}(m_t k_1(t)) - (1-\lambda(t))[1 - \mathrm{Re}\,K_{qt}(q_t m_t^{-1} k_2(t)^{-1})],$$

$$m_t|_{t=0} = m.$$

Заметим, что уравнение (1) получено ранее референтом (РЖМат, 1954, 2096), но в его уравнении функция $\lambda(t)$ принимает только значения нуль и единица и определяется функцией $f(\zeta)$ так же, как и функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$.

Кроме того, автор доказывает обратную теорему и указывает получение некоторых оценок в классе $K\left(\frac{m}{M}\right)$ и его подклассах. Ли Ен Пир

**343. Конформное отображение четырехугольников, ограниченных круговыми дугами.** Баранцева О. А., Науч. ежегодник за 1954 г. Саратовский ун-т, Саратов, 1955, 666—667

Задача конформного отображения четырехугольника, ограниченного круговыми дугами, с тремя прямыми углами и одним углом, равным $\pi\nu$, на полуплоскость так, что вершина с углом $\pi\nu$ переходит в бесконечно удаленную точку, сводится к решению дифференциального уравнения Хилла. Г. В. Корицкий

**344. Геометрическая интерпретация высших производных и реципрокантов при конформном отображении плоскости.** Диамантопулос (Geometrische Interpretation der höheren Ableitungen und der Reziprokanten bei der konformen Abbildung der Ebene. Diamantopoulos Th.), Arch. Math., 1956, 7, № 1, 67—73 (нем.)

Абсолютным однородным реципрокантом называется рациональная функция последовательных производных $w'(z)$, $w''(z)$, ..., меняющая только свой знак при замене производных обратными им величинами.

Пусть $w(z)$ — однозначная ветвь аналитической функции, отображающая некоторую аналитическую кривую плоскости $z$; $s$ и $S$ — длины дуг, $\varphi$ и $\Phi$ — углы наклона касательных, $\rho_1$, $\rho_2$, ... и $P_1$, $P_2$, ... — радиусы кривизны различных порядков $\left(\rho_1 = \frac{ds}{d\varphi},\ \rho_n = \frac{d\rho_{n-1}}{d\varphi};\ P_1 = \frac{dS}{d\Phi},\ P_n = \frac{dP_{n-1}}{d\Phi}\right)$ соответственно отображаемой кривой и ее образа. Радиусом стягивания (Schrumpfungsradius) порядка $n$ автор называет вектор, коллинеарный касательной, приложенный в точке касания и комплексные координаты которого для отображаемой кривой и ее образа определяются соответственно формулами:

$$r_n^* = \frac{d^n s}{d\theta^n} e^{i\varphi},\ R_n^* = \frac{d^n S}{d\Theta^n} e^{i\Phi},\ n = 2, 3, \ldots,$$

$$r_1^* = \frac{t_s''}{t_s'} e^{i\varphi},\ R_1^* = \frac{t_S''}{t_S'} e^{i\Phi},$$

где $\theta = \lg t_s'$, $\Theta = \lg t_S'$ и $t$ — некоторый действительный параметр, общий для обеих кривых. Вводятся векторы $r_n^* = \sqrt{w_z'}\, r_n^*$, $\rho_n^* = \sqrt{w_z'}\,\rho_n^*$, $R_n^* = \sqrt{z_w'}\, R_n^*$, $P_n^* = \sqrt{z_w'}\, P_n^*$, где $\rho_n^* = i^n \rho_n e^{i\varphi}$, $P_n^* = i^n P_n e^{i\Phi}$, $z(w)$ — ветвь обратной функции, определяемая так, что если $w_1 = w(z_1)$, то $z_1 = z(w_1)$, и $\arg\sqrt{z_w'} + \Phi = \arg\sqrt{w_z'} + \varphi = \frac{\varphi + \Phi}{2}$;

Доказывается, что абсолютные однородные реципроканты $I_n = \frac{d^n \lg w_z'}{da^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, где $a = \int_{z_1}^{z} \sqrt{w'(z)}\, dz = \int_{w_1}^{w} \sqrt{z'(w)}\, dw$, обладают следующими свойствами; 1) они являются однородными рациональными многочленами векторов $r_i^*$, $\rho_i^*$, $R_i^*$, $P_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ степени $n$ и содержат с отрицательными показателями векторы $r_1^*$, $\rho_1^*$, $R_1^*$, $P_1^*$ и с положительными показателями векторы, для которых $2 \leqslant i \leqslant n$; 2); члены этих многочленов попарно антисимметричны относительно взаимных подстановок $r_i^* \leftrightarrow R_i^*$, $\rho_i^* \leftrightarrow P_i^*$.

Отмечается, что использованный метод можно применить к изучению последовательностей реципрокантов других видов.

Доказывается также, что коэффициенты ряда Тейлора отображающей функции в данной точке отображаемой кривой выражаются через радиусы кривизны и стягивания в этой точке и в соответствующей ей точке образа кривой и через величину $\lambda = S_s' e^{i(\Phi - \varphi)}$. Утверждается справедливость обратного предложения: если в двух соответствующих друг другу точках двух аналитических кривых задать радиусы кривизны и стягивания всех порядков с общим параметром $t$ и величину $\lambda = S_s' e^{i(\Phi - \varphi)}$, то можно получить (при помощи канонического разложения координат) в окрестности точки отображаемой кривой ряд Тейлора отображающей функции независимо от отображения плоскости. Г. В. Корицкий

**345. К теории конформных преобразований круга на неналегающие области.** Лебедев Н. А., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 4, 553—555

Пусть $D$ — односвязная область, содержащая данные различные точки $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; если $a_k \neq \infty$, $w = f_k(\zeta)$. $f_k(0) = a_k$ — функция, однолистно и конформно отображающая $|\zeta| < 1$ на область $D_k$, $D_k \subset D$; если $a_n = \infty$, $f_n(\zeta)$, $f_n(\infty) = \infty$ — функция, отображающая $|\zeta| > 1$ на $D_n$, $D_n \subset D$; области $D_k$ не налегают друг на друга. Пусть для всевозможных допустимых систем функций $f_k(\zeta)$, $\varepsilon_D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x = |f_k'(0)|$, если $a_k \neq \infty$, и $x_n = |f_n'(\infty)|^{-1}$, если $a_n = \infty$.

Доказывается, что в случае, когда $D$ — вся плоскость (включая $w = \infty$), $\varepsilon_D(0, \infty)$ есть область $0 < x_1 x_2 \leqslant 1$, $x_1 > 0$, причем $x_1 x_2 = 1$ только при $f_1(\zeta) = t\zeta$, $|\zeta| < 1$, $f_2(\zeta) = \zeta/t$, $|\zeta| > 1$, $0 < t < \infty$, а $\varepsilon_D(a_1, a_2)$ есть область $0 < x_1 x_2 \leqslant |a_1 - a_2|^2$, $x_1 > 0$, причем $x_1 x_2 = |a_1 - a_2|^2$ только при $f_1(\zeta) = (a_1 k_1 - a_2\zeta)(k_1 - \zeta)^{-1}$, $f_2(\zeta) = (a_2 k_2 - a_1\zeta)(k_2 - \zeta)^{-1}$, $|k_1 k_2| = 1$. Далее, на основании решения некоторых экстремальных задач определены области $\varepsilon_D(a_1, a_2)$ для случаев когда $D$ — плоскость с выключенной точкой $\infty$ и круг $|w| < R$. Из этих теорем, как следствие, получены вновь известный результат М. А. Леврентьева (Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1934, 5, 159) и точные оценки $|f_1'(0)|^{\alpha} |f_2'(0)|^{\beta}$, $\alpha$, $\beta > 0$, Л. И. Колбиной (Докл. АН СССР, 1952, 84, № 5, 865; $D$ — конечная плоскость), референта и А. Э. Фалес (Докл. АН СССР, 1951, 81, № 6, 991; $D$ — круг). Указано, что метод автора дал также возможность определить $\varepsilon_D(0, a, \infty)$ и $\varepsilon_D(a_1, a_2, a_3)$ для случая, когда $D$ есть вся плоскость. П. П. Куфарев

**346. К теории конформных преобразований круга на неналегающие области.** Лебедев Н. А., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 249—250

См: реф. 345.

**347.** · **К задаче коэффициентов $p$-листных функций.** Гельфер С. А., Докл. АН СССР, 1956, № 6, 953—958

Пусть $F_p^g(a_1, \ldots, a_m)$ — класс функций $z = f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k$, удовлетворяющих условиям: 1) $f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta| < 1$, 2) $f(\zeta)$ отображает круг $|\zeta| < 1$ взаимно однозначно на область $D$, лежащую на какой-нибудь $p$-листной алгебраической римановой поверхности $R$, жанр которой не превосходит фиксированного числа $g$, причем все функции, отображающие $|\zeta| < 1$ на области одной и той же римановой поверхности, переводят точку $\zeta = 0$ в одну и ту же точку этой поверхности, лежащую над точкой $z = 0$, 3) $f(\zeta)$ выпускает в $|\zeta| < 1$ заданную систему конечных значений $a_1, \ldots, a_m$.

В статье доказана теорема: функция $f(\zeta) \in F_p^g(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, для которой $|c_n|$ при заданном $n \geqslant 1$ достигает максимума, отображает круг $|\zeta| < 1$ на всю поверхность $R$ с разрезами по конечному числу аналитических дуг.

Доказательство опирается на вариационные формулы, полученные автором (РЖМат, 1955. 5748).

Н. А. Лебедов

**348. Заметка о значениях, выпускаемых $p$-листными функциями.** Ройстер (Note on values omitted by $p$-valent functions. Royster W. C.), Duke Math. J., 1955, 22, № 1, 153—156 (англ.)

Пусть $\mathfrak{F}$ есть класс функций $f(z) = z^p + \ldots$, регулярных и $p$-листных в $|z| < 1$. Для $f(z) \in \mathfrak{F}$ Бернацкий (Biernacki M., Bull. sci. math., ser. 2, 1946, 70, 45—51) показал, что уравнение $f(z) = \alpha$ имеет 1) по крайней мере один корень в $|z| < 1$, если $|\alpha| < \frac{1}{4}$, а референт (Techn. Rep. № 11, Stanford Univ. Calif., 1950) — что оно имеет 2) ровно $p$ корней в $|z| < 1$, если $|\alpha| < 4^{-p}$.

Автор рассматривает подкласс тех функций из $\mathfrak{F}$, для которых $|f(z)| < M$ в $|z| < 1$, и полагает $h(z) = f(1 + f/M)^{-2}$, так что $h(z) \in \mathfrak{F}$. В этом случае 1) усиливается $|\alpha| < 2M^2 - M - 2M(M^2 - M)^{1/2}$ и это неравенство является наилучшим. Этот метод не дает наилучшего усиления 2), если $p > 1$, хотя автор утверждает противное; экстремальные функции, данные автором в теоремах 1 и 3, нерегулярны в полном круге $|z| < 1$. Верным усилением в этом случае является неравенство

$$|\alpha| < [2M^{2/p} - M^{1/p} - 2M^{2/p}(2M^{2/p} - M^{1/p})^{1/2}]^p.$$

Оно может быть получено применением теоремы XIII референта (см. цит. выше) к $[f(z)]^{1/p}$. Устанавливаются также некоторые смежные результаты. W. K. Hayman

Перевод из Math. Revs. 1955, 16, № 7, 685.

**349. Об искажении при отображении многолистных областей с ограниченным вращением границы.** Паатеро (Über die Verzerrung bei der Abbildung mehrblättriger Gebiete von beschränkter Randdrehung. Paatero V.), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1953, Sar. AI, № 147, 7 S. (нем.)

Пусть $a_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ и $b_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ есть отличные от нуля аффиксы $n + m$ различных заданных точек круга $|z| < 1$. Пусть далее $\mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — произвольные заданные вещественные числа $\geqslant 0$.

Рассматривается класс вообще многозначных в круге $|z| < 1$ аналитических функций

$$\zeta(z) = \int_0^z \frac{P(z)}{Q(z)} \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln(1 - ze^{-i\vartheta})\, d\varkappa(\vartheta)\right\} dz, \quad (1)$$

где

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n}\left[(1 - \bar{a}_k z)\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)\right]^{\mu_k},$$

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{m}\left[(1 - \bar{b}_k z)\left(1 - \frac{z}{b_k}\right)\right]^{\lambda_k + 2},$$

$\varkappa(\vartheta)$ — функция с ограниченным изменением на сегменте $[0; 2\pi]$, причем

$$\int_0^{2\pi} d\varkappa(\vartheta) = 2\pi\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\mu_k - \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k + 2)\right] = \varkappa.$$

Функция (1) нормирована условиями

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta'(0) = 1$$

и отображает круг $|z| < 1$ на многолистную область, граница которой обладает ограниченным вращением

$$\alpha = \int_0^{2\pi} |d\varkappa(\vartheta)|.$$

Устанавливаются следующие оценки.

1. Если $z$ — аффикс точки круга $|z| < 1$, отличной от точек $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то

$$M(-|z|) \leqslant |\zeta'(z)| \leqslant M(|z|); \quad (2)$$

$$M(r) = f(r)\frac{P^*(r)}{Q^*(r)}, \quad f(r) = \frac{(1 + r)^{\frac{\alpha - \varkappa}{2\pi}}}{(1 - r)^{\frac{\alpha + \varkappa}{2\pi}}};$$

$$P^*(r) = \prod_{k=1}^{n}\left[(1 + |a_k|\, r)\left(1 + \frac{r}{|a_k|}\right)\right]^{\mu_k};$$

$$Q^*(r) = \prod_{k=1}^{m}\left|(1 - |b_k|\, r)\left(1 - \frac{r}{|b_k|}\right)\right|^{\lambda_k + 2}.$$

Оценки точные и достигаются функциями

$$\zeta_0(z) = \int_0^z f(ze^{-i\omega})\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

этого же класса ($\omega$ — вещественная постоянная).

2. При том же условии относительно $z$ имеем

$$\left|\frac{\zeta''(z)}{\zeta'(z)}\right| \leqslant \frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{1 - |z|} + \sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\frac{|a_k|}{|1 - \bar{a}_k z|} + \frac{1}{|z - a_k|}\right) + \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k + 2)\left(\frac{|b_k|}{|1 - \bar{b}_k z|} + \frac{1}{|z - b_k|}\right). \quad (3)$$

Данная оценка точна только при $z = 0$ или же при условии, что функция $\varkappa(\vartheta)$ не убывающая на сегменте $[0; 2\pi]$. В последнем случае оценка (3) достигается функцией

$$\zeta_1(z) = \int_0^z \frac{P(z)}{(1 - ze^{-i\omega})^{\alpha/\pi}Q(z)}\, dz$$

рассматриваемого класса. Автор замечает, что из (2) и (3) можно получить неточную оценку сверху для $|\zeta''(z)|$. В. А. Зморович

**350. Метод последовательных конформных отображений и его приложения к задачам фильтрации. II. Случай произвольной линии водоупора.** Фильчаков П. Ф., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 76—91. Ч. I см. РЖМат, 1956, 6531.

Для приближенного решения задачи о фильтрации под плотиной используется функция, дающая конформное отображение полуплоскости на полуплоскость с вырезанным треугольником. Рассматривается случай произвольного криволинейного подземного водоупора. Приводятся числовые примеры. Г. Н. Положий

**351. О проблеме единственности в теории асимптотических рядов. Мейли** (Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen. Meili Heino Jürg), Comment. math. helv., 1955, 29, № 1, 93—96 (нем.)

В статье приводится основной результат диссертации автора, опубликованной в сентябре 1954 г. (Druckerei Leemann A. G., Zürich).

Рассматривается область $G$ плоскости $w = u + iv$, ограниченной кривой Жордана $\Gamma$ с граничной нулевой точкой, удовлетворяющей условиям:

1. Область $G$ симметрична относительно действительной оси.

2. На каждой окружности с центром в начале координат с радиусом $r$ $(0 < r \leqslant 1)$ лежит один континуум $G$, с углом $\theta(r)$, под которым эта дуга видна из точки 0.

3. Функция $\theta(r)$ в интервале $0 < r \leqslant 1$ имеет положительную нижнюю грань $\theta_m$.

4. На этом интервале $\theta(r)$ — функция с ограниченным изменением.

Теорема. Всякая аналитическая в области $G$ функция $F(w)$, удовлетворяющая условиям

$$|F(w)/(w-w_0)^n| \leqslant k^n a_n^n, \tag{1}$$

где $k > 0$ — некоторое число, $w \in G$, $w_0 \in \bar{G} - G = \Gamma$, при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\pi \int_{1/a_n}^{1} dr/r\theta(r)\right) = +\infty \tag{2}$$

тождественно обращается в нуль тогда, когда сходимость ряда (2) влечет за собой существование удовлетворяющей условиям (1) функции $F(w)$, не равной тождественно нулю.

Автор указывает, что аналогичный результат имеется в оригинале книги С. Мандельбройта «Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения», опубликованной в 1952 г. в Париже, но добавляет, что с этой книгой он ознакомился после завершения разработки своей диссертации.

Следует отметить, что в связи с решением задачи о взвешенном приближении в комплексных областях ранее аналогичные обобщения проблемы Ватсона были получены М. М. Джрбашяном (РЖМат, 1956, 7277).

Бадалян Г. В.

**352. Об одной интерполяционной задаче в классе целых функций конечного порядка и конечного типа. Трошин Г. Д.**, Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1955, 28, 143—153

Н. П. Лапиным и референтом (Леонтьев А. Ф., Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, 39, стр. 184) установлена теорема: Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ точек положительной части вещественной оси удовлетворяет условию: $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho}} = \tau < \infty$ и пусть

$$L_{n+1,\,\omega}(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_j^2}\right), \quad \mu_j = \lambda_j^{\rho}.$$

Для того чтобы существовала по меньшей мере одна целая функция $\omega(z)$ из класса $[\rho, \infty)$ $(f(z) \in [\rho, \infty)$, если $|f(z)| < e^{K|z|^{\rho}}$ при больших $|z|)$ со свойством: $\omega(\lambda_n) = a_n$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j L_{n+1,\,\omega}(\mu_j)}{L'_{1,\,\omega}(\mu_j)}\, e^{-\mu_j z} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходилась равномерно внутри некоторого угла $|\arg z| < \gamma$, $|z| > R$. Показывается, что теорема остается верной и тогда, когда $\lambda_n$ удовлетворяют условиям

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} = \tau > \infty, \quad |\arg \lambda_n| \leqslant \mu < \frac{\pi}{2m},$$

где $m$ — наименьшее целое число $> \rho$. А. Ф. Леонтьев

**353. Заметка о целых функциях регулярного роста, определенных рядами Дирихле. Рахман** (A note on entire functions (defined by Dirichlet's series) of perfectly regular growth. Rahman Q. I.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 23, 173—175 (англ.)

Пусть

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad \lambda_n \uparrow \infty, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0, \quad s = \sigma + it$$

— целая функция порядка $\rho$ в смысле Ритта, $M(\sigma) = \sup |f(\sigma + it)|$, $\nu(\sigma)$ — номер максимального члена ряда при $\mathrm{Re}(s) = \sigma$, $L(x)$ — медленно изменяющаяся функция $(L(x) > 0$ и $L(cx) \sim L(x)$ при $x \to \infty$ для каждой постоянной $c)$. Отмечается регулярность роста $\lambda_{\nu(\sigma)}$, если $M(\sigma)$ растет регулярно (в смысле, указанном ниже).

Пусть $0 < \rho < \infty$ и

$$\lim_{\sigma\to\infty} \left\{\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\right\} \frac{\ln M(\sigma)}{e^{\rho\sigma} L(e^{\sigma})} = \left\{\begin{matrix}T,\\ \tau;\end{matrix}\right.$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \left\{\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\right\} \frac{\lambda_{\nu(\sigma)}}{e^{\rho\sigma} L(e^{\sigma})} = \left\{\begin{matrix}\gamma,\\ \delta;\end{matrix}\right.$$

утверждается, что если $0 < \tau \leqslant T < \infty$, то тогда $0 < \delta \leqslant \gamma < \infty$, и обратно. Два других утверждения аналогичны. А. Ф. Леонтьев

**354. О максимуме модуля целой функции от целой функции. Клуни** (The maximum modulus of an integral function of an integral function. Clunie J.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 23, 176—178 (англ.)

Пусть $h(z)$, $g(z)$ — целые функции, $f(z) = g[h(z)]$; пусть далее $H(r)$, $G(r)$, $F(r)$ — максимумы модулей перечисленных функций в круге $|z| \leqslant r$. Уточняется результат Пойа (Polya G., J. London Math. Soc., 1926, № 1, 12—15), согласно которому имеется такая постоянная (неизвестная) $c$, $0 < c < 1$, что $F(r) \geqslant G\left[cH\left(\frac{1}{2}r\right)\right]$.

Доказывается, что вне некоторой системы исключительных интервалов, на которой вариация $\ln r$ конечная, выполняется соотношение

$$F[r \exp(k_1 N^{-\frac{3}{2}} \ln^{\frac{5}{2}} N)] \geqslant G[H(r)],$$

где $N = N(r)$ — центральный индекс $h(z)$ для $|z| = r$ и $k_1$ — постоянная, зависящая от $h(z)$. Если $r$ лежит в исключительном интервале, то тогда

$$F\{r \exp[k_1 N_1^{-\frac{3}{2}} \ln^{\frac{5}{2}} N_1 - \mu(r_1)/\ln N_1]\} \geqslant$$

$$\geqslant G\left\{H\left[r \exp\left(-\frac{\mu(r_1)}{\ln N_1}\right)\right]\right\},$$

где $k_1$ — прежняя постоянная, $\mu(x)$ — функция такая, что $\overline{\lim}_{x\to\infty} \mu(x) \leqslant 1$, $N_1 = N(r_1)$ — центральный индекс

$h(z)$ в круге $|z|\leqslant r_1$, причем

$$r = r_1 \exp[\mu(r_1)/\ln N_1].$$

А. Ф. Леонтьев

**355. О нулях последовательных производных аналитических функций I, II. Комб** (Sur les zéros des dérivées successives des fonctions analytiques I, II. Combes Jean,), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 1, 39—41; № 2, 145—146 (франц.)

Пусть $W^{(\alpha)}$ — верхняя грань чисел $A$, для которых существует аналитическая функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{(n!)^{1+\alpha}}$, удовлетворяющая условиям:

$$f^{(n)}(z_n) = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ |z_n| \leqslant An^{\alpha},$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,\ \alpha \geqslant -1$$

(постоянная $W^{(0)}$ носит название постоянной Уиттекера, $W^{(-1)}$ — постоянной Гончарова).

Обе заметки посвящены оценкам постоянных $W^{(\alpha)}$ сверху и снизу. Основой метода доказательства является утверждение:

Пусть

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n z^n}{n!},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n z^n}{(n!)^{\alpha+1}},$$
$$\alpha \geqslant -1,\ |A_n| \leqslant C;$$

тогда, равномерно по $z$ в любой конечной области,

$$F^{(n)}(z) - (n!)^{\alpha} f^{(n)}(zn^{\alpha}) \to 0.$$

М. А. Евграфов

**356. Бесконечные системы линейных уравнений и базисы аналитических функций. Казьмин Ю. А.,** Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 179—182

Для специального вида систем функций $\{f_n(z)\}$, аналитических в круге или в кольце, формулируются условия, при которых они образуют квазистепенной базис. Базис в круге $|z| < R$ называется квазистепенным, если в разложении

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z) \qquad (1)$$

произвольной функции, аналитической в $|z| < R$, коэффициенты подчинены условию

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R}, \qquad (2)$$

и наоборот, всякий ряд (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2), выражает функцию, аналитическую в круге $|z| < R$. Основной результат статьи: Система $f_k(z) = z^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} z^n$, $k = 0, 1 \ldots$, образует квазистепенной базис в каждом круге $|z| < r$, $1 < r \leqslant R$, если: 1) $\sum_{n,\,k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$; 2) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \times \sqrt[n]{q_n} = \frac{1}{R}$; $R > 1$, $q_n = \text{наиб.}_{k=0,1,\ldots,\ k\neq n} |a_{n,k}|$; 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_{00}, & a_{01}, & \ldots \\ a_{10}, & 1+a_{11}, & \ldots \end{vmatrix} \neq 0$. Аналогичная теорема формулируется для базиса в кольце. В частности, система $f_k(z) = z^k + f^{(k)}(z)$, $k = 0, 1, \ldots$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, $|a_0| + |a_1| + \ldots < 1$, образует базис в круге $|z| < r$, $r > 1$ — результат более общий, чем ранее полученный Ереминым (РЖМат, 1954, 3295).

Приводятся также достаточные признаки базисов в круге вида

$$\{z^k f^{(k)}(\zeta_k z)\},\ \left\{z^k + \int_0^z \ldots \int_0^z f(z)\,dz^k\right\},$$

$\{z^k + \zeta_k f(\zeta_k, z)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, и базисов в кольце вида $\{z^k f(\zeta_k z)\}$, $\left\{z^k\left[f_1(\alpha_k z) + f_2\left(\frac{z}{\beta_k}\right)\right]\right\}$,

$$\left\{z^k + \zeta_k f_1(\zeta_k z) + f_2\left(\frac{z}{\zeta_k}\right)\right\},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

М. Г. Хапланов

**357. Об аналитических решениях линейных дифференциально-разностных уравнений. Хан** (Über analytische Lösungen linearer Differential-Differenzengleichungen. Hahn Wolfgang), Math. Z., 1955, **63**, № 3, 313—319 (нем.)

Устанавливаются некоторые свойства рядов

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{s_n z}, \qquad (1)$$

с помощью которых выражаются решения уравнения

$$\sum_{i=0}^{p} a_i y^{(i)}(z) + \sum_{i=0}^{q} b_i y^{(i)}(z-1) = 0.$$

Здесь $a_i$, $b_i$ — постоянные и $s_n$ — корни характеристического уравнения

$$\sum_{i=0}^{p} a_i s^i + e^{-s} \sum_{i=0}^{q} b_i s^i = 0. \qquad (2)$$

В дальнейшем предполагается, что $p > q$ и в ряде (1) показатели $s_n$ пробегают корни уравнения (2) только с положительными мнимыми частями. Используя тот факт, что

$$s_n = -(p-q)\ln n + c_1 + c_2 ni + c_3 i + O(\ln n/n),$$

доказываются следующие утверждения:

1) Пусть $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|A_n|}{v_n}$ $(s_n = u_n + iv_n)$. Тогда ряд (1) абсолютно сходится для $\operatorname{Im}(z) > a$ и расходится для $\operatorname{Im}(z) < a$.

2) Пусть

$$c = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln|A_n| - av_n}{-u_n}$$

(число $a$ определено выше). Тогда ряд (1) сходится на прямой сходимости $z = x + ia$ при $x > c + \frac{1}{p-q}$, причем абсолютно, и расходится при $x < c$.

3) Пусть ряд (1) сходится в точке $z_0$ прямой сходимости. Тогда он будет равномерно сходиться в каждом угле с вершиной в $z_0$ и раствором, меньшим $\pi$, расположенном в верхней полуплоскости (теорема абелева типа);

4) Пусть $a = 0$ и $f(x_0 + iy)$ имеет предел $L$ при $y \to +0$.

Если $\lim_{n\to\infty} nA_n = 0$, то тогда ряд (1) сходится при $z = x_0$ и имеет сумму $L$ (теорема тауберова типа).

А. Ф. Леонтьев

**358. Об особых точках рядов Дирихле класса Крамера. Ламбер** (Sur les points singuliers des séries de Dirichlet d'une classe de Cramer. Lambert Mau-

r i c e), Ann. scient. École norm. supér., 1955, 72, № 3, 199—235 (франц.)

Приводится подробное доказательство первой (дополняющей теорему Пойа) из двух теорем, сформулированных автором ранее (РЖМат, 1955, 170). Применяемый метод, основанный в существенных чертах на теореме В. Бернштейна, используется затем для того, чтобы для рядов Дирихле вновь, но другим путем, установить теорему Пойа. Другой подход к решению одного и того же вопроса дал возможность автору высказать (без доказательства) некоторые теоремы, которые мы не находим у Пойа.

Так формулируются две теоремы того же типа, что и вторая теорема из вышеуказанного реферата.

А. Ф. Леонтьев

**359. Одно свойство ограниченных аналитических функций. Эглстон** (A property of bounded analytic functions. E g g l e s t o n H. G.), Comment. math helv., 1956, 30, № 2, 139—143 (англ.)

Приводится доказательство теоремы, обобщенной впоследствии Коллингвудом (РЖМат, 1956, 4446).

А. А. Гольдберг

**360. Функции с ограниченной характеристикой с заданными точками неопределенности. Б а г е м и л, З е й д е л ь** (Functions of bounded characteristic with prescribed ambiguous points. B a g e m i h l F., S e i d e l W.), Michigan Math., J., 1955—1956, 3, № 1, 77—81 (англ.)

Из результатов Багемила (РЖМат, 1956, 2940) следует, что если $f(z)$ — комплекснозначная функция в $|z|<1$ и $J_1$, $J_2$ — жордановы дуги в $|z|<1$ с концом в точке $\zeta$, $|\zeta|=1$, то пределы

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in J_1}} f(z) \qquad \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in J_2}} f(z)$$

существуют и различны для не более чем счетного множества $E$ точек $\zeta$; с другой стороны, известно, что если $f(z)$ — регулярная и ограниченная, то $E$ пусто.

Авторы показывают, что последнее не имеет места для функций ограниченного вида (в смысле Неванлинна). Доказывается: каково бы ни было счетное множество $E$ окружности $|z|=1$, существует в $|z|<1$ регулярная функция ограниченного вида, обладающая в точках $\zeta\in E$ указанным выше свойством. И. Н. Песин

**361. Аналитические функции класса $H_p$. Р у д и н** (Analytic functions of class $H_p$. R u d i n W a l t e r), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, 46—66 (англ.)

В § 1 работы введены классы $H_p$ в произвольных областях. Пусть $D$ — произвольная область и $p>0$. Однозначная аналитическая функция $f(z)\in H_p(D)$, если субгармоническая функция $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту.

Т е о р е м а. Пусть $t$ — фиксированная точка $D$, $\Delta$ — область, содержащая $t$ и $\bar{\Delta}\subset D$, причем $\Gamma$ — граница $\Delta$ — состоит из гладких кривых и $G$ — функция Грина для $\Delta$ с полюсом в точке $t$. Для того чтобы $f(z)\in H_p(D)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $M$, не зависящая от $\Delta$, такая что $\int_\Gamma |f|^p \partial G/\partial n \leqslant M$.

Замечается, что свойство $f(z)\in H_p(D)$ является «аналитическим инвариантом». Это означает, что если $\psi(z)$ — однозначная мероморфная функция в области $D_1$, причем $\psi(D_1)\subset D$, то для каждой $f\in H_p(D)$ функция $f_1(z)=f(\psi(z))$, $z\in D_1$, входит в $H_p(D_1)$. Вводится класс $L_n^+(D)$, состоящий из функций $f(z)$, для которых $\ln^+|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту и класс $H_\infty(D)$, состоящий из ограниченных функций. Очевидно, что $L_n^+(D)\supset H_p(D)\supset H_q(D)\supset H_\infty(D)$ $(p>q)$.

Известна не решенная до сих пор проблема Пенлеве: найти необходимые и достаточные условия на $D$, чтобы класс $H_\infty(D)$ был нетривиальным (т. е. содержал бы $f(z)\not\equiv$ const). Аналогичный вопрос можно ставить и для классов $L_n^+(D)$ и $H_p(D)$. Автор доказывает следующее предложение: $L_n^+(D)$ тривиален в том и только в том случае, когда емкость границы $D$ равна нулю.

Ставятся остающиеся нерешенными два вопроса: 1. Для каких величин $p$ $H_p(D)$ нетривиален, если емкость $B>0$ ($B$ — граница $D$)? 2. Для каких величин $p$ $H_p(D)$ тривиален, если тривиален $H_\infty(D)$? Для аналогичных классов гармонических функций 2-й ответ $(p>1)$ был получен Парро (Parreau M., Ann. Inst. Fourier, 1951, 3, 103—197). Приводится еще следующая теорема, доказанная ранее Парро: Если $N$ — компактное подмножество $D$ емкости нуль и если $f\in H_p(D-N)$, то $f$ может быть доопределена на $N$ так, чтобы $f\in H_p(D)$.

В § 2 $H_p(D)$ рассматривается как линейное пространство. Норма вводится следующим образом: $\|f\|_p=[u(t)]^{1/p}$, $u(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта $|f(z)|^p$. Пусть $U$ — единичный круг, $\psi$ — униформизирующая функция для $D$ и $G$ — группа, относительно которой $\psi$ инвариантна.

Т е о р е м а. а) Существует естественный изоморфизм, сохраняющий норму между $H_1(D)$ и замкнутым подпространством $H_p(u)$. Этот изоморфизм получается из формулы

$$f_1(z)=f(\psi(z)),\ z\in U,\ f\in H_p(D),\ f_1\in H_p(u).$$

б) $H_p(u)$ — подпространство, изоморфное $H_p(D)$, состоит из функций, инвариантных относительно группы преобразований $G$. в) $H_p(D)$ — полное сепарабельное линейное хаусдорфово пространство. г) Если $p\geqslant 1$, $H_p(D)$ — банахово пространство: если $p>1$, $H_p(D)$ — однородно выпуклое. д) Хотя норма $\|f\|_p$ зависит от выбора точки $t$, индуцируемая ею топология от выбора точки $t$ не зависит.

Т е о р е м а. Функционалы $T_{m,z}=f^{(m)}(z)$ все ограничены на $H_p(D)$.

Т е о р е м а. Если $f_n\to f$ слабо в $H_p(D)$, тогда $\{\|f_n\|_p\}$ ограничены и $f_n(z)\to f(z)$ равномерно на каждом компактном подмножестве $D$. Обратное справедливо для $p>1$, но может быть несправедливо для $p=1$. В более частных предпосылках эта теорема была известна (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 1950, гл. II, § 14; Walters S. S., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 800—805; Хавинсон С. Я., РЖМат, 1956, 8735).

В § 3 свойства классов $H_p(D)$ специализируются для конечносвязных областей с аналитической границей. В § 4 изучается экстремальная задача для $H_1(D)$ ($D$ — $k$-связная область с аналитической границей). Пусть $X\subset H_1(D)$ означает подпространство, состоящее из функций $f(z)$, для которых $f(t)=0$ ($t$ — фиксировано). Поставим задачу $\sup_{f\in X,\ \|f\|\leqslant 1}|f'(t)|$. Доказана т е о р е м а: 1) Экстремальные функции существуют. Всякая экстремаль $f_0(z)$ аналитична в $\bar{D}$; 2) Существует единственная функция вида $g(z)=1/(z-t)+\sum_{m=1}^{k-1} c_m/(z-t_m)+b(z)$ $(b(z)\in H_\infty(D))$, для которой

$|g(z)| = \alpha$ на $B$, причем для всякой экстремали $f_0(z)$ имеем: $f_0(z)\,g(z) \geqslant 0$ на $B$. 3) Существуют целые числа $N$, $M$, $1 \leqslant N \leqslant M \leqslant K$ (зависящие от $t$ и $D$) такие, что $g(z)$ имеет $N$ полюсов и $M - N$ нулей, а каждая $f_0(z)$ имеет $M$ нулей в $D$ (нули $f_0(z)$ на границе $D$ считаются с половинной кратностью); 4) Если нули ядра Сёге для $D$ совпадают с критическими точками функции Грина $G(z)$ (с полюсом в $t$), то $M = N = K$. В противном случае $M < N$; 5) Если две экстремальные функции $f_0$ имеют одинаковые нули, то они совпадают.

Примечание референта. Основные результаты § 3—4 являются весьма частными случаями результатов, полученных референтом в цитированной работе. С. Я. Хавинсон

**362. О проблеме Каратеодори — Фейера для аналитических функций в конечносвязных областях. Хавинсон С. Я.,** Уч. зап. Владимирск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 2, 43—50.

Автор рассматривает конечную $n$-связную область $G$, ограниченную правильными аналитическими контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, причем $\Gamma = \Sigma_{i=1}^{n} \gamma_i$; если $\omega(x)$ — заданная на $\Gamma$ функция, аналитическая на каждом $\gamma_i$ и не совпадающая ни на одном из них с граничными значениями функции класса $E_1$, то в задаче о нахождении

$$\sup \left| \int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx \right|, \quad |f(z)| < 1, \; z \in G,$$

где $f(z)$ — однозначная в $G$ аналитическая функция, существует единственная экстремальная функция $f^*(z)$, причем либо $f^*(z) \equiv e^{i\alpha}$, либо $f^*(z)$ отображает $G$ на $m$-листный единичный круг ($m \leqslant n$).

Пусть $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$ — заданные на $\Gamma$ функции, аналитические на каждом $\gamma_i$, причем никакая их линейная комбинация не совпадает ни на одном $\gamma_i$ с граничной функцией класса $E_1$; если

$$l_k(f) = \int_\Gamma f(x)\,\omega_k(x)\,dx = C_k, \quad (k = 1,2, \ldots, m), \quad (1)$$

то из всех аналитических функций, ограниченных в $G$, наименее уклоняется в $G$ от нуля та функция, которая отображает $G$ на многократно покрытый круг.

Автор обобщает, таким образом, задачи Каратеодори—Фейера и Пика в двух направлениях: вместо круга рассматривается $n$-связная область $G$, а вместо задания значений функции и ее первых производных в точках области $G$ задаются более общие функционалы (1). Я. Л. Геронимус

**363. Обратные экстремальные проблемы в теории функций. Лакс** (Reciprocal extremal problems in function theory. Lax Peter D.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 3, 437—453 (англ.)

В работе повторена при более ограниченных условиях некоторая часть результатов референта (РЖМат, 1954, 193). С. Я. Хавинсон

**364. О множествах граничных значений мероморфных функций. Мейер** (Über Mengen von Randwerten meromorpher Funktionen. Meier Kurt E.), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 3, 224—233 (нем.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в области (лежащей в верхней полуплоскости), граница которой содержит интервал $I$ действительной оси, пусть $S_x(\alpha)$ есть множество предельных значений $f(z)$, когда точка $z$ стремится к точке $x \in I$ вдоль луча, исходящего из точки $x$ и наклоненного под углом $\alpha$ к действительной оси, $0 < \alpha < \pi$; пусть далее множество $\Gamma_x$ определено следующим образом: точка $c \in \Gamma_x$, если имеются два различных угла $\alpha$ и $\beta$ такие, что значения $c$ не содержат ни $S_x(\alpha)$, ни $S_x(\beta)$.

Доказывается следующая основная теорема: Интервал $I$ можно разбить на три множества $E_1$, $E_2$ и $E_3$ такие, что: 1) в каждой точке $x \in E_1$ функция $f(z)$ имеет угловое граничное значение; 2) для каждого $x \in E_2$ в каждом угле $\omega_x(\alpha, \beta)$, образованном двумя лучами, исходящими из точки $x$ и образующими с положительным направлением действительной оси углы $\alpha$ и $\beta$, $0 < \alpha < \beta < \pi$, функция $f(z)$ принимает каждое значение из $\Gamma_x$ бесконечное число раз; 3) $\operatorname{mes} E_3 = 0$.

Эта теорема дает некоторое условие известной теоремы А. И Плеснера. Сформулированы еще три предложения, являющиеся следствием основной теоремы. Н. А. Давыдов

**365. Неравенства, относящиеся к дефектам функции, мероморфной в единичном круге. Коллингвуд, Ловатер** (Inégalités relatives aux défauts d'une fonction méromorphe dans le cercle-unité. Collingwood Edward F., Lohwater Arthur J.), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 10, 1255—1257 (франц.)

Пусть $w = f(z)$ — функция, мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ (в случае $R < \infty$ $f(z)$ предполагается функцией неограниченного вида). Согласно теореме Коллингвуда — Сельберга (Comment math. helv., 1946, **18**, 309—326), если прообразы $|w - a| < \sigma$ являются областями в $z$-плоскости, в каждой из которых $f(z)$ любое значение принимает не более $p$ раз ($\sigma$ и $p$ — постоянные), то неванлинновский дефект $f(z)$ в точке $a$ $\delta(a, f) = 0$. Предполагая, что $\sigma = \sigma(|z|)$ и $p = p(|z|)$ не являются постоянными, Коллингвуд (Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 308—346) получил для $\delta(a, f)$ оценки сверху. В реферируемой статье эти оценки заменяются более точными для случая, когда $R = 1$, $f(z)$ — неограниченного вида и множество $\alpha$ таких, что $f(z) \to \alpha$ на некоторой кривой, оканчивающейся в определенной точке окружности $|z| = 1$, имеет емкость нуль. Точная формулировка результата потребовала бы много места. А. А. Гольдберг

**366. Теорема единственности в теории мероморфных функций. Сюн Цзин-лай** (Un théorème d'unicité relatif à la théorie des fonctions méromorphes Hiong King-Lai), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 24, 1691—1693 (франц.)

Пусть $w = f(z)$ — мероморфная в конечной $z$-плоскости функция. Обозначим $\varepsilon(a, f)$ множество ее $a$-точек, где каждая $a$-точка засчитывается с учетом кратности, и $\bar{\varepsilon}(a, f)$ — множество $a$-точек функции $f(z)$, где каждая $a$-точка засчитывается только один раз. Известно (R. Nevanlinna, Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929), что $f(z)$ однозначно определяется пятью множествами $\bar{\varepsilon}(a_\mu, f)$, $\mu = 1, \ldots, 5$, $a_\mu$ все различны, или же, за исключением функций очень специального вида, тремя множествами $\varepsilon(a_\mu, f)$, $\mu = 1,2,3$. В статье приведены некоторые новые неравенства между неванлинновскими характеристическими функциями для $f(z)$ и ее производных, что позволило получить следующие теоремы единственности. Пусть $f(z)$ не имеет нулей и $\delta(\infty, f) = 1$.

Если $a_1$ и $a_2$ — два числа, отличные от нуля и не равные между собой, и $b_1, \ldots, b_4$ — четыре числа с теми же свойствами, то $f(z)$ однозначно определяется множествами: 1) $\bar{\varepsilon}(\infty, f)$, $\bar{\varepsilon}(a_1, f)$, $\varepsilon(b_\nu, f^{(k)})$, $\nu = 1, \ldots, 4$; 2) $\bar{\varepsilon}(\infty, f)$, $\bar{\varepsilon}(a_\mu, f)$, $\bar{\varepsilon}(b_\nu, f^{(k)})$ ($\mu = 1,2$; $\nu = 1,2,3$). С точностью до постоянного слагаемого $f(z)$ определяется множествами $\bar{\varepsilon}(\infty, f)$, $\bar{\varepsilon}(b_\nu, f^{(k)})$, $\nu = 1,2,3$. А. А. Гольдберг

**367. Теорема Пикара с топологической точки зрения.** Ла-Валле-Пуссен (Le théorème de Picard du point de vue topologique. La Vallée Poussin C. de), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1955, sér. 1, 69, № 2, 37—49 (франц.)

Предпринимается попытка дать элементарное доказательство теоремы Пикара о том, что мероморфная в конечной $z$-плоскости функция $f(z)$ может иметь не более двух исключительных значений. Доказательство, приведенное автором, использует только принцип сохранения области, теорему Сохоцкого — Казорати, тот факт, что нули аналитической функции изолированы, и некоторые очень простые свойства непрерывных образов кривых. Однако это доказательство содержит так много неточностей и неубедительных мест, что и в целом представляется референту некорректным. Как одно из неубедительных мест доказательства отметим рассуждение последнего абзаца стр. 40. Развитые им методы автор применяет для доказательства следующей теоремы (§ 6): мероморфная в конечной $z$-плоскости функция может иметь не более двух асимптотических значений (автор называет асимптотические значения обобщенными пикаровскими исключительными значениями). Примеры, опровергающие это утверждение, хорошо известны (например, $f(z)=(ae^z+be^{-z}+ce^{iz}):(e^z+e^{-z}+e^{iz})$).

А. А. Гольдберг

**368. Некоторые формулы композиции сингулярных интегралов и их приложения к обращению интеграла типа Коши. Хведелидзе Б. В.,** Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 2, 81—88

**Некоторые формулы композиции сингулярных интегралов и их приложения к обращению интеграла типа Коши. Хведелидзе** (სინგულარულ ინტეგრალთა კომპოზიციის ზოგიერთი ფორმულა და მათი გამოყენება კოშის ტიპის ინტეგრალის შესაბრუნებლად. ხვედელიძე ბ.), საქ. სსრ მეცნ. აკად. მოამბე, Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 2, 81—88

Пусть $C$ — конечная совокупность плоских разомкнутых линий Ляпунова: $C=\Sigma_{k=1}^{m}C_k$. Автор называет функцию $f(t)$ принадлежащей классу $L^p(C,\omega(t))$, если $f(t)$ измерима, $\omega(t)$ — неотрицательная измеримая функция и интеграл Лебега $\int\omega(t)|f(t)|^p ds$ существует.

Пусть $a_k$, $b_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ — концы кривых $C_k$. Вводятся обозначения:

$$R(z)=\sqrt{\Pi_{k=1}^{m}(z-a_k)(z-b_k)},$$

$$R_a(z)=\sqrt{\Pi_{k=1}^{m}(z-a_k)},$$

$$R_b(z)=\sqrt{\Pi_{k=1}^{m}(z-b_k)},\quad S_\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$U_\varphi=\frac{1}{\pi i R(t)}\int\frac{R(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},\quad V_\varphi=\frac{R(t)}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{R(\tau)(\tau-t)}$$

и некоторые другие, аналогичные.

Опираясь на формулу композиции двойных сингулярных интегралов, автор выводит формулы композиции операторов $SU$, $US$, $SV$, $VS$ и т. п. в классах $\varphi\in L^p(C,R^{-1})$, $L^p(C,R_a^{-1}\cdot R_b)$ и др.; опираясь на указанные формулы композиции, выводит формулы обращения интегралов типа Коши (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М. — Л., 1946, § 88,89) в тех классах функций, для которых выведены указанные выше формулы композиции. Ф. Д. Гахов

**369. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах. Фельд Я. Н.,** Докл. АН СССР, 1955, 102, № 2, 257—260

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}Z_{m-n}A_n=B_m,\qquad m=0,1 \tag{1}$$

где $Z_{m-n}$, $B_m$ — заданные постоянные, $A_n$ — искомые величины.

Предполагается, что $r_1>r_2$, $r_0>r_2$, где

$$r_1^{-1}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|Z_m|},\quad r_2=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|Z_{-m}|},$$

$$r_0^{-1}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|B_m|}. \tag{2}$$

Вводятся функции

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nw^n,\quad G(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_nw^n,$$

$$f(w)=\sum_{n=-0}^{\infty}A_nw^n \tag{3}$$

аналитические соответственно в круге $|w|<r_0$, кольце $r_2<|w|<r_1$ и в круге $|w|<r=\min(r_0,r_1)$.

Решение системы (1) сводится к решению краевой задачи Римана

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \tag{4}$$

на некотором контуре, лежащем в кольце $r_2<|w|<r$, причем $\Phi^-(w)=f(w)$.

При помощи решения задачи (4) (см., например, Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. М.—Л., 1946) дается решение системы (1) в замкнутой форме.

В заключение в качестве примера решается физическая задача о распространении волны в волноводе прямоугольного сечения.

Примечание референта. 1) В равенствах (2) требование существования предела несущественно; без ущерба для последующих рассуждений можно заменить предел верхним пределом. 2) Автор получает не все решения рассматриваемого им класса. Выпадают те решения, для которых $\Phi^-(w)$ имеет полюсы при условии, что $G(w)$. $\Phi^-(w)$ остается ограниченным. Для того чтобы получить все решения, нужно было бы или решать «площадную» задачу для кольца $r_2<|w|<r_1$ (РЖМат, 1956, 6624), или решать краевую задачу для окружности наименьшего радиуса, лежащей в кольце, с последующим аналитическим продолжением. 3) Вопросы, близкие к исследованным в настоящей статье, рассматривал И. М. Рапопорт (Докл. АН СССР, 1948, 59, № 2, 1403—1406)

Ф. Д. Гахов

**370. Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами. Фельд Я. Н.,** Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 215—218

Рассматривается система уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nZ^{11}_{m-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}B_n\beta^nZ^{12}_{m-n}=C^1_m,\ m\geqslant 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\alpha^nZ^{21}_{m-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}B_nZ^{22}_{m-n}=C^{(2)}_m,\ m<0, \tag{1}$$

где $A_n$ и $B_n$ — искомые величины, а остальные постоянные заданы. Последовательности $Z_n^{mk}$, $C_n^1$, $C_n^{(2)}$ предполагаются такими, что ряды

$$G^{mk}(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_n^{mk}w^n,\ m,k=1,2;$$

$$g^+(w)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^1w^n;\ g^-(w)=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n^{(2)}w^n$$

сходятся в некотором кольце $\rho_1 < |w| < \rho_2$, а функции $G^{11}(w)$, $G^{22}(w)$ не имеют в нем нулей.

В работе показано, что нахождение постоянных $A_n$ и $B_n$ можно свести к неоднородной задаче Гильберта (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946, § 128) для двух кусочно-голоморфных функций и к квадратурам.

В качестве примера рассматривается волновод прямоугольного сечения, при некоторых ограничениях.

Б. В. Хведелидзе

**371. Представление автоморфных функций через соединение эллиптических и фуксоидных функций. Мюрберг** (Darstellung automorpher Funktionen durch Zusammensetzung von elliptischen und fuchsoiden Funktionen. Myrberg P. J.), Suomalais tiedeakat toimituks., 1955, Sar. AI, № 200, 9 S. (нем.)

Пусть $z$ — переменная, униформизирующая $x$, $y$, связанные произвольным алгебраическим соотношением, и $\Gamma$ — принадлежащая ей автоморфная группа. Если $S(z)$ — одна из подстановок $\Gamma$, то функции $u = \int dx / \sqrt{(x-e_1)\ldots(x-e_4)}$, $v = \int dy / \sqrt{(y-e_1')\ldots(y-e_4')}$ обладают тем свойством, что

$$u(S) = \pm u(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2;$$
$$v(S) = \pm v(z) + m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2'.$$

Те $S$, которые оставляют $u$ и $v$ инвариантными, образуют подгруппу $\Gamma_u$ и соответственно $\Gamma_v$ фуксоидного типа. Таким образом, $x(u)$ и $y(v)$ однозначно выражаются через фуксоидные функции $u(z)$ и $v(z)$.

Если $f(z) = r_0(x) + r_1(x)\,y + \ldots + r_q(x)\,y^q$ — автоморфная функция группы $\Gamma$, то, используя представление $x(u)$ и $y(v)$ как отношения эллиптических тэта-функций $\vartheta_1^*(u)/\vartheta_1(u)$ и $\vartheta_2^*(v)/\vartheta_2(v)$, представим $f(z)$ как отношение целых функций $g^*(z)/g(z)$. Путем умножения числителя и знаменателя этого выражения на $\Pi_1^m \vartheta_1^q(u(z) - u(z_\nu))/\vartheta_2^q(v(z))$, где $z_\nu$ — нули функции $\vartheta_2(v)$, лежащие в одной фундаментальной области, представим $f(z)$ в виде отношения двух автоморфных тэта-функций 1-го порядка. Далее используя метод, изложенный автором (Acta math., 1932, 59, 1935, 65; Ann. mat. pura ed Appl., 1938, 4, 17), можно показать, что $u(z)$ и $v(z)$ могут быть выражены явно через ряды вида $\Sigma A_\nu/(z-a_\nu)$.

Таким образом, существуют фуксовы группы весьма общего вида, для которых автоморфные функции могут быть образованы из эллиптических тэта-функций и некоторых фуксоидных функций. Последние могут быть явно выражены в виде некоторых рядов. С помощью этих функций могут быть униформизированы все алгебраические римановы поверхности. Библ. 4 назв.

Г. П. Боев

**372. Исправление работы «К реализации римановых поверхностей». Тиц** (Berichtigung der Arbeit «Zur Realisierung Riemannscher Flächen» in Math. Ann., 1955, 128, 453—458. Tietz H.), Math. Ann., 1955, 129, № 5, 450 (нем.)

Приводится исправление леммы 2 работы автора (РЖМат, 1956, 2945), не влияющее существенно на основные результаты работы. Л. И. Волковыский

**373. О свойстве наложения абстрактных римановых поверхностей. Курамоти** (On covering property of abstract Riemann surfaces. Kuramochi Zenjiro), Osaka Math. J., 1954, 6, № 1, 93—103 (англ.)

Изучаются свойства Иверсена и Гросса (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, 1941) на поверхностях классов $O_{AB}$ и $O_{AD}$ (РЖМат, 1955, 3728). В частности, строится пример поверхности класса $O_{AB}$ конечного рода, не обладающей свойством Гросса (заметим, что ранее (РЖМат, 1955, 2651) автором был построен пример поверхности класса $O_{HP}$, не обладающей свойством Гросса. *Реф.*) Высказывается предположение, что все поверхности класса $O_{AB}$ обладают свойством Иверсена.

Если $P_I$ и $P_G$ — классы поверхностей, обладающих свойством Иверсена, соответственно свойством Гросса, то имеют место следующие соотношения включения:

$$P_I \supset O_{HB} \supset O_{HP} \supset O_G;\ P_I \not\supset O_{AB};$$
$$P_I \not\supset O_{HD};\ P_I \not\supset O_{HP};$$

если род $p = \infty$ и

$$P_I \overset{?}{\supset} O_{AB};\ P_I \supset O_G;\ P_I \not\supset O_{AD};\ P_G \supset O_G;\ P_G \not\supset O_{HP},$$

если род $p < \infty$. Л. И. Волковыский

**374. Проблема Дирихле на римановых поверхностях. I—V (Соответствие границ). Курамоти** (Dirichlet problem on Riemann surfaces. I — V. (Correspondence of boundaries). Kuramochi Zenjiro), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 8, 731—735; № 9, 825—830; 831—836; № 10, 946—950; 1955, **31**, № 1, 20—24 (англ.)

В основном все заметки воспроизводят результаты автора, изложенные им в несколько ранее опубликованной работе (РЖМат, 1955, 2651). В последней заметке содержится, в частности, рассмотрение вопроса о регулярности достижимых граничных точек для задачи Дирихле в случае, когда $R$ является конечнолистным наложением поверхности $\underline{R}$ с положительной границей, лишь намеченное в указанной выше статье автора. Используется новая топологизация $\underline{R}^*$ — поверхности $\underline{R}$ с идеальными граничными элементами — и некоторые новые результаты автора по емкости граничных множеств (реф. 375). Л. И. Волковыский

**375. Гармонические меры и емкость множеств идеальной границы. I, II. Курамоти** (Harmonic measures and capacity of sets of the ideal boundary. I, II. Kuramochi Zenjiro), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 10, 951—956; 1955, **31**, № 1, 25—30 (англ.)

Пусть $R$ — абстрактная риманова поверхность с положительной границей, $\{R_n\}$ — ее исчерпание с компактными относительными границами $\{\partial R_n\}$ и $D$ — некомпактная часть $R$ с относительной границей, состоящей не более чем из счетного множества аналитических кривых, нигде не сгущающихся на $R$. Вводятся и изучаются внешняя и внутренняя гармонические меры и емкость части $B_D$ идеальной границы, определяемой последовательностью $\{D \cap (R - R_n)\}$. Так, внешняя гармоническая мера $B_D$ определяется как $\omega(z) = \lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}\omega_{n,n+i}(z)$, где $\omega_{n,n+i}(z)$ — ограниченная гармоническая функция в $R_{n+i} - [(R_{n+i} - R_n) \cap D]$, равная нулю на $\partial R_{n+i} - D$ и равная 1 на $(\partial R_n \cap D) + [\partial D \cap (R_{n+i} - R_n)]$. Емкость $B_D$ определяется как $\int_{\partial R_0} \frac{\partial u(z)}{\partial n}\,dS$, где $R_0$ — компактная часть $R$ и $U(z)$ — гармоническая функция, равная $\lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}U_{n,n+i}(z)$, где $U_{n,n+1}(z)$ — гармоническая функция в $R_{n+i} - R_0 - [(R_{n+i} - R_n) \cap D]$ такая, что $U_{n,n+i}(z) = 0$ на $\partial R_0$, $U_{n,n+i}(z) = 1$ на $(\partial R_n \cap D) + [\partial D \cap (R_{n+i} - R_n)]$ и $\partial U_{n,n+i}/\partial n = 0$ на $\partial R_{n+i} - D$. В своем исследовании автор использует введенные им два вида экстремиза-

ции гармонических функций. Одна из них состоит в следующем. Пусть $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ — последовательность некомпактных областей на $R$, содержащих $(R - R_m) \cap D$ ($m$ зависит от $D_i$), и $U(z)$ — положительная гармоническая функция на $R$. Тогда нижняя огибающая $V_D$ непрерывных супергармонических функций $\{V(z)\}$ таких, что $V(z) \geqslant U(z)$, называется экстремизацией $U(z)$ в связи с $\{D_i\}$. Другого рода экстремизация связана с рассмотрением некоторых интегралов Дирихле.

Во второй работе содержатся также приложения к исследованию поведения функции Грина вблизи идеальной границы и к классификации некомпактных областей $D$ на $R$.

Другим методом емкость идеальной границы и ее частей вводилась и изучалась Сарио (РЖМат, 1955, 3172).

Л. И. Волковыский

**376. О гармонической размерности I, II. Одзава** (On harmonic dimension. I, II. Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 2, 33—37 (англ.)

Рассматриваются римановы поверхности $R$, идеальный край которых состоит точно из одного нулевого компонента в смысле Р. Неванлинны (РЖМат, 1956, 7313). По Хейнсу (Heins M., Ann. Math., 1952, 55, 296—317) $H$-концом называется такая подобласть $\Omega \subset R$, дополнение которой компактно. Через $P_\Omega$ обозначим семейство нетривиальных неотрицательных однозначных гармонических в $\Omega$ функций, обращающихся в нуль на относительной границе $\Gamma(\Omega)$. Хейнс называет гармонической размерностью $(H(\Omega))$ $H$-конца минимальное число линейно независимых функций с положительными коэффициентами, порождающих $P_\Omega$, если это число существует; в противном случае $H(\Omega) = \infty$.

В реферируемой статье $C$-концом называется подобласть $\Omega \subset R$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\Gamma(\Omega)$ состоит из конечного числа кусочно-гладких некомпактных жордановых дуг; 2) множества $\Omega \cap (R - R_n)$ и $\Omega_n = \Omega \cap R_n$ связны (здесь $\{R_n\}$ — аппроксимирующая последовательность для $R$). Для обобщенных $C$-концов дуг границы бесконечно много. Пусть $\{Z_m\}$ — некомпактная последовательность точек и $g(t, z)$ — функция Грина области $\Omega$. Либо $\lim_{m\to\infty} g(t, z_m) \equiv 0$, либо $\lim_{m\to\infty} g(t, z_m) > 0$. В первом случае $\Omega$ объявляется имеющей нулевую гармоническую размерность. Во втором случае гармонической размерностью $CH(\Omega)$ называется максимальное число линейно независимых предельных функций $\lim_{m\to\infty} g(t, z_m)$.

Доказывается, что гармоническая размерность $C$-конца локально инвариантна, т. е. $CH(\Omega)$ не зависит от конфигурации $C$-конца в компактной части $R$. Приводится пример $C$-конца с $CH(\Omega) \geqslant 1$. Находятся характеристики $C$-конца, имеющего нулевую гармоническую размерность. Будем обозначать $\Omega \supseteq \Omega_1$, если $\Omega \supset \Omega_1$ и граница каждого компонента $\Omega - \Omega_1$ содержит хотя бы одну дугу $\Gamma(\Omega)$. Ставятся две задачи: 1) Пусть $\Omega$ — $H$-конец, $\Omega_1$ — $C$-конец и $\Omega \supseteq \Omega_1$. Справедливо ли неравенство $H(\Omega) \geqslant CH(\Omega_1) + 1$? 2) Пусть $\Omega$ и $\Omega_1$ — $C$-концы и $\Omega \supseteq \Omega_1$. Справедливо ли неравенство $CH(\Omega) \geqslant CH(\Omega_1)$?

Во 2-й части $\Omega$ обозначает $C$-конец или обобщенный $C$-конец. Пусть $\hat{\Omega}$ — дубль $\Omega$, симметричный относительно $\Gamma - \gamma$, где $\gamma$ — компактная часть $\Gamma(\Omega)$. Тогда $\hat{\Omega}$ будет $H$-концом. Если $H(\hat{\Omega})$ конечна, то $H(\hat{\Omega}) = 2CH(\Omega) + n$, где $n \geqslant 0$ — целое число, характеризующее симметрию $\hat{\Omega}$. Обозначим через $S_\Omega$ семейство ограниченных гармонических на $\Omega$ функций, удовлетворяющих условию $\partial u/\partial \nu = 0$ на $\Gamma - \gamma$. Доказывается теорема: Если каждая функция $u \in S_\Omega$ имеет предел на идеальном крае, то $H(\hat{\Omega}) = 1$ или 2 и соответственно $CH(\Omega) = 0$ или 1. В заключение устанавливается соотношение между введенной автором гармонической размерностью и понятием «гармонически простой или кратной области», введенным Кьельбергом (Kjellberg B., Arkiv för Math., 1950, 1, № 25, 347—351).

Ко 2-й части статьи автор дает поправку (Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 70). Е. Д. Соломенцев

**377. О максимальных свойствах класса положительных гармонических функций. Одзава** (On a maximality of a class of positive harmonic functions. Ozawa Mitsuru), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 65—70 (англ.)

Гармоническая размерность $C$-конца $\Omega \subset R$, введенная автором ранее (реф. 376), определяется по-новому: гармонической размерностью (обобщенного) $C$-конца называется максимальное (кардинальное) число линейно независимых положительных гармонических на $\Omega$ функций $V(z)$, тождественно равных нулю на $\Gamma(\Omega)$ и удовлетворяющих условию $0 < \int_\Gamma \partial V/\partial \nu ds < \infty$. Доказывается эквивалентность этого определения ранее данному.

Обозначим через $Q_\Omega$ класс упомянутых функций $V(z)$. Этот класс совпадает с множеством $G_\Omega$ всех линейных комбинаций с положительными коэффициентами предельных функций $\lim_{m\to\infty} g(t, z_m)$, где $\{z_m\}$ — некомпактная последовательность и $g(t, z)$ — функция Грина $\Omega$. Устанавливаются некоторые максимальные свойства класса $Q_\Omega = G_\Omega$ и так называемых $S$-операций. Пусть $V(z) \in Q_\Omega$. Обозначим через $V^n(z)$ гармоническую и ограниченную на $R_n - R_0$ функцию, удовлетворяющую условиям: $V^n(z) = 0$ на $\gamma + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}_n$, $V^n(z) = V(z)$ на $\gamma_n$. Здесь $\gamma$ — компактная часть $\Gamma(\Omega)$, $\tilde{\gamma}$ — кривая, симметричная $\gamma$ относительно $\Gamma - \gamma$, $\tilde{\gamma}_n = \Gamma(R_n) \cap (R - \Omega)$, $\gamma_n = \Gamma(R_n) \cap \Omega$. Предел $\lim_{n\to\infty} V^n(z) = S_V(z)$ существует и принадлежит семейству $P_{\hat{\Omega}}$ положительных гармонических функций на дубле $\hat{\Omega}$ конца $\Omega$, равных нулю на $\gamma + \tilde{\gamma}$. Такая $S$-операция является положительным линейным отображением $Q_\Omega$ в $P_{\hat{\Omega}}$. Доказывается, например, следующая теорема: $G_\Omega$ является максимальным множеством, на котором описанная $S$-операция имеет смысл (т. е., $S_V \not\equiv \infty$). Е. Д. Соломенцев

**378. Пример римановой поверхности с нулевой границей. Курамоти** (An example of a null-boundary Riemann surface. Kuramochi Zenjiro), Osaka Math. J., 1954, 6, № 1, 83—91 (англ.)

В работе Хейнса (Heins M., Ann. Math., 1952, 55, 296—317) было введено понятие гармонической размерности граничного элемента римановой поверхности с нулевой границей и одним лишь граничным элементом (размерность класса неотрицательных гармонических функций на определяющем граничный элемент конце — некомпактной части дополнения к компактному множеству на поверхности, — обращающихся в нуль на относительной границе конца) и было высказано предположение, что существуют поверхности указанного класса с бесконечной гармонической размерностью их граничного элемента. В реферируемой работе строится пример такой поверхности. Вопрос об указанной гармонической размерности тесно связан с рассмотрением так называемых минимальных гармонических функций: гармоническая функция $u > 0$ называется минимальной, если всякая гармоническая функция $v > 0$, $v \leqslant u$ имеет вид

$v = cu$ (Хейнс, цит. выше и Martyn R., Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49, 137—172). Л. И. Волковыский

**379. Ряды и бесконечные произведения алгебраических функций, определяющие многозначные аналитические функции в произвольной области их существования.** Радойчич (Sur les séries de fonctions algébriques et les produits infinis analogues définissant des fonctions analytiques multiformes dans leurs domaines d'existence quelconques. Radojčić M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1954, 7, 95—118 (франц.)

Теорема Миттаг—Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами и главными частями в них, и теорема Вейерштрасса о существовании целой функции с заданными нулями обобщаются на случай многозначных функций.

Рассматривается произвольная открытая риманова поверхность $R$. Согласно теореме Бенке и Штейна (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1948, 120), существует последовательность $\{S_n\}$ замкнутых римановых поверхностей такая, что всякая замкнутая часть поверхности $R$ принадлежит всем $S_n$, начиная с некоторой. Согласно теореме Римана — Роха, существуют алгебраические функции $\varphi_n(z)$, римановы поверхности которых совпадают с $S_n$, зависящие от $k > m - p$ произвольных постоянных, где $m$ — число полюсов функции $\varphi_n(z)$, $p$ — род поверхности $S_n$.

Используя эти результаты, автор доказывает ряд теорем, из которых приведем две. Пусть $\{a_\nu\}$ — последовательность точек на римановой поверхности $R$, имеющая предельные точки в каждой граничной точке области $R$, но ни в одной ее внутренней точке.

Теорема 1. Существует однозначная и мероморфная на $R$ функция $F(z)$, имеющая $R$ областью существования и в точках $\{a_\nu\}$ — и только в них — полюса с заданными в них главными частями. Функцию $F(z)$ можно представить в виде: $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(z) - \psi_n(z)]$. Здесь $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — алгебраические функции с римановой поверхностью $S_n$; $\varphi_n(z)$ имеют полюс и заданную в нем главную часть только в одной из точек $\{a_\nu\}$, а $\psi_n(z)$ не имеет полюса ни в одной точке $\{a_\nu\}$; $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ имеют полюса, отличные от $\{a_\nu\}$, но они попарно уничтожаются в членах ряда.

Теорема 2. Существует однозначная и регулярная на $R$ функция $F(z)$, имеющая $R$ областью существования и в точках $\{a_\nu\}$ — и только в них — нули заданных порядков. Функцию $F(z)$ можно представить в виде: $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\, e^{-\psi_n(z)}$. Здесь $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — однозначные на $R$ функции, $\varphi_n(z)$ имеет нуль заданного порядка только в одной из точек $\{a_\nu\}$; $\psi_n(z)$ — алгебраическая функция, а $\varphi_n(z)$ имеет существенно особые точки; полюса $\psi_n(z)$ и существенно особые точки $\varphi_n(z)$ попарно уничтожаются в членах бесконечного произведения.

Эти теоремы аналогичны ранее полученным Флорак (Florack H., Schriftenreihe des Math. Inst., Münster, 1948), но у нее участвующие в разложении функции определены на римановой поверхности, содержащей $R$ как часть. М. Г. Хапланов

**380. К теории некоторых классов целых функций многих переменных.** Джрбашян М. М., Изв. АН АрмССР, физ.-матем., естеств. и техн. н., 1955, 8, № 4, 1—23 (рез. арм.)

Рассматриваются целые функции $f(z_1, z_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$ комплексных переменных $z_1$, $z_2$. Подобная функция имеет конечный порядок, если для нее можно указать такие числа $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 > 0$ и такие функции $R_1(r_2) < \infty$, $R_2(r_1) < \infty$, что $\ln M(r_1, r_2) < k_1 r_1^{\mu_1}$ при $r_1 \geqslant R_1(r_2)$, $\ln M(r_1, r_2) < k_2 r_2^{\mu_2}$ при $r_2 \geqslant R_2(r_1)$. Здесь $M(r_1, r_2) = \max |f|$ при $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$.

Из множества целых функций конечного порядка выделяется класс $A$. Целая функция $f \in A$, если для указанных выше чисел $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2$ можно указать такое число $R < \infty$, что $\ln M(r_1, r_2) \leqslant k_1 r_1^{\mu_1} + k_2 r_2^{\mu_2}$ при $r_1, r_2 \geqslant R$.

Для целой функции $f$ конечного порядка число $\rho_s = \inf \mu_s \geqslant 0$ называется ее порядком по переменному $z_s$ $(s = 1, 2)$. Целая функция имеет порядок $(\rho_1, \rho_2)$, если $\rho_1, \rho_2$ — ее порядки по переменным $z_1$, $z_2$ и $f \in A$.

Целая функция порядка $(\rho_1, \rho_2)$ имеет конечный тип, если для нее можно указать такие числа $k_1, k_2 > 0$ и такие функции $P_1(r_2) < \infty$, $P_2(r_1) < \infty$, что $\ln M(r_1, r_2) < k_1 r_1^{\rho_1}$ при $r_1 \geqslant P_1(r_2)$, $\ln M(r_1, r_2) < k_2 r_2^{\rho_2}$ при $r_2 \geqslant P_2(r_1)$. Для функции конечного типа число $\sigma_s = \inf k_s$ называется ее типом по переменному $z_s$ $(s = 1, 2)$.

Автор доказывает:

1) Для того чтобы целая функция $f$ имела порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{r_2 \to \infty} \overline{\lim}_{r_1 \to \infty} \frac{\ln \ln M(r_1, r_2)}{\ln r_1} = \rho_1;$$

$$\overline{\lim}_{r_1 \to \infty} \overline{\lim}_{r_2 \to \infty} \frac{\ln \ln M(r_1, r_2)}{\ln r_2} = \rho_2;$$

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\ln \ln M(r_1, r_2)}{\ln (r_1^{\rho_2} + r_2^{\rho_2})} = 1.$$

2) Для того чтобы целая функция $f$ конечного порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имела тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{r_2 \to \infty} \overline{\lim}_{r_1 \to \infty} \frac{\ln M(r_1, r_2)}{r_1^{\rho_1}} = \sigma_1;$$

$$\overline{\lim}_{r_1 \to \infty} \overline{\lim}_{r_2 \to \infty} \frac{\ln M(r_1, r_2)}{r_2^{\rho_2}} = \sigma_2;$$

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{\ln M(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} = 1.$$

3) Для того чтобы целая функция $f$ имела порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n+m \to \infty} \frac{-n \ln n}{\ln |a_{nm}|} = \rho_1, \quad \overline{\lim}_{n+m \to \infty} \frac{-m \ln m}{\ln |a_{nm}|} = \rho_2;$$

$$\overline{\lim}_{n+m \to \infty} \frac{n\rho_2 \ln n + m\rho_1 \ln m}{-\rho_1 \rho_2 \ln |a_{nm}|} = 1.$$

Так же находятся условия, которым удовлетворяют $a_{nm}$ для функции порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Дается интегральное представление подобной функции.

В тексте работы имеется большое число опечаток. Б. А. Фукс

**381. О наилучшем приближении аналитических функций нескольких переменных и о рядах многочленов.** Сапогов Н. А., Матем. сб. 1956, 38, № 3, 331—336

Доказываются две теоремы.

Пусть

$$E_n[f] = \inf_{P_n} \max_{\substack{-1 \leqslant x_i \leqslant 1 \\ 1 \leqslant x \leqslant k}} |f - P_n|$$

— наилучшее приближение функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ на $k$-мерном кубе $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1,2, \ldots, k)$ при помощи многочленов $P_n$,

$$P_n = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k \leqslant n} a_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda k}, \; n = \max \sum_{i=0}^{k} \lambda_i.$$

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(z_1, \ldots, z_k)$ была регулярной во всех внутренних точках эллиптического полицилиндра, определенного неравенствами

$$|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| \leqslant R \; (i = 1,2, \ldots, k; \; R > 1),$$

и имела особенности в точках, для которых каждая из координат принадлежит соответствующему эллипсу

$$|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| = R \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{E_n[f]} = R^{-1}.$$

Эта теорема является распространением на случай функций нескольких переменных соответствующей теоремы С. Н. Бернштейна (Экстремальные свойства полиномов. М. — Л., ОНТИ, 1937, стр. 75).

Пусть

$$P_{n_1, \ldots, n_k}(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\substack{0 \leqslant \lambda_h \leqslant n_h \\ 1 \leqslant h \leqslant k}} a_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k}.$$

Теорема 2. Если при любых $n_1, \ldots, n_k$ и всех вещественных $x_i$ с условием $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ многочлены $P_{n_1, \ldots, n_k}$ ограничены по модулю в совокупности, то $k$-кратный ряд

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k} P_{n_1, \ldots, n_k}(z_1, \ldots, z_k) \, a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k},$$

распространенный на все целые $n_1 \geqslant 0, \ldots, n_k \geqslant 0$, абсолютно и равномерно сходится в эллиптическом полицилиндре, определенном неравенствами

$$|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| \leqslant R_i, \; R_i < \frac{1}{|a_i|} \quad (i = 1,2, \ldots, k),$$

и может расходиться для любой из точек $(z_1, \ldots, z_k)$ с условиями

$$|z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}| = \frac{1}{|a_i|} \quad (i = 1,2, \ldots, k).$$

С. А. Еремин

**382. Ограниченные аналитические преобразования.** Такахаси (有界な解析的變換について.高橋進一), 數學, Сугаку, 1954, 6, № 4, 217

Автор показывает, что теорема Ландау — Дьёдонне об ограниченных функциях комплексного переменного распространяется на ограниченные аналитические преобразования, а именно доказывает следующую теорему:

Пусть $n$ аналитических функций: $w_i(z) = z_i + Q(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, регулярны в сфере пространства $\|z\| < 1$, $\|z\| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$ и

$$|\omega_i(z)| < M_i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $Q(z)$ содержит только члены, имеющие степень $z$ выше первой.

Тогда при аналитическом преобразовании $T: \omega_i = \omega_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и образ сферы $\|z\| < 1$ в пространстве $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \equiv (w)$ всегда содержит некоторую однолистную сферу

$$\|w\| < R, \; \|w\| = (|w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2)^{1/2};$$

при этом $R = R(n, M_1, \ldots, M_n)$ определяется равенствами

$$R = \frac{1}{2n(n+1)(4nM+1)}, M = \left(\frac{M_1^2 + \ldots + M_n^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Лим Ен Шу

**383. Ограничения для аналитических функций в областях с исключительной граничной поверхностью.** Бергман (Bounds for analytic functions in domains with a distinguished boundary surface. Bergman Stefan), Math. Z., 1955, 63, № 2, 173—194 (англ.)

В пространстве комплексных переменных $z_1$, $z_2$ рассматривается аналитический полиэдр $\mathfrak{M}$, ограниченный системой граней, являющихся кусками трехмерных аналитических гиперповерхностей $i_k^3$ $(k = 1, \ldots, n)$. Совокупность двумерных поверхностей пересечения этих граней составляет исключительную граничную поверхность $D^2$ полиэдра $\mathfrak{M}$.

Используя интегральное представление Бергмана — Вейля, автор строит полную систему функций, ортонормированных по отношению к исключительной граничной поверхности $D^2$. Подобная система функций является обобщением системы Сеге функций, ортонормированных по границе области для случая функций одного комплексного переменного. Устанавливается ряд свойств подобных систем, их ядер.

В качестве приложения автор получает ограничения для функций, голоморфных в замкнутом полиэдре $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющих ряду дополнительных условий на определенных частях границы (например, выпускающих значения 0 и 1 на одной из граней $i_k^3$). Б. А. Фукс

**384. Аналитическое продолжение и комплексные особенности гармонических функций.** Лелон (Prolongement analytique et singularités complexes des fonctions harmoniques. Lelong P.), Bull. Soc. math. Belgique, 1954 (1955), 7, № 1, 10—23 (франц.)

Обозначим через $d(f^0, x^0)$ область действительной аналитичности над евклидовым пространством $R^n$ действительного аналитического элемента $(f^0; x^0)$ и через $\Delta$ — область голоморфности над пространством $C^n$ ($n$ комплексных переменных), построенную отправляясь от некоторого аналитического элемента $(f^0; X^0)$. Выясняется связь между областями $d$ и $\Delta$ в двух случаях: 1) $f$ принадлежит классу $H(d)$ гармонических в $d$ функций 2) $f$ принадлежит классу $A(d)$ аналитических в $d$ функций.

Пусть $\Gamma(t)$ обозначает конус в пространстве $C^n$ с вершиной в точке $t \in R^n$, описываемый уравнением $\sum_k (X_k - t_k)^2 = 0$. Клеткой гармоничности $H(d)$ однолистной области $d \subset R^n$ называется содержащий область $d$ компонент открытого множества $C^n - \sum_t \Gamma(t)$, где $t$ пробегает границу $Fd$ области $d$. Определение клетки гармоничности распространяется и на неоднолистные области. Основными можно считать следующие важные и интересные результаты: а) Гармоническая и однозначная в однолистной области $d \subset R^n$ функция $f(x)$ может быть аналитически продолжена в клетку гармоничности

$H(d) \sqsubset C^n$ б) Какова бы ни была однолистная область $d \subset R^n$, существует гармоническая в $d$ функция $f(X)$, имеющая $H(d)$ областью голоморфности. Иначе говоря, $\Omega[\bigcap_f \Delta(f)] = H(d)$, где $f \in H(d)$, а $\Omega(E)$ обозначает открытое ядро множества $E$. в) $\Omega[\bigcap_f \Delta(f)] \neq 0$, где $f$ пробегает класс $A(d)$. Иначе говоря, в каждой области $U \subset C^n$, содержащей $d + Fd$, можно найти область голоморфности $\Delta$ такую, что $\Delta \cap R^n = d$. Автор предполагает, что последняя теорема верна и в том случае, когда $U$ содержит только область $d$.

Используется в основном метод интегрального представления аналитических функций при помощи ядра потенциалов. При неоднолистной области $d$ автору удается рассмотреть случай размерности $n = 2p \geqslant 4$. Многие из введенных понятий можно применить и к полигармоническим функциям. В статье имеются опечатки. Е. Д Соломенцев

**385. Об условиях регулярности функций в какой-нибудь алгебре. Р и ц ц а** (Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra. R i z z a G. B.), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 1, 38—43 (итал.)

Пусть $A$ — какая-нибудь алгебра над полем действительных чисел с базой $[u_h]$ $(h = 1, \ldots, n)$. Рассматривается любое линейное преобразование

$$u_{h'} = a^h_{h'} u_h \quad (h, h' = 1, \ldots, n)$$

(знаки сумм по повторяющимся индексам здесь и ниже опускаются) с невырожденной матрицей $T = \| a^h_{h'} \|$. Пусть $y^k$ — действительные функции класса $C^1$ действительных переменных $x^h$ $(k = 1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, n)$. Пусть $R_d$ $(R_{d'})$ — класс всех гиперкомплексных функций $y = y^k u_k = y^{k'} u_{k'}$ гиперкомплексного переменного $x = x^h u_h = x^{h'} u_{h'}$, регулярных справа в данной алгебре $A$ относительно базы $[u_h]$ $([u_{h'}])$, т. е. удовлетворяющих условию:

$$\frac{\partial y}{\partial x^h} u_h = 0 \quad \left( \frac{\partial y}{\partial x^h} \cdot u_{h'} = 0 \right).$$

Изучаются условия, наложенные на коэффициенты $a^h_{h'}$, при которых классы $R_d$ и $R'_d$ совпадают.

Основные результаты: если для данного закона умножения

$$u_k \cdot u_l = \gamma^r_{kl} u_r$$

и для любых элементов $x$ и $z$ данной алгебры $A$ положить

$$X = \| x^k \gamma^r_{kl} \|, \quad Z = \| z^k \gamma^r_{kl} \|,$$

а также положить:

$$P = T_{-1} \cdot T; \quad Q = T^{-1}_{-1} \cdot T^{-1},$$

где $T_{-1}$ есть матрица, транспонированная по отношению к $T$, то необходимое и достаточное условие совпадения классов $R_d$ и $R'_d$ имеет вид: $XP = PX$ в случае алгебры $A$ с единицей и выражается системой равенств

$$Z(XP - PX) = 0; \ Z(XP^{-1} - P^{-1}X) = 0$$

в случае алгебры $A$, обладающей таким элементом $\nu$, $\nu \neq 0$, что $x\nu = 0$ для всякого элемента $x$ этой алгебры. Все эти равенства должны выполняться для любых элементов $x$ и $z$ алгебры $A$. Библ. 5 назв.

В. С. Федоров

**386. Нули квазианалитических функций. Г а р д е р** (The zeros of quasi-analytic functions. G a r d e r A r t h u r O., J r), Proc. Amer Math. Soc., 1955, **6**, № 6, 929—941 (англ.)

Дается новое доказательство следующей теоремы Хиршмана (Hirschman I. I., Amer. J. Math., 1950, **72**, 396—406): Пусть $\nu(x)$ — функция, заданная для $x \geqslant 0$, неубывающая, имеющая непрерывную производную, и такая, что

$$\nu(0) = 1, \quad \frac{x\nu'(x)}{\nu(x)} = O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad (x \to \infty).$$

Пусть далее $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ бесконечно дифференцируемая функция, для которой

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant A k^n [\nu(n)]^n n! \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Если число нулей $f(x)$, содержащихся в отрезке $[-u, u]$, обозначенное через $Z(u)$, удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim}_{u \to \infty} \frac{H[Z(u)]}{u} > k,$$

в котором

$$H(v) = \frac{2}{\pi} \int_1^v \frac{\ln T(u)}{u^2} du \qquad \left[ T(u) = \max_{n \geqslant 0} \frac{u^n}{n! (\nu(n))^n} \right],$$

то $f(x) \equiv 0$. И. П. Натансон

**387. Замечание о теореме Алфорса. Н а б э д з и м а И т и р о** (Ahefors の定理についての一注意. 鍋島一郎), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 1, 25—26 (япон.)

И. И. Привалов доказал следующую теорему: Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в области $D$, ограниченная сверху, и $\alpha$ — часть границы $D$. Если

$$\overline{\lim}_{z \to z'} u(z) \leqslant M, \ z' \in \alpha; \quad \overline{\lim}_{z \to z'} u(z) < m, \ z' \in C(\overline{\alpha}),$$

то в $D$ имеем

$$u(z) \leqslant M\omega(z, \alpha; D) + m\{1 - \omega(z, \alpha; D)\},$$

где $C(\overline{\alpha})$ - дополнение $\overline{\alpha}$ относительно $\alpha$, $\omega(z, \alpha; D)$ — гармоническая мера $\alpha$ относительно $D$ (причем $z$ стремится к $z'$ изнутри $D$).

В дальнейшем $D$ обозначает конечносвязную область, лежащую в $|z| < R$ $(0 < R < \infty)$, $\beta$ и $\alpha$ — части границы $D$, лежащие соответственно на $|z| = R$ и в $|z| < R$. Основываясь на теореме Привалова, автор доказывает следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. $f(z)$ — регулярная и ограниченная в $D$. Если $\overline{\lim}_{z \to z'} |f(z)| \leqslant M$, $z' \in \alpha$, $\overline{\lim}_{z \to z'} |f(z)| \leqslant m$, $z' \in \beta$, то на $|z| \leqslant r = \vartheta R$ имеем $|f(z)| \leqslant m \left(\frac{M}{m}\right)^{p(\vartheta)}$, где $p(\vartheta) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{(\theta + \vartheta)/(1 + \theta\vartheta)}$, $mE = (1 - \theta) R$, или $p(\vartheta) = 2 \exp\left(-\frac{1}{2} m_l E(r, R)\right)$, причем $E$ и $E(r, R)$ — множества значений модулей точек границы $D$, лежащие соответственно в $|z| < R$ и в кольце $r < |z| < R$, $m_l E(r, R)$ — абсолютная мера $E(r, R)$, $mE$ — простая мера $E$.

Т е о р е м а 2. Пусть: $f(z)$ — регулярная функция в $|z| < \infty$ и $\rho$ — ее порядок; область, в которой выполняется неравенство $|f(z)| < 1$, составляется из бесконечного числа ограниченных областей $D_\nu$, не имеющих конечных предельных точек; $E_n$ — множество модулей

точек $\{\overline{D}_\nu\}$, которые находятся в $|z|\leqslant r_n (r_n \to \infty)$ и $E_n$ составляется из $l_n$ интервалов $E_i$, причем $E_i = [\rho_i, \lambda_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant l_n)$.

Тогда имеет место:

$$\rho \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln p_n}{\ln r_n}; \quad p_n = 2e^{-\frac{1}{2} m_l (r_{n_s}, r_n)}$$

Теорема 3. (Обобщение теоремы Мию.) При том же условии, как и в теореме 2, если $\rho < \frac{1}{2}$, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n'}{\ln \rho_n'} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_{l_n}}{\ln \rho_{l_n}} \leqslant \frac{1}{1-2\rho},$$

где через $\lambda_n'$, $\rho_n'$ обозначены соответственно максимальное и минимальное расстояния от $z=0$ до $D_n$.

Теорема 4. Пусть $\omega(z)$ — мероморфная функция в $|z|<\infty$ порядка $\rho\ (<\infty)$. Если обратная функция имеет одну прямую трансцендентную особую точку $\omega_0$, то

$$1 - \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln \rho_r}{\ln \lambda_r} \leqslant 2\rho,$$

где через $\lambda_r$, $\rho_r$ обозначены концы интервала, имеющего наибольшие значения абсциссы конца среди всех интервалов, находящихся в $|z|\leqslant r/2$ и вне некоторой области $D$, являющейся прообразом $|w-w_0|<\rho_0$ при малом $\rho_0$ и представляющей всю плоскость $z$ с исключением внутренностей бесконечного множества жордановых кривых, уходящих в $\infty$.

В частности, если $\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln \rho_r}{\ln \lambda_r} = 0$, то неравенство $n \leqslant 2\rho$ (утверждение теоремы Альфорса) выполняется при $n \leqslant 1$. Ли Ен Пир

**388. Об обобщенных субгармонических функциях.** Джексон (On generalized subharmonic functions. Jackson L. K.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 215—228 (англ.)

Автор изучает дальнейшие свойства субфункций, введенных им ранее в совместной работе с Бенкенбахом (РЖМат, 1955, 245). Он пользуется несколько более общим определением субфункции, чем в предыдущей статье, рассматривая функции, полунепрерывные сверху. С. Я. Хавинсон

**389. Продолжение плюрисубгармонических функций на некоторые множества емкости нуль.** Лелон (Prolongement d'une fonction plurisousharmonique sur certains ensembles de capacité nulle. Lelong Pierre), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 1, 55—57 (франц.)

Пусть $D$ — область комплексного аналитического многообразия $M_n$; последнее определено при помощи покрытия $(U_i)$ окрестностями, являющимися псевдоконформными образами некоторой области $\Omega_0$ пространства $C^n$ комплексных переменных $z_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$. Множество $E$ особенностей плюрисубгармонической однозначной функции $V(P)$ на множестве $D-E$ называется устранимым, если в $D$ существует единственная плюрисубгармоническая функция, совпадающая с $V(P)$ на $D-E$. Высказывается теорема: Каждое локально компактное множество $E$, имеющее емкость нуль (размерности $2n$) в любой окрестности $U_i$, устранимо, если в окрестности каждой точки $E$ функция $V(P)$ ограничена сверху.

Пусть теперь $D \subset C^n$ и множество $E \subset D$ особенностей плюрисубгармонической функции $V(P)$ локально компактно и имеет емкость нуль (размерности $2n$). Множество $E$ устранимо, если подмножество $E' \subset E$ тех точек, в окрестности которых $V(P)$ не ограничена сверху, удовлетворяет следующим условиям: (а) Существуют комплексное направление $\boldsymbol{a}$ и подпространство $C^{n-1}$ такие, что проекция $e$ множества $E'$ на $C^{n-1}$ параллельно $\boldsymbol{a}$ имеет емкость нуль (размерности $2n-2$) в $C^{n-1}$. (в) Сечение $E'$ плоскостью $\pi^1$ $(m, \boldsymbol{a})$, содержащей направление $\boldsymbol{a}$ и точку $m \in e$, представляет собой замкнутое множество емкости нуль (размерности 2) в $\pi^1(m, \boldsymbol{a})$. При этих условиях $E'$ пусто.

Второе утверждение реферируемой статьи содержит (для случая многообразий) один из результатов, высказанных недавно Грауэртом и Реммертом (РЖМат, 1956, 8010). Е. Д. Соломенцев

**390 К. Теория псевдоаналитических функций.** Берс (Theory of pseudo-analytic functions. Bers Lipman. New York University, Institute for Mathematics and Mechanics, 1953, I + III + 187 p.) (англ.)

Дается изложение результатов, анонсированных автором раньше (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, **37**, 42—47). Обобщая понятия дифференцирования и интегрирования по комплексному аргументу, автор строит теорию функций, обобщающую обычную теорию функций комплексной переменной, и указывает ее применения в теории уравнений с частными производными эллиптического типа.

Если непрерывные функции $F(z)$ и $G(z)$ точки $z=x+iy$ удовлетворяют в области $D$ условию $\operatorname{Im}(\bar{F}G)>0$ при $z \in D$, то любую функцию $w(z)$ точки $z$ можно представить единственным образом в виде

$$w(z) = \varphi(z) F(z) + \psi(z) G(z), \qquad (1)$$

Если существует в точке $z_0$ величина

$$\dot{w}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{[\varphi(z) - \varphi(z_0)] F(z) + [\psi(z) - \psi(z_0)] G_z}{z - z_0}, \qquad (2)$$

то, по терминологии автора, она называется производной от $w(z)$ в точке $z_0$ в отношении пары $(F, G)$.

Пусть производная в этом смысле от $w(z)$ существует в каждой точке области $D$. Тогда $w(z)$ называется псевдоаналитической функцией в $D$.

Нетрудно видеть, что псевдоаналитические функции в отношении пары $(1, i)$ являются обычными аналитическими функциями от $z$.

В работе установлено, что всякая псевдоаналитическая функция удовлетворяет уравнению

$$w_{\bar{z}} = a \cdot w + b\bar{w} \quad \left(w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)\right). \qquad (3)$$

Коэффициенты $a$ и $b$ выражаются через $F$ и $G$ и их производные первого порядка, причем предполагается, что последние удовлетворяют условию Гёльдера. Доказывается также, что по заданным значениям коэффициентов $a$ и $b$ можно восстановить соответствующую пару $(F, G)$.

Уравнение (3) представляет собой комплексную запись системы уравнений эллиптического типа

$$u_x - v_y + \alpha u + \beta v = 0, \quad u_y + v_x + \gamma u + \delta v = 0. \qquad (4)$$

Как известно, к такому виду приводится довольно широкий класс систем уравнений эллиптического типа на плоскости, а также линейное уравнение второго порядка вида

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 w}{\partial y} + pw_x + qw_y = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, теория псевдоаналитических функций представляет собой теорию комплексных функций вида $w = u + iv$, удовлетворяющих уравнению (3).

Согласно теореме Карлемана, нули всякой непрерывной в области $D$ псевдоаналитической тождественно не равной нулю функции $w(z)$ составляют дискретное (в отношении $D$) множество (Karleman, C. r. Paris, 1933, 197, 471—474). Из этой теоремы вытекает формула

$$w(z) = f(z)\, e^{s(z)}, \qquad (6)$$

где $f$ — аналитическая функция от $z$, а $s(z)$ — некоторая непрерывная функция. Доказывается в работе и обратное утверждение, что по заданной аналитической функции вида $f(z)$ всегда можно построить псевдоаналитическую функцию $w(z)$, соответствующую заданной паре $(F, G)$ и вырождающуюся через $f(z)$ по формуле (6).

Формула (6) позволяет распространить на класс псевдоаналитических функций многие свойства аналитических функций одной комплексной переменной.

Вводится также понятие криволинейного интеграла на плоскости в отношении пары $(F, G)$. При $F=1$, $G=i$ этот интеграл совпадает с обычным криволинейным интегралом от функции комплексного аргумента. Путем такого рода обобщений понятий дифференцирования и интегрирования автору удается распространить на класс псевдоаналитических функций многие свойства аналитических функций (теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши и др.).

С помощью формулы (6) можно строить различные частные системы псевдоаналитических функций, соответствующие тем или иным частным системам аналитических функций. В частности, таким путем автор получает рациональные псевдоаналитические функции, соответствующие рациональным функциям от $z$. Доказываются различные теоремы о разложении и аппроксимации псевдоаналитических функций с помощью рациональных псевдоаналитических функций. В частности, рассматриваются обобщенные ряды Тейлора и Лорана.

Работа снабжена тремя добавлениями. В первом из них приводятся некоторые сведения из теории линейных уравнений в пространствах типа Банаха, а во втором рассмотрены некоторые краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

В третьем добавлении содержатся разные примечания и ссылки, дополняющие основной текст, Однако в общем довольно полной библиографии вопроса не встречаются указания на работы Теодореску (Teodorescu N., Ann. Rommains Math., 1936, № 3) и референта (Векуа И. Н., Матем. сб., 1952, 31(73), 2, 217—314), которые имеют много точек соприкосновения с реферируемой работой. И. Н. Векуа

**391 К. Лекции о топологических основах теории аналитических функций. 2-е доп. изд. Стоилов** (Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Stoilow S. 2-e ed. augm., Paris., Gauthier-Villars, 1956, XVII + 194 p.) (франц).

Второе издание известной книги Стоилова является фотомеханическим воспроизведением ее первого издания, вышедшего в том же издательстве в 1937 г. К тексту первого издания книги добавлены 4 работы автора: 1) Об аналитических функциях, римановы поверхности которых имеют совершенно разрывную границу (Mathematica, 12, 125—138, Cluj, 1936); 2) Об особенностях многозначных аналитических функций, римановы поверхности которых имеют границу гармонической меры нуль (Mathematica, 19, 126—138, Gluj, 1943); 3) Заметка об определении особых точек многозначных аналитических функций (Bul. de la Sect. Sci. Acad. roumaine, 1944, 26, 671—672); 4) Заметка о многозначных аналитических функциях (Ann. Soc. polonaise de math., 1952, 25, 69—74). Б. А. Фукс

**392 Д. О некоторых вопросах взвешенного приближения функций. Манихин В. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1956

**393 Д. О некоторых задачах наилучшего степенного приближения аналитических функций посредством многочленов. Мамедов Ш. Р.,** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1956

**394 Д. Об интерполяции целых периодических функций. Джафарли Г. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. гос. пед. ин-т, Баку, 1955

**395 Д. О теоремах типа Абеля. Гуляа Ш. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилисск. ун-т., Тбилиси, 1956

**396 Д. О моногенности кватернионных и гиперкомплексных функций. Шнеерсон М. С.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорус. ун-т, Минск, 1956.

---

См. также: 477 К, 478 К, 562

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**397. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающая потенциальный метод интегрирования. Аржаных И. С.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 28—33

Метод интегрирования Гамильтона — Якоби канонических уравнений автор называет потенциальным методом интегрирования уравнений

$$dq_\nu / dt = \partial H / \partial p_\nu - \theta_\nu, \quad dp_\nu / dt = -\partial H / \partial q_\nu + \Omega_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

если существует функция $W(t, q_1, \ldots, q_n, c_1, \ldots, c_n)$ ($c$ — постоянные) такая, что интегралы системы (1) можно представить в виде

$$p_\nu = \pi_\nu(t, q_1, \ldots, q_n, \partial W / \partial q_1, \ldots, \partial W / \partial q_n),$$
$$\partial W / \partial c_\nu = d_\nu = \text{const}.$$

Показано, что если $Q_\nu$ и $\Omega_\nu$ имеют вид

$$Q_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \frac{dG_\rho}{dt} \frac{\partial H_\rho}{\partial p_\nu}, \quad \Omega_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \begin{vmatrix} dG_\rho / dt & \partial H_\rho / dt \\ \partial G_\rho / \partial q_\nu & \partial H_\rho / \partial q_\nu \end{vmatrix},$$

$G_\rho = G_\rho(t, q_1, \ldots, q_n)$, $H_\rho = H_\rho(t, q_1, \ldots, p_n)$ и

$$D \equiv \left| \delta_{\nu\mu} + \sum \frac{\partial H_\rho}{\partial p_\mu} \frac{\partial G_\rho}{\partial q_\nu} \right| \not\equiv 0,$$

то система (1) допускает потенциальный метод интегрирования. Рассмотрен случай, когда функции $H$, $G_\rho$, $H_\rho$ не зависят явно от времени. С. Н. Шиманов

**398. О системах канонических уравнений, имеющих некоторые классы стационарных решений. Агостинелли** (Sui sistemi canonici che ammettono particolari classi di soluzioni stazionarie. Agostinelli Cataldo), Atti Accad. sci. Torino, Cl. sci. fis., mat., e natur., 1953—1954, 88, № 1, 121—126 (итал.)

Рассматривается система канонических уравнений движения голономной механической системы

$$dq_r/dt = \partial H/\partial p_r,\ dp_r/dt = -\partial H/\partial q_r\ (r = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

и доказывается следующее предложение: Если функция Гамильтона $H$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{j=1}^{n-m}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{m+j}\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_{m+j}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{m+j}\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_{m+j}}\right) -$$

$$-\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial p_h\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_h} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и, кроме того, якобиан от $\partial H/\partial p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ по $p_1, p_2, \ldots, p_m$ отличен от нуля, то система (1) имеет решения (стационарные) $q_i = C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Аналогичные условия получаются и для существования решений $p_i = C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Интегрирование же первоначальной системы уравнений сведется к интегрированию системы порядка $2(n - m)$.

В. В. Добронравов

**399. Некоторые вопросы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. Иваненко** (Окремі питання загальної теорії звичайних диференціальних рівнянь в комплексній області. Іваненко В. В.), Наук зап. Київськ. держ. пед. ін-ту, 1954, **16**, физ.-матем. сер., № 5, 13—20 (укр.)

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение $m$-го порядка типа Фукса

$$y^{(m)} + p_1(x)\,y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1}(x)\,y' + p_m(x)\,y = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого в окрестности точки $x = a$ $(a \neq \infty)$ представимы сходящимися рядами вида

$$p_k(x) = (x-a)^{-k}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu k}\,(x-a)^{\nu} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

а в окрестности точки $x = \infty$ — сходящимися рядами вида

$$p_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu k} x^{-k-\nu+1} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

§ 1 и 2 содержат известные сведения относительно структуры решений в окрестности регулярной особой точки с указанием алгоритма вычисления коэффициентов в разложениях решений. В § 3 рассматриваются специальные случаи регулярных особых точек. Показывается, что пропуски коэффициентов (нулевые значения коэффициентов) в разложениях функций $p_k(x)$ порождают определенные пропуски коэффициентов в разложениях решений. Кроме того, устанавливается, что если коэффициенты $p_k(x)$ есть нечетные функции $x-a$ при $k$ нечетном и четные при $k$ четном и если разность двух каких-либо корней характеристического уравнения есть число нечетное, то оба решения уравнения (1), соответствующие этим корням, не содержат логарифмических членов.

В. П. Басов

**400. Индуцирование динамических систем. Георгиев** (Индуциране на динамични системи. Георгиев Г. И в.), Годишник Минно-геол. ин-т., 1953—1954 (1955), **1**, ч. 2, 129 — 138 (болг.; рез. русс., франц.)

Изучается понятие топологической эквивалентности динамических систем, формулируемое следующим образом:

Динамические системы $f(x, t)$ и $f^*(x^*, t)$, определенные соответственно в пространствах $R$ и $R^*$, топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h$ $R$ на $R^*$ такой, что:

$h f^*(x^*, t) = h f(h^{-1}x^*, \xi, t)$ $[(x^* \in R^*, -\infty < t < \infty)]$.

В качестве примеров доказывается ряд простых теорем о вполне неустойчивых системах и системах, не имеющих несобственного седла. Существенно новых результатов нет. Автор не упоминает о работах Е. А. Барбашина (Матем. сб., 1950, **27**, № 3, 455—476; **29**, № 3, 501—518), в которых изучается понятие гомоморфизма динамических систем более общее, чем понятие топологической эквивалентности.

М. И. Грабарь

**401. О линейных и нелинейных возмущениях линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Хартман, Винтнер** (On linear and nonlinear perturbations of linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients. Hartman Philip, Wintner Aurel), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **81**, № 1, 1—24 (англ.)

Приводится ряд теорем, в которых устанавливаются оценки «роста» решений линейных и нелинейных систем, даются некоторые соотношения между координатами этих решений, позволяющие судить об их асимптотическом поведении. Приведем некоторые из них.

Теорема $(i, i)$. Пусть дана система

$$dy/dt = (A + G(t))\,y, \quad (1)$$

где $A$ — постоянная, жорданова, а $G(t)$ — непрерывная для $t \geqslant 0$ матрицы порядка $d$. Пусть $\mu^1 < \mu^2 < \ldots < \mu^f$ — все различные действительные части корней характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$, $h_*$ — максимальный порядок тех ящиков матрицы $A$, которые соотвествуют числу $\mu^m$, и $0 \leqslant j_0$ — любое целое число $\leqslant h_* - 1$.

Тогда если $t^{h_*}\|G(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ или выполнено более общее условие

$$(1 + \ln V)^{-1}\int_u^{uV} t^{h_*-1}\|G(t)\|\,dt \to 0, \text{ когда } uv > u \to \infty, \quad (2)$$

то система (1) имеет столько линейно независимых решений $y$, удовлетворяющих условию

$$\ln\|y\| = \mu^m t + (j_0 + o(1))\ln t, \quad (3)$$

сколько линейно независимых решений такого же «роста» существует у системы

$$dy/dt = Ay. \quad (4)$$

Кроме того, в теореме даются оценки «роста» отдельных групп координат этих решений и устанавливаются некоторые зависимости между этими группами, аналогичные тем, какие существуют для координат системы (4). Следует отметить, что условие (2) авторы заменяют более слабым, предъявляя к некоторым элементам матрицы $G(t)$ менее жесткие, чем (2), требования.

Теорема (II). Пусть дано уравнение порядка $d$

$$x^{(d)} + f_1(t)\,x^{(d-1)} + \ldots + f_{d-1}(t)\,x' + f_d(t)\,x = 0, \quad (5)$$

где $f_i(t)$ непрерывны для $t \geqslant 0$.

Если $(1 + \ln V)^{-1}\int_u^{uV}\{|f_1| + |tf_2 + \ldots + |t^{d-1}f_d|\}\,dt \to 0$, когда $uV > u \to \infty$, то для любого $m = 0, 1, \ldots, d-1$ уравнение (5) имеет решение $x(t)$, производные которого

удовлетворяют условиям:

$$\ln|x^m(t)| = o(\ln t)$$

$$x^{(j)}(t) = o(t^{m-j}|x^{(m)}(t)|), \quad \text{если } j = m+1, \ldots, d.$$

$$x^{(j)}(t) \sim t^{m-j}x^{(m)}t \quad \text{если } j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Для нелинейных систем вида $dy/dt = Ay + F(t, y)$ при некоторых естественных ограничениях на вектор $F$ доказана теорема, аналогичная теореме $(i, i)$.

Помимо этого изучаются линейные и нелинейные системы, близкие в некотором смысле к диагональным линейным системам с переменными коэффициентами. Здесь также получены оценки «роста» решений этих систем и некоторые соотношения между их координатами.

Наконец, дано обобщение теоремы Лона (Lonn E., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1934, 43, 232—237), касающееся проблемы различения узла и фокуса.

Теорема. Дана система: $x' = -x + F^1(t, x, y)$; $y' = -y + x + F^2(t, x, y)$. Здесь $F^1$ и $F^2$ непрерывны для $t \geqslant 0$ и малых $x$ и $y$ и $F^i(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \to 0$, когда $(t, x, y) \to (\infty, 0, 0)$, $i = 1, 2$.

Если в некоторой окрестности начала координат $4t^2(xF^2 - yF^1)/(x^2+y^2) \leqslant \theta < 1$, то имеет место узел, если же $4t^2(xF^2 - yF^1)/(x^2+y^2) \geqslant c > 1$, то будет фокус.

(Теорема сформулирована при несколько более сильных ограничениях на $F_1$ и $F_2$, чем это сделано авторами.)

Д. М. Гробман

**402. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичные линейным. Гробман Д. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 115—116

Исследуется асимптотическое поведение решений нелинейных систем вида

$$dx/dt = Ax + f(x, t),$$

где $A$ — постоянная матрица порядка $n$, $x$ и $f(t, x)$ — $n$-мерные векторы, $f(t, x)$ непрерывен для $t \geqslant t_0$ и $x$, принадлежащих некоторой области $G$, которая может совпадать с пространством $R_n$ и удовлетворяет в $G$ некоторым условиям.

**403. О кусочно-линейных дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории регулирования. Андре, Зейберт** (Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten. I. André Johannes, Seibert Peter), Arch. Math., 1956, 7, № 2, 148—156 (нем.)

Рассматривается система кусочно-линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Dz + R \cdot \operatorname{sgn} Sz, \qquad (1)$$

где $z$ — $n$-мерный вектор, $D$ — $[n, n]$-матрица, $R$ — $[n, s]$-матрица, $S$ — $[s, n]$-матрица. Элементы матриц $D$, $R$, $S$ — постоянные вещественные числа. Символ sgn определяется для функций, имеющих изолированные нули или обращающихся в нуль на целых интервалах, следующим образом:

$$\operatorname{sgn} f(t) = \begin{cases} +1 \text{ при } f(t) > 0 \text{ или } f(t) = 0 \text{ и } f(t-\varepsilon) > 0 \\ -1 \text{ при } f(t) < 0 \text{ или } f(t) = 0 \text{ и } f(t-\varepsilon) < 0 \\ 0 \text{ в остальных услучаях;} \end{cases} \qquad (2)$$

здесь $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Правая часть системы (1) разрывна на $s$ гиперплоскостях $s_k u = 0$ (где $s_k$ — вектор, составленный из элементов $k$-й строки матрицы $S$), названных авторами контактным множеством $\mathfrak{S}$. Система (1) называется допустимой, если все ее решения, исключая $z \equiv 0$, пересекают контактное множество только в изолированных точках. Доказывается

Теорема 1. Система (1) является допустимой только тогда, когда выполняется одно из условий: а) ни один из собственных векторов матрицы $D$ не лежит в комплексном контактном множестве $s_k u = 0$; б) для любой точки $u$ контактного множества найдется $\mu$ $(0 \leqslant \mu < m)$ такое, что $D^\mu R \operatorname{sgn} Su \in \mathfrak{S}$, где $m$ — степень минимального полинома матрицы $D$.

Для допустимых систем дается классификация точек контактного множества $\mathfrak{S}$, вытекающая из классификации граничных точек, предложенной референтом для систем более общего вида (Уч. зап. МГУ, 1951, 4, вып. 148, 144—180).

Начальной (конечной) точкой авторы называют точку $u \in \mathfrak{S}$ такую, что $z(t_0) = u$, и решение $z(t)$ определено лишь для $t \geqslant t_0$ $(t \leqslant t_0)$. Ввиду условия (2) множество начальных (конечных) точек состоит из граничных точек нескольких видов.

Для случая $s = 1$ (т. е. когда матрица $R$ состоит из одного столбца) доказывается

Теорема 2. Если $SR > 0$ (соответственно $SR < 0$), то в $\mathfrak{S}$ имеются начальные (конечные) точки, но нет конечных (начальных) точек. Эти начальные (конечные) точки с точностью до множества меры нуль заполняют полосу $-SR < SDu < SR$ (соответственно $SR < SDu < -SR$). Если $SR = 0$, то множество начальных и конечных точек имеет меру нуль.

Отсюда сразу вытекает

Теорема 3. Если решение системы (1), начиная с $t = t_0$, целиком лежит в сфере $|z| < \rho$, то оно не пересекает для $t \geqslant t_0$ контактного множества.

$$\rho = \frac{|SR||S|}{\sqrt{|SD|^2|S|^2 - |SDS^*|^2}}$$

Ю. К. Солнцев

**404. Об особых точках некоторых дифференциальных уравнений. Куклес И. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 11—13

Рассматривается вопрос о поведении в окрестности начала координат характеристик уравнения

$$dy/dx = Q(x, y)/P(x, y) \qquad (1)$$

(где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции, исчезающие вначале) и интегральных поверхностей уравнения Пфаффа

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \qquad (2)$$

где $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ и $Z(x, y, z)$ — аналитические функции, исчезающие вначале и связанные условием полной интегрируемости). Рассматривается также вопрос об аналитическом представлении характеристик уравнения (1) и интегральных поверхностей уравнения (2) в окрестности начала.

**405. Обыкновенные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Крейн М. Г.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 11

**406. О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве. Красносельский М. А., Крейн М. Г., Крейн С. Г.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 11

**407. Необходимые и достаточные критерии устойчивости решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве. Рехлицкий З.И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 128—129

**408. Некоторые направления исследований по качественной теории дифференциальных уравнений горьковской школы теории колебаний и перспективы развития этих направлений. Леонтович-Андро-**

нова Е. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 17—18

**409. Определение периодических режимов в динамических системах с кусочно-линейными характеристиками. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 156

Определяются периодические режимы в динамических системах, которые описываются уравнениями

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \rho_i f(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

где все $a_{ij}$ и $\rho_i$ — заданные числа, а $f(x_i)$ — непрерывная либо разрывная кусочно-линейная характеристика, составленная из любого числа звеньев, параллельных двум заданным прямым.

**410. Предельные циклы. Петровский И. Г., Ландис Е. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 24

**411. Качественное исследование автономных систем дифференциальных уравнений. Немыцкий В. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 18—19

Обзорный доклад о состоянии исследований по качественной теории дифференциальных уравнений «в большом».

**412. О применении методов функционального анализа к задачам о нелинейных колебаниях. Красносельский М. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 127

Рассматриваются различные задачи, связанные с периодическими решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

с периодическими по $t$ правыми частями, зависящими от параметра $\mu$. Затем конструируется специальное уравнение вида

$$\varphi = A(\varphi; \mu, T), \qquad (2)$$

где $A$ — вполне непрерывный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве, зависящий от параметра $\mu$ и, возможно, от дополнительного параметра $T$. Уравнение (2) конструируется так, чтобы его решения соответствовали периодическим решениям системы (1). Таким образом, некоторые вопросы о нелинейных колебаниях сводятся к изучению уравнений вида (2), для чего могут быть применены известные общие методы.

**413. О колебаниях в нелинейных системах с изменяющимися параметрами. Кононенко В. О.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 162

Рассматриваются нелинейные уравнения, содержащие малые параметры в такой форме, что при нулевом значении последних уравнения вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с периодическими к эффициентами. Предлагается способ построения приближенных решений таких уравнений, основанный на применении асимптотических методов интегрирования.

**414. О квазилинейных колебаниях. Шиманов С. Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 119—120

Дается метод построения периодических решений для системы дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + \mu \cdot F_s(t, x_1 \ldots, x_n, \mu) \quad (s = 1, \ldots, n),$$

где $a_{si}$ — постоянные, $F_s$ — непрерывные и периодические (периода $2\pi$) функции времени $t$ и непрерывные функции $x_1, \ldots, x_n, \mu$ в некоторой области $G$ и при $|\mu| \leqslant \mu^*$ ($\mu^*$ — положительное число) уравнение $|a_{si} - \delta_{si}\lambda| = 0$ имеет $k$ корней, равных нулю или числам вида $\pm N\sqrt{-1}$ ($N$ — целое число).

**415. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных. Понтрягин Л. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 93—95

Рассматривается довольно общая система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y),$$

где $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_l)$ — неизвестные вектор-функции времени $t$. Эта система позволяет в ряде случаев правильно описать работы радиотехнических приборов.

**416. Обобщение уравнения Ван-дер-Поля. Картрайт М. Л.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 89—90

Исследуется общее поведение решения уравнения

$$\ddot{y} + kf(y)\dot{y} + g(y) = bkp(t),$$

где $k$ — большое число, $p(t)$ — периодическая функция, $p(\pi + t) = -p(t)$, $f(y)$ — четная, $g(y)$ — нечетная, $f'$, $g''$ непрерывны, $f > 0$ для $|y| > 1$ и $f < 0$ для $|y| < 1$, $g' > 0$ и $p$ удовлетворяет некоторым другим простым условиям.

**417. Свободные колебания в колебательных системах с переменными параметрами. Камби** (Possibility of free oscillations in a variable-parameter resonant system. Cambi E.), Nuovo cimento, 1956, **3**, Suppl. № 2, 137—181 (англ.)

Дается обзор способов и результатов решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Изложение иллюстрируется примерами решения уравнений электрических колебательных систем. В. А. Троицкий

**418. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Митропольский Ю. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 90—91

**419. Некоторые теоремы об устойчивости по первому приближению. У Чжо-цюнь** (關於按第一近似決定穩定性的定理. 伍卓羣), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, 1956, № 1, 1—29 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается система

$$dx_s/dt = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где $X_s^{(m)}$ — однородные формы $m$-го порядка ($m \geqslant 1$), $\varphi_s$ определены в области

$$t \geqslant 0, \ |x_s| \leqslant H \qquad (2)$$

и удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^{\gamma n}, \quad A = \text{const} > 0. \qquad (3)$$

Система первого приближения будет

$$dx_s/dt = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n). \qquad (4)$$

Также рассматривается система дифференциальных уравнений более общего вида

$$dx_s/dt = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (5)$$

где $X_s$ определены в той же области (2) и $X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$.

В § 2 работы рассматривается устойчивость тривиального решения уравнения (4) и получены известные простые результаты.

Затем приводится аналитическое доказательство следующей теоремы И. Г. Малкина: Если тривиальное решение системы (4) асимптотически устойчиво, то при любом выборе функций $\varphi_s$, удовлетворяющих условию (3) с достаточно малой $A$, тривиальное решение системы (1) тоже асимптотически устойчиво. Эта теорема была высказана интуитивно Малкиным И. Г. (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 6, 783—784). Теорема Малкина обобщается в следующей форме: Если неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} X_s^{(m)} X_s / \left\{\sum_{s=1}^{n} X_s^{(m)2}\right\}^{1/2} \left\{\sum_{s=1}^{n} X_s^2\right\}^{1/2} \geqslant 1 - d \quad (6)$$

выполняется в близости начальной точки для достаточно малого $d$ и если тривиальное решение системы (4) асимптотически устойчиво, то тривиальное решение системы (1) также асимптотически устойчиво. Далее доказывается, что в теореме Малкина и в выше приведенном ее обобщении имеет место равномерная асимптотическая устойчивость. Доказывается асимптотическая устойчивость тривиального решения полной системы уравнений (1). Более того, в § 7 установлены теоремы устойчивости по первому приближению в большом. В конце работы рассмотрены вопросы неустойчивости, определенной в первом приближении и получены результаты, соответствующие теоремам Малкина и их обобщениям общего характера, а именно:

Если тривиальное решение системы (4) неустойчиво и если в окрестности начала координат нет целых траекторий системы (4), за исключением самого тривиального решения, а $\varphi_s$ удовлетворяют неравенству (3) с достаточно малой $A$, тогда тривиальное решение системы (1) тоже неустойчиво. Точно так же имеются теоремы, которые позволяют заменить систему (1) системой (5), если условие (3) заменить условием (6).

Резюме автора

Примечание редакции. Теорема И. Г. Малкина доказана в его книге (Теория устойчивости движения, М.—Л., Гостехиздат, 1952, 355—357).

**420. Устойчивые системы дифференциальных уравнений с интегрируемыми возмущающими членами. Антосевич** (Stable systems of differential equations with integrable perturbation term. Antosiewicz H. A.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 208—212 (англ.)

Рассматриваются системы уравнений

$$dx/dt = p(x,t) + q(x,t), \quad (1)$$

$$dx/dt = p(x,t) + q(x,t,z), \quad (2)$$

где $x$ — $n$-мерный вектор, $z$ — $k$-мерный вектор параметров. Доказываются следующие утверждения.

1. Пусть существует функция $h(t) \geqslant 0$, удовлетворяющая условию $\int_0^\infty h(t)\,dt = H < \infty$, и постоянная $\xi$ такие, что $\| q(x,t) \| < h(t) \|x\|$ ($\| x \|$ — норма $x$). Если можно указать квадратичную форму $V(x,t)$ переменной $x$, удовлетворяющую неравенствам

$$A \| x \| \leqslant V(x,t) \leqslant B \| x \|,$$

$$\partial V/\partial t + \operatorname{grad} V(x,t)\, p(x,t) \leqslant -C \| x \|,$$

где $A$, $B$, $C$ — положительные постоянные, то решение $x = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

2. Пусть при прежних предположениях о функции $h(t)$ существует непрерывная функция $\varphi(z)$ ($\varphi(0) = 0$) такая, что $\| q(x,t,z) \| < \varphi(z) h(t)$ при $\| x \| < \xi$, $t \geqslant 0$, $\| z \| < Z$.

Если решение $y = 0$ системы уравнений $dy/dt = p(y,t)$ равномерно асимптотически устойчиво, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon, H) > 0$ и $\xi(\varepsilon, H) > 0$ такие, что $\| x(x_0, t_0, t) \| < \varepsilon$, если только $\| z \| < \xi$, $\| x_0 \| < \delta$.

Примечание референта. Доказательство второго утверждения опирается на теорему И. Г. Малкина (РЖМат, 1955,211) о существовании функции Ляпунова $V$ в случае равномерной асимптотической устойчивости. Существование ограниченных производных $\partial V / \partial x_i$ доказано И. Г. Малкиным лишь в предположении существования равномерно ограниченных производных $\partial p/\partial x_j$. Утверждение о том, что доказательство автора сохраняет силу и в случае равномерной неасимптотической устойчивости со ссылкой на результаты референта (РЖМат, 1956, 1336), неточно, так как функция Ляпунова $V$ из цитированной статьи не имеет равномерно ограниченных частных производных $\partial V/\partial x_i$, а равномерная ограниченность производных $\partial V / \partial x_i$ существенно используется при доказательстве. Н. Н. Красовский

**421. Об обобщенном уравнении вынужденных колебаний. Миколайская З.**, Бюл. Польской АН., Отд. 3., 1954, 2, № 7, 313—317

**Об обобщенном уравнении вынужденных колебаний. Миколайская** (Sur l'équation généralisée des oscillations entretenues. Mikołajska Zofia), Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 3, 1954, **2**, № 7, 309—313 (франц.)

Доказывается обобщение теоремы Левинсона — Смита — Адамова (Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М. — Л., Гостехиздат, 1949, стр. 152) о существовании периодических решений уравнения

$$\ddot{x} = g(x,\dot{x}) + \dot{x} f(x,\dot{x}). \quad (1)$$

Сначала доказывается общая теорема о существовании периодического решения системы уравнений

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = g(x,v) + p(x,v). \quad (2)$$

В частности, получена следующая теорема: Если 1. $g \in C^1$, $g(x,0) > 0$ для $x < 0$, $g(x,0) < 0$ для $x > 0$, $g(x,v) \equiv g(x,-v)$, $p(x,v) = f(x,v)\,v$. 2. Существуют функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, непрерывные всюду, и функции $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, непрерывные и положительные для $u \geqslant 0$ такие, что $\varphi_2(x)\psi_2(v^2) \leqslant g(u,v) \leqslant \varphi_1(x)\psi_1(v^2)$ для $v > 0$, где

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\,dx = \int_0^{-\infty} \varphi_2(x)\,dx = -\infty, \quad \int_{0^*}^{\infty} du/\psi_i(u) = +\infty \quad (i = 1, 2).$$

3. Существует $x_0 > 0$ такое, что $f(x,v) \leqslant 0$ для $|x| \geqslant x_0$ и числа $M \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ такие, что $f(x,v) \leqslant M$ для $|x| \leqslant x_0$, $|v| \geqslant \eta$. 4. Существует $x_1 > x_0$ и функция $a^* \in L^1(x_0, x_1)$ такая, что $f(x,v) \leqslant a^*(x)$ для $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $v \leqslant \eta$,

$$\int_{x_0}^{x_1} a^*(x)\,dx < -4Mx_0.$$

5. В интервале $[-x_1, x_1]$ имеет место равномерная сходимость $\frac{1}{v} g(x,v) \to 0$, $\frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial v}(x,v) \to 0$, для $|v| \to \infty$. 6. $f(0,0) > 0$. Тогда уравнение (1) допускает по крайней мере одно периодическое решение. Множество всех периодических решений уравнения (1) ограничено.

K. Maurin

**422. Спектральная теория дифференциальных операторов. Левитан Б. М., Марченко В. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 16—17

**423. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. Левин Б. Я.**, Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 2, 187—190

Рассматривается преобразование вида

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_0^\infty f(x)\, y(x, \lambda)\, dx, \qquad (1)$$

где $f(x) \in I_2(0, \infty)$, а $y(x, \lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — решение дифференциального уравнения

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \qquad (2)$$

удовлетворяющее граничному условию на бесконечности $\lim_{x \to +\infty} | y(x, \lambda) - e^{i\lambda x} | = 0$ (это решение называется основным). Оказывается, что при выполнении условия $\int_0^\infty | q(x) | (1 + x^2)\, dx < \infty$ ($q(x)$ — комплекснозначная функция) основное решение уравнения (2) существует и представляется в форме

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt, \qquad (3)$$

где $K(x, t)$ — ограниченная непрерывная функция в области $0 \leqslant x \leqslant t < \infty$ и $\int_0^\infty \int_x^\infty | K(x, t) |\, dt dx < \infty$. Представление (3) позволяет продолжить $y(x, \lambda)$ в полуплоскость $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и установить следующую теорему: Преобразование (1) отображает все пространство $I_2(0, \infty)$ на $L_2^+$ (пространство функций, ограниченных и голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и принадлежащих $L_2(-\infty, \infty)$ на вещественной оси); обратное преобразование имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^\infty \psi(\lambda)\, Z(x, \lambda)\, d\lambda,$$

где

$$Z(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_0^x R(s, x)\, e^{-i\lambda s}\, ds,$$

$R(s, x)$ — резольвента интегрального уравнения

$$f(x) + \int_0^x K(s, x)\, f(s)\, ds = \chi(s).$$

Затем устанавливается следующее обобщение классических формул обращения Лапласа — Бромвича; Если при некотором $a > 0$ $f(x)\, e^{-ax} \in L_2(0, \infty)$, то существует

$$\theta(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_0^\infty f(x)\, y(x, i\mu)\, dx \quad (\operatorname{Re} \mu \geqslant a),$$

причем функция $\theta(\mu)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} \mu \geqslant a$, принадлежит $L_2$ на ее границе и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \text{l. i. m.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \theta(\mu)\, Z(x, i\mu)\, d\mu.$$

В заключение формулируются две теоремы, относящиеся к разложению $f(x)$ по решениям $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (2), удовлетворяющим условиям $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$. Б. И. Коренблюм

**424. Собственные функции сложной задачи о собственных значениях как ряды по собственным функциям всех частичных задач. Бёрш-Зупан** (Eigenfunktionen einer zusammengesetzten Eigenwertaufgabe als Reihen nach den Eigenfunktionen sämtlicher Teilaufgaben. Börsch-Supan Wolfgang), Stahlbau, 1955, **24**, № 3, 62—63 (нем.)

Обоснование метода Штригля (Strigl G., Stahlbau, 1955, **24**, № 2, 33—39; № 3, 51—61) выражения собственных чисел и функций сложной задачи

$$(EI \cdot w')'' + \nu [P_0 (p(x) \cdot w')' + K_0 (k(x) \cdot w')'] = 0$$

через собственные числа и функции частичных задач

$$(EI \cdot w'')'' + \nu \cdot P_0 (p(x)\, w')' = 0,$$
$$(EIw'')'' + \nu K_0 (k(x)\, w')' = 0.$$

Рассматривается интегральное уравнение

$$w(s) = \lambda \int K(s, t)\, w(t)\, dt$$

для искомой собственной функции $w(s)$ и собственного значения $\lambda$, при обычных предположениях о ядре и области интегрирования. Доказывается, что $w(s)$ выражается суммой двух равномерно сходящихся рядов:

$$w(s) = \sum\nolimits_i a_i \varphi_i(s) + \sum\nolimits_k b_k \psi_k(s),$$

где $\varphi_i$ и $\psi_k$ — ортонормированные системы собственных функций частичных симметрических ядер $M(s, t)$ и $N(s, t)$,

$$M(s, t) + N(s, t) = K(s, t),$$

а коэффициенты $a_i$ и $b_k$ являются решениями линейной системы

$$\left(\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\lambda}\right) a_i + \frac{1}{\mu_i} \sum\nolimits_k B_{ki} b_k = 0,$$

$$-\frac{1}{\nu_k} \sum\nolimits_i A_{ik} a_i + \left(\frac{1}{\nu_k} - \frac{1}{\lambda}\right) b_k = 0,$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, \quad A_{ik} = \int \varphi_i(t)\, \psi_k(t)\, dt, \quad B_{ki} = A_{ik}.$$

Указывается возможность обобщения на случай функций многих переменных, а также на уравнения с комплексными ядрами Эрмита. К. Н. Юрчук

**425. О дифференциальном операторе второго порядка. Феллер** (On second order differential operators. Feller William), Ann. Math., 1955, **61**, № 1, 90—105 (англ.)

Рассматривается линейный оператор с областью определения и областью изменения входящими в множество вещественных непрерывных функций и обладающий следующими свойствами.

1. Функция $f$ принадлежит области определения $A$ в точке $x_0$, $f \in D(A, x_0)$, если $f$ и $Af$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $x_0$.

2. Для каждого $f \in D(A, x_0)$ и $f(x) = g(x)$ в окрестности точки $x_0$ также $g \in D(A, x_0)$ и $Ag(x_0) = Af(x_0)$.

3. Если $f \in D(A, x_0)$, $f(x) \geqslant 0$ и $f(x_0) = 0$, то $Af(x_0) = 0$.

Оператор, обладающий этими свойствами, автор называет оператором, обладающим свойством $P$. В частности, дифференциальный оператор

$$Af = a(x)\, d^2 f / dx^2 + b(x)\, df / dx + c(x)\, f, \quad a(x) > 0 \quad (1)$$

обладает свойством $P$. В статье устанавливается общий вид оператора, обладающего свойством $P$. Рассматривается дифференцирование по монотонной функции Если $u$ непрерывна в точке $x_0$ и строго возрастает, то под правой производной $D_u^+ f$ понимают

$$\lim_{x \to x_0 + 0} [f(x) - f(x_0)] / [u(x) - u(x_0)].$$

Левая и общая производные определяются аналогично. Если $u$ строго возрастает и разрывна в точке $x_0$, то под

$D_u f$ понимают

$$[f(x_0+0)-f(x_0-0)]/[u(x_0+0)-u(x_0-0)].$$

Пусть $\varphi$ и $A\varphi$ определены и непрерывны в $r_1<x<r_2$ и $\varphi>0$. Вводится оператор

$$\Omega f=\frac{1}{\varphi}A(f\varphi)-cf;\ c=A\varphi/\varphi. \tag{2}$$

Если $A$ обладает свойством $P$, то и $\Omega$ обладает этим свойством; кроме того, $\Omega 1\equiv 0$. Вводится понятие регулярной точки. Точка $x_0$ называется регулярной, если существует и убывающая и возрастающая функции $f\in D(A,x_0)$, в которых $\Omega f(x_0)>0$. Регулярные точки образуют открытое множество.

Устанавливается критерий регулярности интервала. Интервал $S$ является регулярным тогда и только тогда, когда уравнение $\Omega z=0$ имеет строго возрастающее решение и $\Omega$ не исчезает ни в одной точке $x_0$ (последнее означает, что уравнение $\Omega v=1$ имеет решение, и наоборот). Устанавливаются следующие теоремы представления:

1. Если $S$ — регулярный интервал, то существуют две строго возрастающие функции $u$ и $v$, из которых $u$ (но не обязательно $v$) непрерывна, и таких, что для каждой $f\in D(\Omega)$ существуют односторонние производные $D_u^+ f$ и $D_u^- f$ в каждой точке $S$ и $D_u^+ f=D_u^- f=D_u f$, исключая, быть может, точки разрыва $v$. Эти производные в свою очередь дифференцируемы относительно $v$ и

$$\Omega f=D_v D_u f. \tag{3}$$

2. Пусть $x_0$ не регулярно, но таково, что $\Omega f(x_0)$ не исчезает для всех $f\in D(\Omega,x_0)$, тогда существует непрерывная функция $u$ такая, что

$$\Omega f(x_0)=D_u^+ f(x_0)\quad\text{или}\quad \Omega f(x_0)=-D_u^- f(x_0). \tag{4}$$

3. Пусть $A$ — оператор, обладающий свойством $P$, и предположим, что $A\varphi$ существует для некоторого $\varphi>0$, тогда

$$Af=\varphi\Omega(f/\varphi)+cf=\varphi D_v D_u f/\varphi+cf;\ c=A\varphi/\varphi, \tag{5}$$

при этом, если $\varphi$ заменить на $\varphi_1$ с $c_1=A\varphi_1/\varphi_1$, придем от представления (5) к представлению

$$Af=\varphi_1 D_{v_1} D_{u_1} f/\varphi_1+c_1 f$$

с помощью замены переменной

$$u_1=\int \varphi^2/\varphi_1^2\,du;\ v_1=\int \varphi_1^2/\varphi^2\,dv;$$

при этом, можно считать $c\equiv 0$ тогда и только тогда, когда существует положительное решение $A\varphi=0$.

Заметим, что в силу непрерывности $u$ можно считать $u(x)\equiv x$. С. А. Орлов

**426. О существовании спектральных функций некоторых сингулярных дифференциальных систем второго порядка. К а ц И. С.,** Докл. АН СССР, 1956, 106, № 1, 15—18

Рассматривается обобщенное дифференциальное выражение второго порядка

$$l(f)=-\frac{d}{dM}\left[f^-(x)-\int_c^{x-0} f(s)\,dQ(s)\right],$$

где $f^-(x)$ — производная слева. $M(x)$ — неубывающая конечная функция, определенная либо при $a\leqslant x<b$, либо при $a<x<b$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$, $Q(x)$ — вещественная функция, определенная в одной из указанных областей и имеющая ограниченное изменение в каждом замкнутом отрезке $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Обычным образом с помощью выражения $l(f)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}=L^2_M(a,b)$ $M$-измеримых и имеющих $M$-суммируемый квадрат функций вводятся симметрический оператор $L_0$ и сопряженный ему оператор $L$. Утверждается, что относительно $L_0$ и $L$ справедливы все предложения, содержащиеся в соответствующих работах М. Г. Крейна (Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 1954, 153—223)

Основные результаты:

Т е о р е м а. Если $Q(x)=-(\nu^2-1/4)x^{-1}+Q_1(x)$, $\nu>0$, и

$$\int_0^k x\,|dQ_1(x)|<\infty,\ \int_0^k x\,dM(x)<\infty\ (0<k<b\leqslant\infty),$$

то дифференциальная система

$$l(y)-\lambda y=0,\ \lim_{x\to 0} x^{-\nu-1/2}y(x)=1\ (0<x<b) \tag{1}$$

имеет единственное решение, являющееся при фиксированном $x$ целой функцией от $\lambda$, и хотя бы одну ортогональную спектральную функцию (определение см. ниже), порождаемую некоторым самосопряженным расширением оператора $L_0$. Если при условиях теоремы $\int_0^k x^{1-2\nu}\,dM(x)=\infty$ $(0<k<b)$, то любое самосопряженное расширение $L_0$ порождает ортогональную спектральную функцию системы (1) и, следовательно, имеет простой спектр.

Т е о р е м а. Если

$$\int_{-\infty}^k |x|\,dM(x)<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^k |x|\,|dQ(x)|<\infty\ (-\infty<k<b\leqslant\infty),$$

то дифференциальная система

$$l(y)-\lambda y=0\ (-\infty<x<b),\ \lim_{x\to-\infty} y(x)=1 \tag{2}$$

имеет единственное решение, являющееся при фиксированном $x$ целой функцией от $\lambda$, и хотя бы одну ортогональную спектральную функцию, порождаемую некоторым самосопряженным расширением оператора $L_0$. Если при условиях теоремы $\int_{-\infty}^k x^2 dM(x)=\infty$, то любое самосопряженное расширение оператора $L_0$ порождает некоторую ортогональную спектральную функцию системы (2) и, следовательно, имеет простой спектр.

Пусть $u(x,\lambda)$ — решение системы (1) и $\mathfrak{H}'$ — множество функций из $\mathfrak{H}$, равных нулю вне конечного отрезка $[\alpha,\beta]\subset(0,b)$. Неубывающая функция $\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0)$ $(-\infty<\lambda<\infty;\ \tau(0)=0)$ называется спектральной функцией системы (1), если отображение $f\to F$, где

$$f\in\mathfrak{H}',\ \text{а}\ F(\lambda)=\int_0^b f(x)\,u(x,\lambda)\,dM(x)\ (-\infty<\lambda<\infty),$$

есть изометрическое отображение $\mathfrak{H}'$ в гильбертово пространство $L^2_\tau$ $\tau$-измеримых функций с $\tau$-суммируемым квадратом. Спектральная функция называется ортогональной, если отображение $f\to F$ переводит $\mathfrak{H}'$ в плотную часть $L^2_\tau$. З. И. Биглов

**427. О поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка. К а ц И. С.,** Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 183—186

Рассматриваются две дифференциальные системы (определение $l(y)$, $Q(x)$, $M(x)$ и спектральной функции

$\tau(\lambda)$ см. реф. 426).

$$l(y) - \lambda y = 0\ (0 \leqslant x < B),\ y(0) = 1,\ y^-(0) = h, \quad (1)$$

где $h$ — вещественная константа, $Q(x)$ — вещественная функция такая, что при любом $c \in (0, B)$ $\int_0^c |dQ(x)| < \infty$;

$$l(y) - \lambda y = 0\ (0 \leqslant x < B),\ y(0) = 0,\ y^-(0) = 1, \quad (2)$$

где $Q(x)$ — вещественная функция такая, что при любом $c \in (0, B)$ $\int_0^c x\,|dQ(x)| < \infty$. В системах (1) и (2) $M(x)$ ($M(0) = 0$) — неубывающая конечная функция при $0 \leqslant x < B \leqslant \infty$ и $M(x) > 0$ при $x > 0$. Сформулированы следующие теоремы, связывающие порядок роста спектральной функции $\tau(\lambda)$ с поведением $M(x)$ в окрестности нуля:

Теорема. Пусть $\tau(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) — спектральная функция системы (1), $b$ — сколь угодно малое число из $(0, B)$, тогда точные нижние границы значений $\alpha$, при которых имеет место каждое из соотношений

$$\int_0^b \left(\int_0^x M(s)\,ds\right)^{\alpha-1} dx < \infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + |\lambda|^{\alpha}} < \infty,$$

$$\int_0^b [xM(x)]^{\alpha-1}\,dx < \infty,\quad \lim_{x \to 0} x^{\alpha} (M(x))^{\alpha-1} = 0$$

совпадают, причем, если при $\alpha$, равном точной нижней границе, отличной от нуля, одно из этих соотношений не имеет места, то не имеют места и предыдущие (но не обязательно последующие).

Теорема. Если $M(x)$ непрерывна в некоторой правой полуокрестности $x = 0$ и $\lim_{x \to 0} \underline{M}^+(x) / x^{\beta} = N (\beta > -1)$, где $\underline{M}^+(x)$ — правое нижнее производное число $M(x)$ в точке $x$, то для любой спектральной функции $\tau(\lambda)$ системы (1) при $\lambda \to +\infty$

$$\tau(\lambda) = N^{-1(\beta+2)}\, T(\beta)\, \lambda^{[\beta+1]/[\beta+2]} + o\left(\lambda^{[\beta+1]/[\beta+2]}\right),$$

где

$$T(\beta) = (\beta + 2)^{-2(\beta+1)/[\beta+2]}\, (\beta + 1)\, \Gamma^{-2}([2\beta + 3] / [\beta + 2]),$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Аналогичные теоремы сформулированы и для системы (2). З. И. Биглов

428 К. **Труды второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. 3. Методы и средства экспериментального исследования систем автоматического регулирования. Библиография по теории автоматического регулирования и смежным вопросам.** М.—Л. АН СССР, 1955, 351 стр., илл. 25 р. 10 к.

429 К. **Методы решения дифференциальных уравнений. Йосида** (微分方程式の解法. 吉田耕作. 岩波書店, 269頁, 280 圓. Иванами сётен), 1954, 269 стр., 280 иен (япон.)

430 Д. **Спектральная теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Иванов В. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1956

431 Д. **Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Чечик В. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Воронежск. ун-т, Воронеж, 1956

432 Д. **О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Гельман А. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1956

433 Д. **Разрывные колебания. Смит** (Discontinuous oscillations. Smith Oliver Kind.— Doct. diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2231 (англ.)

Приводятся последние математические исследования так называемых «разрывных колебаний», имеющих место в круговой вакуумной трубке.

Обращается внимание на дифференциальное уравнение двух циклов — осциллятор и мультивибратор Хайкина — Лошакова. Демонстрируется существование, единственность и устойчивость прерывистого периодического решения.

В отличие от существующих работ, посвященных этому вопросу, в данной работе неизвестные функции являются непрерывными, а их производные разрывны. Изучается фазовая картина на искривленных поверхностях 3- или 4-мерного пространства вместо обыкновенной фазовой плоскости. Ю. А. Митропольский

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

434. **Теорема об аппроксимации решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Мальгранж** (Le théorème d'approximation pour les équations aux dérivées partielles coefifcients constants. Malgrange B.), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 1, 1—7 (франц.)

Используя преобразование Фурье и теорему Палея — Винера — Шварца, автор устанавливает теорему: Решение уравнения $D\varphi = 0$, где $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, а $D$ — полиномиальный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, может быть в топологии $\mathcal{E}(\Omega)$ приближенно линейными комбинациями решений уравнения $Df = 0$ вида $P(x) \exp(2\pi i \sum_{s=1}^{n} x_s \lambda_s)$, $P(x)$ — полином от $x_1, \ldots, x_n$. Указывается, что аналогичные утверждения справедливы для $\varphi \in \mathcal{E}^{(m)}$ и $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Определение пространств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{(m)}$, $\mathcal{D}$ см. Schwartz L., Theorie des distributions, Paris, 1950). С. Д. Эйдельман

435. **Замечания о несущих множествах сверток. Шварц** (Rappels sur les supports de produits de convolution. Schwartz L.), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 1—4 (франц.)

Приводятся теоремы о бесконечной дифференцируемости или аналитичности свертки обобщенной функции и функции, при соответствующих свойствах функций и несущих множеств. Эти теоремы используются для получения утверждения: пусть $D$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, имеющий левое элементарное решение, бесконечно дифференцируемое (аналитическое) в дополнении к 0; $T$ — обобщенная функция в $\Omega \subset R^n$. Если $DT \equiv D * T = S$ бесконечно дифференцируема (аналитична) в $\Omega$, то то же верно для $T$ (для доказательства нужно произвести свертывание с элементарным решением). А. А. Дезин

436. **Предварительные замечания к изучению задачи Дирихле** (Préliminaires à l'étude du problème de Dirichlet), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 11, 1—6 (франц.)

Пусть $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ — пространство функций из $L^2(\Omega)$, все производные которых (в смысле теории обобщенных функций) до порядка $m$ принадлежат $L^2(\Omega)$. В $\mathcal{E}^m_{L^2}$ обычным образом вводится скалярное произведение, после чего оно оказывается пространством Гильберта. Пусть $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ — замыкание в метрике $\mathcal{E}^m_{L^2}$ функций из $\mathcal{D}(\Omega)$ (бесконечно дифференцируемых, равных 0 в граничной полоске). Устанавливается, что $E^m_{L^2} = \mathcal{D}^m_{L^2}$ вслу-

чае $\Omega = R^n$. Пусть $\tilde{f}$ — функция, равная $f \in L^2$ в $\Omega$ и нулю вне $\Omega$.

Теорема 1. $f \in \mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ влечет $\tilde{f} \in \mathscr{E}'^m_{L^2}(R^n)$.

Теорема 2. При $m \geqslant 1$, $\Omega = R^n_+$ (полупространство $x_n > 0$) существует непрерывное отображение $\gamma: \mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega) \to L^2(\dot{\Omega})$ ($\dot{\Omega}$ — граница $\Omega$), совпадающее для бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций с операцией взятия следа (т. е. граничного значения). А. А. Дезин

**437. Пространства $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$** (Les espaces $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 12, 1—5 (франц.)

Продолжается изучение отображения $\gamma$ для $R^n_+$ (реф. 436). Устанавливается, что след тангенциальной производной совпадает с тангенциальной производной от следа. Нормальная производная $D^p_n \tilde{f}$ от $\tilde{f}$ выражается через $(D^p_n f)^{\sim}$ и соответствующие особенности («мультислои»). Если $f \in \mathscr{E}^m_{L^2}(R^n_+)$, то $\tilde{f} \in \mathscr{E}^m_{L^2}(R^n)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(D^p f) = 0$; $|p| \leqslant m-1$.

Доказывается теорема: Всякую $f \in \mathscr{E}^m_{L^2}(R^n_+)$ можно считать функцией из $\mathscr{E}^m_{L^2}(R^n)$, рассматриваемой на $R^n_+$. Отсюда можно заключить, что отображение $f \to \gamma f$ является единственным линейным непрерывным отображением $\mathscr{E}^1_{L^2}(R^n_+) \to L^2(R^{n-1})$, совпадающим для бесконечно дифференцируемых функций со взятием следа.

А. А. Дезин

**438. 1-я часть: Области $\Omega$ с регулярной границей, пространства $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$. 2-я часть: Решение задачи Дирихле в области $\Omega \subset R^n$ для оператора $D = -\Delta + \lambda$; $\lambda > 0$** ($1^{\text{ère}}$ partie: Ouverts $\Omega$ à frontière régulière, espaces $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$. $2^{\text{de}}$ partie: Résolution du problème de Dirichlet dans un ouvert $\Omega$ de $R_n$ pour l'opérateur $D = -\Delta + \lambda$; $\lambda > 0$), Sémin. Schwartz. Fac. Sci. Paris, 1954/1955, 2, № 13,1—5 (франц.)

Пусть $\dot{\Omega}$ (реф. 436) — бесконечно дифференцируемое многообразие $n-1$ — мерного пространства, а область $\Omega \in R^n$ находится по одну сторону $\dot{\Omega}$. $L^2_{\text{loc}}(\dot{\Omega})$ — пространство функций из $L^2$ по поверхностной мере $d\sigma$ на каждом компактном множестве $\dot{\Omega}$. Тогда верна

Теорема 1: Существует единственное непрерывное отображение $\gamma$: $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega) \to L^2_{\text{loc}}(\dot{\Omega})$, $m \geqslant 1$, совпадающее для каждой бесконечно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$ функции со взятием следа. Следствие: функции из $\mathscr{D}(R^n)$ плотны в $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

Доказывается, что в предположениях теоремы 1 $\mathscr{D}^m_{L^2}(\Omega)$ является подпространством $\mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$, образованным из функций $f$, для которых $\gamma(D^p f) = 0$, $|p| \leqslant m-1$.

Теорема 2. Пространство $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ обобщенных функций, состоящее из производных порядка $\leqslant m$ от $f \in L^2(\Omega)$, изоморфно пространству обобщенных функций над $\mathscr{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

Решение задачи Дирихле: Пусть $T \in \mathscr{D}'^1_{L^2}(\Omega)$; $g \in \mathscr{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Тогда существует единственная $u$ такая, что $Du = T$, $u - g \in \mathscr{D}^1_{L^2}(\Omega)$. А. А. Дезин

**439. Оператор Грина и решение задачи Дирихле** (L'opérateur de Green et la résolution du problème de Dirichlet), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 14, 1—4 (франц.)

Оператор $D_\lambda$ (реф. 438) задает топологический изоморфизм из $\mathscr{D}^1_{L^2}(\Omega)$ на $\mathscr{D}'^1_{L^2}(\Omega)$. Обратный изоморфизм определяет оператор Грина $G_\lambda$. $GD$ есть проекция $\mathscr{E}^1_{L^2}(\Omega)$ на $\mathscr{D}^1_{L^2}(\Omega)$. При помощи $G_\lambda$ записывается решение задачи Дирихле. Результаты распространяются на случай комплексных $\lambda$, не равных действительному отрицательному числу. Даются оценки нормы оператора $G_\lambda$. А. А. Дезин

**440. $m$-Полярные множества** (Ensembles $m$-polaires), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 15, 1—7 (франц.)

Будем называть множество $E \subset R^n$ $m$-полярным, если всякая обобщенная функция из $\mathscr{D}'^m_{L^2}(R^n)$ (реф. 438) с несущим множеством $\subset E$ есть нуль. $([n/2]+1)$ — полярное множество всегда пусто в $R^n$.

Основная теорема: Пусть $\Omega$ — непустая область $R^n$. Чтобы $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega) = \mathscr{E}^m_{L^2}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{C}\Omega$ (дополнение к $\Omega$) было $m$-полярным.

А. А. Дезин

**441. Функции-следы** (Fonctions-traces), Sémin. Schwartz. Fac. sci., Paris, 1954/1955, 2, № 16, 1—7 (франц.)

Пусть $\mathscr{C}\Omega$ (реф. 440) — $p$-мерное подпространство $X^p$ пространства $R^n$; $p \leqslant n-2$ (случай гиперплоскости рассмотрен в № 11, 12, реф. 436, 437); $m \geqslant [(n-p)/2]+1$ (т. е. $X^n$ не является $m$-полярным (реф. 440).

Теорема 1. Существует единственное непрерывное отображение $\gamma: \mathscr{E}^m_{L^2}(\mathscr{C}X^p) \to L^2(X^p)$, совпадающее для бесконечно дифференцируемых функций со взятием следа.

Рассматривается вопрос о связи следа производной с производной следа.

Теорема 2. Чтобы из $f \in \mathscr{E}^m_{L^2}(\mathscr{C}X^p)$ следовало $f \in \mathscr{D}'^m_{L^2}(\mathscr{C}X^p)$, необходимо и достаточно условие $\gamma^r f \equiv \gamma(D^r f) = 0$ для всех $r$, при которых $\gamma^r$ определено, т. е. при $m - |r| \geqslant [(n-p)/2]+1$. А. А. Дезин

**442. 1-Полярные множества. Задача Дирихле для дифференциальных операторов порядка $2m$** (Ensembles 1-polaires. Problèmes de Dirichlet pour des opérateurs différentiels d'ordre $2m$), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 2, № 17, 1—4 (франц.)

Отправляясь от результатов Дени (Deny, Acta math., 1950, 82, 107—183), автор устанавливает теорему: 1-полярное множество (реф. 439) имеет «емкость» нуль.

В полной аналогии с № 13 (реф. 438) определяется задача Дирихле для оператора порядка $2m$.

Теорема: Чтобы задача Дирихле для оператора $D$ порядка $2m$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathscr{D}$ определял топологический изоморфизм из $\mathscr{D}^m_{L^2}(\Omega)$ на $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$.

Теорема: Пусть $D$ — непрерывный оператор, действующий из $\mathscr{D}^m_{L^2}(\Omega)$ в $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, причем $(Du, \bar{v})$ определяет эрмитову форму на $\mathscr{D}^m_{L^2}(\Omega)$. Если существует $k = \text{const} > 0$ такое, что $(Du, \bar{u}) \geqslant k \|u\|^2_{\mathring{\mathscr{C}}^m_{L^2}}$ для $u$ бесконечно дифференцируемых и равных 0 в граничной полоске, то $D$ определяет топологический изоморфизм из $\mathscr{D}^m_{L^2}(\Omega)$ на $\mathscr{D}'^m_{L^2}(\Omega)$. Приводятся примеры операторов, для которых выполняются условия последней теоремы. А. А. Дезин

**443. О нигде не разрешимых линейных или нелинейных уравнениях с частными производными. Хорних** (Ueber nirgends lösbare lineare oder nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Hornich Hans),

Rend. Seminar. Univ. Padova, Parte I, 1955, 24, 160—164 (нем.)

Автор указывает, что непрерывная в произвольной ограниченной области $G$ функция $\varphi(x, y)$, построенная ранее (РЖМат, 1956, 1350), обладает тем свойством, что уравнение

$$L[u] \equiv u_x + \varphi(x, y)\, u_y = f(x, y)$$

не имеет решений в любой области $G' \subset G$, где $f(x, y)$ непрерывна, а $f_y$ существует и $f_y \not\equiv 0$. Здесь приведены непосредственные следствия этого. Прежде всего за $G$ можно взять всю плоскость. Далее, уравнение $L[u] = 0$ имеет в $G$ только постоянные решения. Уравнение $L[u] = F(x, y, u)$, где $F$, $F_y$ и $F_u$ непрерывны при $(x, y) \in G$, $-\infty < u < \infty$, имеет решение $u = u_1(x, y)$ только, если $\partial u_1/\partial y \equiv 0$ и $\partial F(x, y, u_1(x, y))/\partial y \equiv 0$. К последнему утверждению строится аналог для уравнений высших порядков.

Отметим, что автор порой смешивает условия $\partial u/\partial y \equiv 0$ и независимости $u$ от $y$. Последнее утверждение о «всюду плотности» неразрешимых уравнений обосновано недостаточно. А. Д. Мышкис

**444. Сведение системы квазилинейных уравнений к одному квазилинейному уравнению. Яненко Н. Н.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 173—178

Рассматривается система уравнений

$$a_i u_x + b_i u_y + c_i v_x + d_i v_y + e_i w_x + f_i w_y = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

коэффициенты которой зависят от искомых функций $u$, $v$, $w$. В предположении, что решение определяет зависимость вида $w = w(u, v)$, показано, как получить квазилинейное уравнение 3-го порядка, которому должна удовлетворять функция $w(u, v)$. Для этого в каждом из трех данных уравнений $x$ и $y$ принимаются за неизвестные функции переменных $u$ и $v$, а затем пишется условие совместности. В качестве примера система уравнений гидродинамики плоского локально адиабатического движения идеального газа

$$v_t + p_x = 0, \quad v_x + bp^{-\varkappa} p_t = 0, \quad b_t = 0 \qquad (1)$$

преобразуется в уравнение для $b(v, p)$; это уравнение 2-го порядка (так как одна квадратура выполняется сразу). Система (1) иным способом была исследована Мартином (РЖМат, 1955, 3786). Рассмотрены некоторые частные интегралы; показано, как задача Коши для системы (1) преобразуется в задачу Коши для полученного уравнения, а также как по решению $b(v, p)$ этого уравнения восстановить решение исходной системы.

Изложение проводится в духе классиков и не содержит всех необходимых уточнений. А. Д. Мышкис

**445. Обзор исследований системы матричных телеграфных уравнений, выполненных в Риге. Бразма Н. А.,** АН ЛатвССР, 1955, № 8, 133—141 (рез. лат.)

Обзор исследований системы уравнений в матричном виде

$$L\partial i/\partial t + \partial u/\partial x + Ri = h_1, \quad C\partial u/\partial t + \partial i/\partial x + Gu = h_2, \quad (1)$$

выполненных в Риге в 1948—1955 г. (работы В. Э. Аболини, Н. А. Бразмы, Э. Я. Риекстыньша, А. С. Шлопака и референта). Рассматриваются общие свойства системы (1) (свойства матриц коэффициентов, условия возможности расщепления и т. п.); общие свойства ее решений (единственность, зависимость от данных задачи); матричный метод разделения переменных (формальная схема, обоснование в простейшем случае, системы с последействием); матричный метод расщепления, связанный с преобразованием Лапласа и систематическим применением специальных функций; метод сеток (предварительные исследования). В этих направлениях упомянутыми выше авторами опубликовано 27 работ (см., в частности, РЖМат, 1953, 309; 1954, 4022; 1955, 2217Д и 5111).

Следует отметить, что со времени обзора метод разделения переменных и метод сеток значительно продвинуты. А. Д. Мышкис

**446. Линейные дифференциальные уравнения и краевые задачи с интегральными условиями. Паньи** (Equazioni differenziali lineari e problemi al controno con condizioni integrali. Pagni Mauro), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte I, 1955, 24, 245—264 (итал.)

Общий принцип Фикера (Fichera G., см. РЖМат, 1956, 4664 К) альтернативы при линейных преобразованиях, формулируемый в работе, применяется для доказательства двух теорем. В первой рассматривается краевая задача (А):

$$dx/dt + A(t)\, x = x'(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

$$(p_s, x(a)) = 0 \quad (s = 1, \ldots, \lambda;\ 0 \leqslant \lambda \leqslant n),$$

$$(q_r, x(b)) = 0 \quad (r = 1, \ldots, \mu;\ 0 \leqslant \mu \leqslant n),$$

$$\int_a^b (x, \alpha_j)\, dt = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

($x(t)$ — искомый $n$-мерный вектор; матрица $A(t)$ и векторы $x'(t)$, $\alpha_j(t)$ непрерывны; каждая из систем векторов $\{p_s\}$, $\{q_r\}$, $\{\alpha_j(t)\}$ линейно независимая). Построим линейно независимые системы векторов $\{P(\sigma)\}$ $(\sigma = 1, \ldots, n - \lambda)$, $\{Q_\rho\}$ $(\rho = 1, \ldots, n - \mu)$, $\{\alpha_j^*(t)\}$ $(j = 1, \ldots, m)$, для которых $(p_s, P_\sigma) \equiv 0$, $(q_r, Q_\rho) \equiv 0$;

$$\int_a^b (\alpha_i(t), \alpha_j^*(t))\, dt = \delta_{ij}.$$

Тогда краевая задача $(A^*)$:

$$-dy/dt + A^* y + \sum_{j=i}^{m} \alpha_j \int_a^b (-dy/d\tau + A^*(\tau)\, y(\tau) \times \alpha_j^*(\tau))\, d\tau = 0,$$

$$(P_\sigma, y(a)) = 0 \ (\sigma = 1, \ldots, n - \lambda), \ (Q_\rho, y(b)) = 0; \quad (\rho = 1, \ldots, n - \mu).$$

($A^*$ — матрица, транспонированная к $A$) сопряжена к задаче (А) в следующем смысле: задача (А) имеет решение в том и только в том случае, если для любого решения $y$ задачи $(A^*)$ будет

$$\int_a^b (x'(t), y(t))\, dt = 0.$$

Во второй теореме рассматриваются операторы

$$E(u) = \sum a_{s_1 \ldots s_r}(x)\, \partial^k u/\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_s^{s_r},$$

$$E^*(v) = \sum (-1)^k \partial^k (a_{s_1 \ldots s_r}(x)\, v)/\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_r^{s_r}$$

$$(s_1 + \ldots + s_r = k \leqslant n)$$

в $r$-мерной ограниченной области $A$; предполагаются, что функции $a_{s_1 \ldots s_r}$ в $\bar{A}$ класса гладкости $k$ (т. е. имеют в $A$ все производные порядка $k$, непрерывные вплоть до границы $FA = \bar{A} - A$), и функции $u$ и $v$ класса $n$ в $A$, класса $n - 1$ в $\bar{A}$, а $E(u)$ и $E^*(v)$ сум-

мируемы в $A$. Пусть на $FA$ заданы линейно независимые линейные комбинации $L_1(u), \ldots, L_\nu(u)$ $(\nu \geqslant 0)$ (соответственно $L_1^*(v), \ldots, L_\mu^*(v)$ $(\mu \geqslant 0)$) с непрерывными коэффициентами функции $u(v)$ и ее производных до порядка $n-1$ включительно. Пусть далее краевая задача $E^*(v)=0$ в $A$, $L_i^*(v)=0$ $(i=1, \ldots, \mu)$ на $FA$ сопряжена к краевой задаче $E(u)=u'$ в $A$, $L_h(u)=0$ $(h=1, \ldots, \nu)$ на $FA$ (заданная функция $u'(x)$ непрерывна и суммируема в $A$) в указанном выше смысле, причем из соотношений $L_h(u)=0$, $L_i^*(v)=0$ вытекает, что $\int_A vE(u)\,dx = \int_A uE^*(v)\,dx$. Пусть, наконец, в $A$ задана система линейно независимых непрерывных суммируемых функций $\alpha_k(x)$ $(k=1, \ldots, m)$. Тогда краевая задача

$$E^*(v) - \sum_{k=1}^{m}\left(\int_A E^*(v)\,\alpha_k^*\,dx\right)\alpha_k(x) = 0,$$

$$L_i^*(v) = 0 \quad (i=1, \ldots, \mu)$$

(где функции $\alpha_k^*(x)$ того же типа гладкости, что и $u$ и удовлетворяют соотношениям $L_h(\alpha_k^*)=0$; $\int_A \alpha_i\alpha_j^*\,dx = \delta_{ij}$) сопряжена к задаче

$$E(u)=u', \quad L_h(u)=0 \quad (h=1, \ldots, \nu),$$

$$\int_A u\alpha_k\,dx = 0 \quad (k=1, \ldots, m).$$

А. Д. Мышкис

**447. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными. Петровский И. Г., Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 24

**448. Обобщение формул Герглотца — Петровского и диффузия волн. Боровиков В. А.,** Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 4, 587—590

Дается простой вывод известных формул Герглотца—Петровского для решения задачи Коши, а также распространение этих формул на случай, когда порядок уравнения меньше размерности пространства (в этом случае ядро решения есть обобщенная функция).

Дается также элементарное доказательство теоремы, что в пространстве нечетного числа измерений $p$ при условии ограниченности поверхности $\Delta(1, \xi_i)=0$ (рассматриваемое уравнение имеет вид $\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u=0$) необходимым и достаточным условием отсутствия диффузии волн является выполнение неравенства $n < p+1$ ($n$ — порядок уравнения, $p$ — число пространственных переменных).

Без доказательства формулируется следующая теорема о лакунах: если полином $\Delta(1, \xi_i)$ неприводим и характеристический конус не имеет самопересечений, то, кроме внешности характеристического конуса и (если поверхность $\Delta(1, \xi_i)=0$ ограничена) окрестности нуля при нечетном $p$ и $n < p+1$, лакун не существует. З. Я. Шапиро

**449. Замечание к теореме о полноте, связанной со смешанной задачей для линейного эллиптического уравнения. Маджинес** (Osservazioni su alcuni teoremi di completezza connessi con i problemi misti per le equazioni lineari ellittiche. Magenes Enrico), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 452—459 (итал.)

Пусть $E$ — линейный эллиптический дифференциальный оператор с достаточно гладкими коэффициентами, заданный в области $A$ $m$-мерного пространства. Пусть $\mathfrak{D} \subset A$ и $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{F}}_1 + \mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}$ где $\mathfrak{F}$ предполагается достаточно гладкой, а $\overline{\mathfrak{F}}_1$ — ее замкнутая (в теоретико-множественном смысле) часть. Функция $w$ удовлетворяет уравнению $Ew=0$ в $\mathfrak{D}$, условию $\partial w/\partial\nu = 0$ на $\mathfrak{F}_2$ и принадлежит классу $C_1$ в $\overline{\mathfrak{D}}$. Изучается вопрос о полноте в $C$ и $L^2$ значений $w$ на $\overline{\mathfrak{F}}_1$. Рассмотрения ведутся с помощью функции Неймана. А. А. Дезин

**450. Граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными. Шварц** (Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques. Schwartz Laurent), 2me colloq. équations aux dérivées partielles, CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 13—24 (франц.)

Пусть $\Omega$ — область $R^n$. $\mathscr{D}$ — пространство финитных функций в $\Omega$, $\mathscr{D}'$ — сопряженное пространство, $V$ — гильбертово пространство $\mathscr{D} \subset V \subset \mathscr{D}'$. Рассматривается линейная форма $((u, v))$, непрерывная на $V \times V$ и соотношением $((u, \varphi)) = \langle Du, \overline{\varphi}\rangle$; $\varphi \in \mathscr{D}$, $Du \in \mathscr{D}'$ определяется оператор $D$. $D$ эллиптичен, если

$$(((u, v)) + \overline{((u, v))})/2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2; \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Пусть $E$ — локально выпуклое векторное топологическое пространство, $V \subset E \subset \mathscr{D}'$, $E'$ — сопряженное пространство, $E' \subset \mathscr{D}'$ и $\mathscr{D}$ плотно в $E$. $H$ — пространство функций $u \in V$ таких, что $Du \in E'$, а $N$ — подпространство $H$, содержащее все $u$, для которых

$$\langle Du, \overline{v}\rangle = ((u, v))$$

при любой $v \in V$ (Здесь $\langle Du, \overline{v}\rangle$ — соотношение сопряженности между $E$ и $E'$). Граничная задача состоит в отыскании $u \in N$, удовлетворяющей соотношению

$$Du = f, \quad f \in E', \tag{1}$$

и определяется выбором формы $((u, v))$. При соответствующем соотношении между топологиями введенных пространств доказывается теорема: эллиптический оператор определяет изоморфиз $N$ на $E'$. Тогда решение задачи (1) дается оператором Грина: $Gf = u$. Рассматриваются примеры, где $D = -\Delta + a$, а $\Omega \subset R^n$ или является частью бесконечно дифференцируемого многообразия. А. А. Дезин

**451. Граничные задачи смешанного типа. Лион** (Problèmes aux limites de type mixte. Lions Jacques-Louis), 2me colloq. équations aux dérivée partielles, CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 25—36 (франц.)

Сохраним определение и обозначения предыдущего реферата (реф. 450). Пространства $E, E'$ и $N$ предполагаются банаховыми. Пусть $\mathscr{D}'_+(t, N)$, $\mathscr{D}'_-(t, N)$ — пространства обобщенных функций от $t$, с несущими множествами, ограниченными слева и значениями в $N$ и $E'$ соответственно. В $\mathscr{D}'_+(t, N)$ естественным образом определен оператор $D$. Рассматривается задача: найти $u \in \mathscr{D}'_+(t, N)$, удовлетворяющую уравнению

$$Du + a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = T, \tag{1}$$

где $a, b, c$ — постоянные, и $T \in \mathscr{D}'_+(t, E')$ задано. Если $D$ — эрмитов оператор и

$$((u, u)) + \alpha\langle u, \overline{u}\rangle \geqslant c_1\|u\|_\nu^2; \quad \alpha > 0, \ c_1 > 0,$$

то оператор левой части (1) определяет изоморфизм из $\mathscr{D}'_+(t, N)$ на $\mathscr{D}'_+(t, E')$. Тогда решение задачи (1) дается оператором Грина, зависящим от времени. Доказательство использует преобразование Лапласа.

Аналогичные рассмотрения справедливы для оператора 1-го порядка по $t$, при условии, что $D$ эллиптичен. В предположении $E = E' = L^2$ рассматриваются дифференциальные свойства решения по $t$. А. А. Дезин

**452. О задаче Коши для уравнения Лапласа. Лаврентьев М. М.,** Докл. АН СССР, 1955, 102, № 2, 205—206

Рассматривается последовательность гармонических в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$ функций $u_n(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

1) $u_n(x, 0) = 0$; $u_n(k\pi, y) = 0$; $u_n(x + 2k\pi, y) = u_n(x, y)$; $u_n(-x, y) = u_n(x, y)$;

2) $\partial u_n(x, 0)/\partial y = \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x) - \varphi(x) = \alpha_n \to 0$

при $n \to \infty$, $\varphi(x) = \partial u(x, 0)/\partial y$, а $u(x, 0)$ — гармоническая в той же полосе функция, $|u| < M = \text{const}$. Показывается, что последовательность функций $w_n$, удовлетворяющих условиям 1), 2) и уравнению

$$(-1)^m \varepsilon_n \partial^{2m} w_n/\partial x^{2m} = \partial^2 w_n/\partial x^2 + \partial^2 \omega_n/\partial y^2, \qquad (1)$$

сходится к $u(x, y)$ равномерно в любой полосе $0 \leqslant y \leqslant y_1 < 1$, если $\varepsilon_n$ выбраны специальным образом. Именно

$$\varepsilon_n = [\beta^{2m-2} m \ln^{2m-2}(cM/\alpha_n)]^{-1}, \quad 0 < \beta \leqslant 1,$$

и $\varepsilon_n^{-1/(2m-2)}$ — $^1/_2$ — целое число. Для доказательства $u_n$ разлагается в ряд по $\sin kx \operatorname{sh} ky$, а $w_n$ — в ряд по $\sin kx \operatorname{sh} \xi_{kn} y$, $\xi_{kn} = k\sqrt{1 - \varepsilon_n k^{2n-2}}$.

Имеются опечатки: в левой части уравнения (1) стоит $-\varepsilon_n \partial^{2m} w_n/\partial x^{2m}$. Н. Д. Введенская

**453. Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. Ладыженская О. А.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 23—29

Рассматривается эллиптический оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x) \cdot u$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \ \alpha = \text{const} > 0\right).$$

Внутри области $\Omega$, ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью $S$, ищется решение краевой задачи $Lu = f$; $u|_S = 0$. Относительно данных предполагается следующее: $a_{ij}$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и имеют ограниченные обобщенные производные первого порядка, $a_i$ и $a$ ограничены и измеримы. Кроме того, $a(x) \geqslant a_0$, где $a_0$ определяется коэффициентами уравнения и видом области $\Omega$. При этих условиях доказывается, что при любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u$ поставленной задачи, которое принадлежит $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$ и выполняется неравенство $\| u \|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqslant C_1 \| f \|_{L_2(\Omega)}$, где $C_1$ — постоянная, не зависящая от $u$ и $f$.

Этот результат был получен ранее автором (Ладыженская О. А., Докл. АН СССР, 1951, 79, № 5) при более тяжелых ограничениях на данные задачи с использованием соответствующих теорем Жиро.

Доказательство в настоящей работе ведется методом продолжения по параметру. Используя идею Шаудэра, параметр вводится следующим образом $L_\tau = \Delta + \tau(L - \Delta)$. Доказывается априорная оценка $\| v \|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqslant C_2 \| L_\tau v \|_{L_2(\Omega)}$, где $C_2$ — постоянная, не зависящая от $\tau$ и $v$; отсюда немедленно следует доказываемое утверждение.

Далее изучается спектр задачи и доказывается, что уравнение $Lu - \lambda u = 0$ имеет в $\overset{+0}{W}{}_2^{(2)}$ (комплексное пространство) для счетного множества $\lambda_k$, отличные от нуля решения. Эти $\lambda_k$ образуют спектр задачи, причем $\lim_{k \to \infty} |\lambda_k| = \infty$. Наконец, уравнения $Lu - \lambda u = f$ и $L^* u - \bar{\lambda} u = \varphi$ при однородном граничном условии образуют фредгольмову пару, если $f$ и $\varphi \in {}^+L_2(\Omega)$.

Если предположить, что правая часть оператора $L$ $f \in \overset{0}{W}{}_2^{(k-2)}(\Omega)$, то при соответствующих ограничениях на коэффициенты и границу области решение будет принадлежать $W_2^{(k)}(\Omega)$.

В заключение отмечается, что аналогичные результаты имеют место для сильно эллиптических и сильно параболических систем. Могут быть рассмотрены и некоторые другие граничные условия. А. И. Кошелев

**454. О фундаментальном решении одного класса уравнений в частных производных эллиптического типа второго порядка. Ночилла** (Sulla soluzione fondamentale di una classe di equazioni alle derivate parziali di second'ordine e di tipo ellittico. Nocilla Silvio), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 211—224 (итал.)

В работе построено фундаментальное решение для уравнения $\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) = 0$, рассматриваемого в плоскости $(x, y)$, где $\rho$ — заданная аналитическая функция координат $x$ и $y$, зависящая лишь от расстояния $r$ точки $(x, y)$ до начала координат. Автор пользуется методом Хольмгрена (Holmgren, Math. Ann., 1904, 58). В конце работы рассмотрен частный случай $\rho = \exp(cr^2)$, где $c$ — постоянная. Для этого случая получено некоторое приближенное представление фундаментального решения.

Примечание референта. В статье Я. Б. Лопатинского (Тр. Н.-и. ин-та матем. и физики (Баку,) 1949, 1) доказано существование фундаментального решения для уравнения $\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) = 0$ при более общих предположениях о функции $\rho$. Д. М. Эйдус

**455. О задаче Неймана для уравнения эллиптического типа. Виноградов В. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 115

**456. О задаче Коши для уравнения Лапласа. Лаврентьев М. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 118

**457. Обобщенная задача Дирихле и теория потенциала. Маджонес** (Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale. Magenes Enrico), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte I, 1955, 24, 220—229 (итал.)

Рассматривается связь между двумя обобщениями решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области $T$, ограниченной дважды гладкой поверхностью $F$. Эванс и Майлс (Evans G. C., Miles E. R. C., Amer. J. Math., 1931, 53, 493—516), рассматривая суммируемую граничную функцию $\mu$, применяли потенциал двойного слоя с суммируемой плотностью. С другой стороны, если $\mu$ принадлежит $L^p(F)$ $(p > 1)$, то иным методом Чиммино (Cimmino G., Rend. Circolo mat. Palermo, 1937, 61, 177—221) доказал существование и единственность решения, принимающего граничное значение в среднем порядка $p$. Здесь показано, что если пользоваться потенциалами двойного слоя с плотностью, принадлежащей $L^p(F)$, то решение по Эвансу и Майлсу совпадает с решением по Чиммино. Доказательство основано на аппроксимации в среднем порядка $p$ за-

данного граничного условия непрерывными. Автор указывает (без доказательства), что аналогичные утверждения справедливы для уравнения Пуассона, линейного эллиптического уравнения 2-го порядка общего вида, системы уравнений равновесия упругого тела, для уравнения теплопроводности и для смешанной задачи (в которой на части границы задается производная от искомой функции по конормали). По этим обобщениям указана литература. А. Д. Мышкис

**458. Уравнения смешанного типа. Бицадзе А. В.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 9

**459. О потенциалах простого и двойного слоя на сфере. Цеули** (Sui potenziali di un semplice strato e di un doppio strato sferico. Zeuli Tino), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 113—120 (итал.)

Пусть $V_i(\rho, \theta, \varphi)$ и $U_i(\rho, \theta, \varphi)$ суть значения внутри сферы радиуса $R$ потенциалов простого и двойного слоев с плотностью $\mu$ на сфере. $F_i(\rho, \theta, \varphi)$ — гармоническая внутри сферы функция, равная $\mu$ на сфере. Получены формулы

$$V_i(\rho, \theta, \varphi) = \frac{2\pi R}{\sqrt{\rho}} \int_0^\rho F_i(t, \theta, \varphi) \frac{dt}{\sqrt{t}}; \quad (1)$$

$$U_i(\rho, \theta, \varphi) = -\frac{\pi}{\sqrt{\rho}} \int_0^\rho F_i(t, \theta, \varphi) \frac{dt}{\sqrt{t}} - 2\pi F_i(\rho, \theta, \varphi),$$

выражающие $V_i$ и $U_i$ через $F_i$. Отмечается, что (1) получена Боджио (Boggio T. Rend. Circolo mat. Palermo, 1906, 12). Аналогичные формулы получены для значений потенциалов вне сферы. Х. Л. Смолицкий

**460. Оценка производных функций Ф. Неймана. Смолицкий Х. Л.,** Докл. АН СССР, 1956, 106, № 5, 785—787

Пусть $G(x, y)$ — функция Грина задачи Неймана (или смешанной задачи) в случае уравнения Лапласа, построенная для трехмерной конечной области $\Omega$. При некоторых предположениях о границе области доказываются неравенства

$$|G(x, y)| < C_0/r, \; |c^m G(x, y)/\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}| < C_m/r^{m+1}$$

где $r$ — расстояние между точками $x$ и $y$ области $\Omega$, $x_1, x_2, x_3$ — координаты точки $x$, $C_m$ — постоянная, зависящая лишь от $\Omega$ и $m$.

Примечание референта. Попытка доказательства этих неравенств была сделана в работе Леви (Levy P., Acta math., 1919, 42), однако приведенное там рассуждение ошибочно. Д. М. Эйдус

**461. Задача Дирихле для линейного уравнения в частных производных эллиптического типа. Гординг** (Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Gårding Lars), Medd. Lunds univ. mat. semin., 1954, 12, Repr.: Math. scand., 1953, 1, 55—72 (англ.) (см. РЖМат, 1954, 2958)

**462. О единственности задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина. Ван Гуан-инь** (關於查普里根方程的特里谷米問題解案的唯一性. 王光寅), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 5, № 4, 455—461 (кит.; рез. франц.)

Пусть $y_0 (y_0 < 0)$ есть наибольший нуль (нечетного порядка) функции $F = 2(K/K')' + 1$. Тогда для каждой прямой $l$, параллельной оси $y$, всегда можно найти $\varepsilon > 0$, зависящее от расстояния точки $A$ до $l$, такое, что единственно решение задачи Трикоми:

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0; \; K(0) = 0; \; K'(y) > 0. \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_2} = f(s), \; u|_\sigma = g(s),$$

где $\Gamma_1$ — характеристика (1) в гиперболической области, идущая из $A(x_0, 0)$ в $C\left(\frac{x_0 - \bar{x}_0}{2}, \; y_0 - \varepsilon\right)$, $\Gamma_2$ — другая характеристика, проходящая через $C$ и $B(\bar{x}_0, 0)$ $\sigma$ — кривая Жордана, лежащая в эллиптической области левее $l$.

Изучается случай, когда $F$ имеет конечное число действительных нулей (или, в более общем случае, когда множество нулей не ограничено сверху). Доказано, что в этом случае между двумя первыми нулями $F$ функция $K$ имеет особенность. Резюме автора

**463. К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве. Пулькин С. П.,** Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 14, 63—77

Рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} = 0, \quad (1)$$

где каждый из коэффициентов $a, b, c$ есть или единица или функция, совпадающая с одной из переменных $x, y, z$. Для шести из тринадцати существенно различных уравнений вида (1) исследуются формы характеристических поверхностей в тех частях пространства, где эти уравнения имеют гиперболический тип. Для уравнений, у которых область эллиптичности (гиперболичности) совпадает с полупространством $z > 0$ ($z < 0$), автор считает «естественной» постановку следующей краевой задачи.

В части пространства, ограниченной в полупространстве $z > 0$ произвольной поверхностью $\Sigma$, опирающейся в плоскости $z = 0$ на замкнутую кривую $\Gamma$, и в полупространстве $z < 0$ характеристической поверхностью $F$, проходящей через $\Gamma$ и симметричной относительно некоторой прямой, параллельной оси $Oz$, — найти решение уравнения (1) по заданным значениям решения на $\Sigma$ и на части $F$, лежащей по одну сторону плоскости, проходящей через ось симметрии $F$. Для уравнения $zu_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ в области, ограниченной в полупространстве $z > 0$ поверхностью, опирающейся на прямоугольник $\Gamma$ с вершинами в точках $(0, 0, 0)$; $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(a, b, 0)$, и в полупространстве $z < 0$ — характеристическими поверхностями: $F: x = 2(-z)^{3/2}/3$; $F_1: x = -2(-z)^{3/2}/3 + a$ и плоскостями $y = 0$; $y = b$, — ставится задача: найти решение, принимающее заданные значения на $\Sigma$ и $F$. Исследование единственности и существования решения этих краевых задач отсутствует. Есть опечатки. И. Л. Кароль

**464. О некорректно поставленных задачах Коши. Пуччи** (Sui problemi di Cauchy non «ben posti». Pucci Carlo), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 5, 473—477 (итал.)

Пусть функция $u(x, y)$ гармонична в области $D$, содержащей отрезок $l: 0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$; расстояние $l$ от границы $D$ равно $h$. Пусть даны числа $E_n = o(e^{-8nh})$, $\alpha_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$ $(i = 0, \ldots, 4n; \; n = 1, 2, \ldots)$, для которых $|u(i/4n, 0) - \alpha_i^{(n)}| \leqslant E_n$, $|u_y(i/4n, 0) - \beta_i^{(n)}| \leqslant E_n$. По числам $\alpha_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$ (приближенным значениям $u$ и $u_y$) явно строятся некоторые (негармонические) функции $u_n(x, y)$, равномерно сходящиеся к $u(x, y)$ в каждом прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|y| \leqslant h'$ $(0 < h' < h)$; при этом $|u - u_n| \leqslant Mh^2/2n(h - h')^3 + E_n e^{8nh'}$ $(n > h/2 - 2)$. По $\alpha_i^{(n)}$ и $\beta_i^{(n)}$ строятся также функции, аппроксимирующие производные от $u$ любого порядка. Таким образом, приближенное знание $u$ и $u_y$ на $l$ позволяет восстановить функцию $u$ с любой степенью точности. Автор указывает, что этот метод переносится

на решения параболических и эллиптических уравнений более общего вида (РЖМат, 1955, 1224).

А. Д. Мышкис

**465. О методе Перрона для квазилинейной гиперболической системы уравнений с частными производными по двум независимым переменным. Нагумо, Анасако** (On Perron's method for the semi-linear hyperbolic system of partial differential equations in two independent variables. Nagumo Mitio, Anasako Yuki'o), Osaka Math. J., 1955, **7**, № 2, 179—184 (англ.)

Рассматривается система

$$\partial_x u_i = \lambda_i(x, y)\partial_y u_i + f_i(x, y, u) \quad (i = 1, \ldots, k),$$

где $u=(u_1, \ldots, u_k)$. Методом Перрона (последовательных приближений), но при несколько более слабых, чем у последнего, предположениях относительно $\lambda_i$, $f_i$, доказывается существование и единственность решения задачи Коши. Результат не является новым.

А. А. Дезин

**466. Применение двумерного преобразования Лапласа в теории уравнений с частными производными. Дёч** (L'application de la transformation bidimensionnelle de Laplace dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Doetsch Gustav), Colloq. Centre belge rech. math. **1**, 1953, Paris, 1954, 63—78 (франц.)

Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений сводит рассматриваемую задачу к решению более простого преобразованного уравнения, для получения которого часто могут потребоваться «лишние граничные условия» (т. е. такие условия, которые не задаются при постановке задачи). Пиконе показал, что эти «лишние граничные условия» всегда могут быть исключены, если рассматриваемая задача сводится к краевой задаче для преобразованного уравнения. Применяя одномерное преобразование Лапласа к решению уравнения

$$\partial F/\partial x + p\partial F/\partial t + qF = \varphi(x, t) \quad (p, q = \text{const})$$

при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ и $\partial^2 F/\partial x^2 - \partial F/\partial t + \varphi(x, t) = 0$ при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, автор естественно приходит к целесообразности применения двойного преобразования Лапласа

$$f(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} F(x, y)\,dx\,dy = L^2\{F(x, y)\},$$

с помощью которого более просто решаются эти уравнения. При этом аналитические свойства решения преобразованного уравнения позволяют исключить вводимые ранее лишние условия. Утверждается, что предлагаемый метод годен для решения любых уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами гиперболического и параболического типа относительно неизвестной функции двух переменных. Наконец, рассматривается уравнение потенциала, анализ которого показывает, что уравнения эллиптического типа неподходящи для решения предлагаемым способом. В заключение указывается на возможность применения двойного преобразования Лапласа в случае систем уравнений с частными производными, а также в случае уравнений с тремя или более переменными.

В. А. Диткин

**467. Теорема единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа. Де-Джорджи** (Un teorema di unicitá per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali lineari a derivate parziali di tipo parabolico. De Giorgi Ennio), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 371—377 (итал.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{[\alpha(m-h)]} c_{hk}(x, t) \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^k \partial t^h}, \qquad (1)$$

$\alpha < 1$, функции $c_{hk}(x, t)$ непрерывны в прямоугольнике $R\{a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$, бесконечно дифференцируемы по $x$ и существует положительная постоянная $\rho$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho^n}{n!} \left| \frac{\partial^n c_{hk}}{\partial x^n} \right|^\alpha = 0;\ h = 0, \ldots, m-1;$$

$$k = 0, \ldots, \alpha(m-h)$$

равномерно в $R$.

Рассматривается решение $u(x, t)$, имеющее непрерывные производные всех порядков, входящих в (1) в прямоугольнике $R$, удовлетворяющее условиям $\left.\frac{\partial^h u}{\partial t^h}\right|_{t=t_1} = 0;\ h = 0, 1, \ldots, m-1;\ a_1 \leqslant x \leqslant a_2$. Доказывается, что $u(x, t) = 0$ в $R$.

Доказательство основано на простых леммах о свойствах семейств бесконечно дифференцируемых функций и специальных рядов по этим функциям.

С. Д. Эйдельман

**468. Разложение по собственным функциям колебания мембраны. Минакшисундарам** (Expansion in eigenfunctions of the membrane problem. Minakshisundaram S.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 317—323 (англ.)

Автор рассматривает некоторые вопросы сходимости ряда Фурье

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \omega_n(x, y), \qquad (1)$$

где $a_n$ — коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ относительно собственных функций $\omega_n(x, y)$ уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при нулевых граничных условиях.

Обозначим через $\lambda_n$ собственные значения, соответствующие функциям $\omega_n(x, y)$.

Будем говорить, что:

1) ряд (1) $D_\lambda$-суммируем, если ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n t}$ сходится для любого $t > 0$ и существует предел

$$\lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n t};$$

2) ряд (1) $(R_{\lambda k})$-суммируем $(k > 0)$, если существует предел $\lim R_{\lambda_k}$, где $R_{\lambda_k} = \sum_{\lambda_n < \omega} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\omega}\right)^k a_n$.

3) функция $f(x, y)$ $R_p$-ограничена в точке $(x, y)$, если существует предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{p}{\pi r^{2p}} \iint_{\rho \leqslant r} (r^2 - \rho^2)^{p-1} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2.$$

Приведем несколько теорем.

Теорема 1. Ряд (1) $D_\lambda$-суммируем для интегрируемой функции $f(x, y)$ во всех ее точках непрерывности.

Теорема 2. Во всех внутренних точках области, в которых $f(x, y)$ $R_p$-ограничена $(p \geqslant 0)$, ряд (1) $(R_{\lambda k})$-суммируем, $k$-max $(1, p + 1/2)$, и наоборот в точках, где ряд (1) $(R_{\lambda k})$-суммируем, $k \geqslant 0$, функция $f(x, y)$ $R_p$-ограничена, $p > k + 1/2$.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием того, что ряд (1) был бы рядом Фурье функции $f(x, y) \in L_p$, $p \geqslant 2$, является

$$\| R_k(\omega) \|_{L_p} = o(1).$$

С. А. Терсенов

**469. Асимптотические нижние грани фундаментальных частот выпуклой мембраны. Форсайт** (Asymptotic lower bounds for the fundamental frequency of convex membranes. Forsythe George E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 1, 691—702 (англ.)

Пусть однородная упругая мембрана занимает односвязную область $R$ с границей $C$. Пусть $u$ является собственной функцией, $\lambda$ — собственным значением установившихся колебаний мембраны

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } R,$$
$$u = 0 \text{ на } C.$$

Методом конечноразностных уравнений автор получает следующий результат: 1) если $C$ состоит из конечного числа аналитических кривых и внутренний угол в угловых точках не больше $\pi$, то имеет место

$$\lambda_h / \lambda \leqslant 1 - ah^2 + o(h^2) \quad (h \to 0),$$

где $\lambda_h$ — собственное значение соответствующего конечноразностного оператора над сеткой с шагом не больше $h$,

$$a = a(R) = \frac{\iint_R (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\, dxdy + \int_C u_n^2 \sin^2 2\tau d\tau}{12 \iint_R (u_x^2 + u_y^2)\, dxdy},$$

$\tau$ — угол между касательной к $C$ и осью $x$-ов; 2) если, кроме того, область $D$ выпуклая, то $a > 0$ и существует такое $h_0 > 0$, что $\lambda_h < \lambda$ для всех $h < h_0$, что $\lambda_h \to \lambda$, когда $h \to 0$. С. А. Терсенов

**470. О характеристических частотах симметрической мембраны. Пойа** (On the characteristic frequencies of a symmetric membrane. Pólya G.), Math. Z., 1955, 63, № 3, 331—337 (англ.)

Пусть $D$ — плоская односвязная область с достаточно гладкой границей $C$ и пусть $\lambda_n$ и $\mu_n$ — характеристические значения уравнения $\Delta u + \nu^2 u = 0$ в $D$, соответствующие граничным условиям $u = 0$, $\partial u / \partial n = 0$ на $C$.

Будем говорить, что область $D$ обладает симметрией порядка $n$, если она совпадает сама с собой при вращении ее на угол $2\pi/n$ вокруг некоторого центра. Пусть $\dot{r}$ есть максимум внутренних конформных радиусов области $D$.

Основной результат автора заключается в следующем: существуют две возрастающие функции $l(n)$ и $m(n)$ целого положительного $n$ со следующими свойствами: если область $D$ выпуклая и обладает симметрией порядка не меньше $2n+1$, но не является кругом, то каждое из $l(n) + m(n) - 1$ величин $\lambda_1 \dot{r}$, $\lambda_2 \dot{r}$, ..., $\lambda_{l(n)} \dot{r}$, $\mu_2 \dot{r}$, ..., $\mu_{m(n)} \dot{r}$ для области $D$ будут меньше соответствующих величин для круга, причем $l(n)$ и $m(n)$ удовлетворяют условию

$$l(n+1) - l(n) \geqslant 2, \quad m(n+1) - m(n) \geqslant 2.$$

С. А. Терсенов

**471. Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными. Ладыженская О. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 13—16

**472. Некоторые задачи теории нелинейных уравнений с частными производными и уравнения с малым параметром при старших производных. Олейник О. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 21

**473. Некоторые функциональные методы в теории уравнений с частными производными. Соболев С. Л., Вишик М. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 24

**474. О разложении по собственным функциям. Ильин В. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 117—118

**475. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях и частных производных. Березанский Ю. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 36—37

**476. Об интегрировании внешних дифференциальных форм. Миранда** (Sull'integrazione delle forme differenziali esterne. Miranda Carlo), Ricerche mat., 1953, 2, № 2, 151—182 (итал.)

Рассматриваются внешние дифференциальные формы в области $T$ $n$-мерного ($n \geqslant 3$) евклидова пространства; на границу $T$ налагаются ограничения, обычные для теории потенциала.

Внешняя дифференциальная форма $U_p$ относится к классу $C_k$ (или $C_k^{(\alpha)}$), если ее коэффициенты с их частными производными до порядка $k$ непрерывны (или, кроме того, удовлетворяют условиям Гёльдера с показателем $\alpha$). Форма $U_{p-1}$ класса $C_0$ называется интегрируемой в $T$, если существует форма $U_{p-2}$ класса $C_1$ такая, что $dU_{p-2} = U_{p-1}$. Форма $U_{p-1}$ называется гомологичной нулю, если на любом цикле $c_{p-1}$, принадлежащем $T$, $\int_{c_{p-1}} U_{p-1} = 0$. Основной результат работы — доказательство теоремы: Всякая форма $U_{p-1}$ класса $C_0^{(\alpha)}$, гомологичная нулю в $T$, интегрируема в $T$. Дается выражение соответствующей примитивной формы и приводятся дополнительные условия для выделения единственной примитивной.

Изложение связано с рассмотрением задач Дирихле и Неймана для гармонических форм; при известных условиях доказывается существование решения и указываются дополнительные условия, при которых выделяется единственное решение. При этом гармоническая форма понимается в смысле работы Ходжа (Hodge W. V. D., Proc. London Math. Soc., ser. 2, 1934, 36), отличном от других определений гармонической формы, в том числе и у Ходжа: форма $U_{p-1}$ называется гармонической, если $\Delta U_{p-1} = 0$, где $\Delta U_{p-1} = d\delta U_{p-1}$, $\delta U_{p-1} = (dU_{p-1})^*$, знак $*$ означает переход к дополнительной форме. Задача Дирихле ставится в форме: $\Delta U_{p-1} = 0$, $U_{p-1} = A_{p-1}$ на границе $T$, где $A_{p-1}$ — форма, заданная на границе $T$.

Существенную роль в рассмотрении играет топологическая структура $T$, ее границы $FT$ и дополнительной к $T$ — $FT$ области $CT$, а именно числа Бетти и фундаментальные системы $(p-1)$-мерных циклов этих областей. В. В. Рыжков

**477 К. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. Курант Р.** Пер. с англ. Б. В. Шабата. М., Изд-во ин. лит., 1953, 310 стр. 16 р. 55 к.

**478 К. Сборник задач по математической физике. Лебедев Н. П., Скальская И. П., Уфлянд Я. С.** М., Гостехиздат, 1955, 420 стр., 9 р.

**479 К. Уравнения математической физики. Тихонов, Самарский** (A matematikai fizika differenciálegyenletei. Tyihonov A. N., Szamarszkij A. A. Oroszból ford. Budapest, Akad. Kiadó, 1956, 745 l., 120 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, 3, № 3, 80 (венг.)

**480 К. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными начальными условиями.** Олейник О. А., М., Изд-во АН СССР, 1957, 20 стр., Б. ц.

**481 Д. Проекционные операторы и дифференциальные уравнения в частных производных.** Мак-Карти (Projection operators and partial differential equations. McCarthy John, Doct. diss. Princeton Univ., 1951). Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 601 (англ.)

**482 Д. Обобщенная задача Дирихле.** Сампсон (The Dirichlet problem in the large. Sampson Joseph Harold, Jr, Doct. diss., Princeton Univ., 1951), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 603 (англ.)

**483 Д. Продолжение функций и вложение классов функций. Применения к решению вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области.** Кудрявцев Л. Д. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1956

**484 Д. Граничные свойства гармонических функций в трехмерном пространстве.** Мозжерова Н. И. Автореф. дисс., канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1956

**485 Д. Некоторые вопросы теории краевых задач для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области.** Захаров В. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1956

**486 Д. О граничных задачах для линейных систем уравнений с частными производными первого порядка.** Дезин А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

**487 Д. Об аналитических решениях дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка.** Бачелис Р. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М.

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

**488. О некоторых задачах об устойчивости движения в механике.** Четаев А. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 82

Обсуждаются некоторые особенности в постановке задач об устойчивости движения для механических систем, стесненных неголономными связями.

**489. Математическое исследование связанных контуров с помощью матричного исчисления.** Ловаш-Надь, Дьёри (Csatolt rezgökörök matematikai vizsgálata a matrix-számítás segítségével. Lovass-Nagy Viktor, Györy Tibor), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), 3, № 1—2, 65—78 (венг.; рез. русс., англ.)

Ищется решение системы линейных дифференциальных уравнений, дающей математическое описание системы, состоящей из произвольного числа колебательных контуров, связанных индуктивно, емкостно и омически. Эта система описывается следующим матричным дифференциальным уравнением:

$$\mathbf{L}di/dt + \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{K}\int \mathbf{i}dt = \mathbf{u}$$

или

$$\mathbf{L}d^2\mathbf{i}/dt^2 + \mathbf{R}d\mathbf{i}/dt + \mathbf{K}\mathbf{i} = d\mathbf{u}/dt. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{L} = \|L_{ij}\|_1^n$, где $L_{ii}$ — самоиндуктивность катушки $i$-го контура, $L_{ij}$ — взаимная индуктивность между катушками $i$-го и $j$-го контуров; $\mathbf{K} = \left\| \frac{1}{C_{ij}} \right\|_1^n$, где $C_{ii}$ — емкость конденсатора $i$-го контура, а $C_{ij}$ — взаимная емкость конденсаторов $i$-го и $j$-го контуров; $\mathbf{R}$ — диагональная матрица, элементы которой $R_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются омическим сопротивлением $i$-го контура; $\mathbf{i}$ — столбец $i_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $i_k$ означает силу тока в $k$-м контуре, $\mathbf{u}$ — столбец $u_k(t)$, где $u_k$ — электродвижущая сила (включенная последовательно с сопротивлениями) $k$-го контура.

Показывается, что если матрицы $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ перестановочны и электродвижущие силы всех контуров — периодические функции времени, т. е. записываются в виде $\mathbf{u} = e^{j\omega t}\mathbf{u}_0$, то решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$, $\mathbf{i}'(0) = \mathbf{i}'_0$, дается формулой

$$\mathbf{i}(t) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\left\{(\cos \mathbf{M}^{1/2}t)(i_0 - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \mathbf{M}^{1/2}t}{\mathbf{M}^{1/2}}\left[\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(i_0 - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0) + \mathbf{i}'_0 - j\omega\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0\right]\right\} +$$

$$+ e^{j\omega}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0, \quad \text{где} \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{R}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}), \quad \mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} + \frac{1}{j\omega}\mathbf{K}.$$

В частном случае, когда матрицы $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}$ циклические, формула (2) значительно упрощается, например, в случае трех контуров она переходит в формулу

$$\mathbf{i} = e^{-\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{R}t}\mathbf{i}_0 + (\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})^{-1}(e^{j\omega t}\mathbf{u}_0 - e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\mathbf{u}_0).$$

Рассмэтриваются также отдельные частные случаи.

Из резюме авторов

**490. Общий метод решения уравнений тонких упругих оболочек.** Висарион (O metodă generală de rezolvare a invelitorilor elastice subțiri. Visarion V.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 5, 635—640 (рум.; рез. русс., франц.)

Общая система уравнений тонких упругих оболочек приводится к одному уравнению с частными производными четвертого порядка по отношению к комплексному усилию

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{M} + i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{3}{h^2}}.$$

Для этого систематически используется особая симметрия, полученная на основе статически-геометрических аналогий.

Метод эффективно прилагается к поверхностям, задаваемым с помощью координат $x$ и $y$, связанных с линиями кривизны, и таких, которые могут конформно преобразовываться в сферу. В результате получаются обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых являются рядами Фурье для $y$=const.

Резюме автора

**491. О расчете городского и сельского населения.** Георгиу, Теодореску (Observații cu privire la calculul populației urbane și rurale. Gheorghiu A., Theodorescu R.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 4, 521—526 (рум.; рез. русс., франц.)

Излагаются некоторые гипотезы о движении городского $U(t)$ и сельского $R(t)$ населения, при учете миграции из одной среды в другую и некоторых естественных показателей. Вводится функция $f(t) = U(t)/R(t)$ в качестве показателя урбанизации. Резюме автора

**492. Исследование и применение матрицы чисел влияния бигармонического оператра для решения задачи о напряжениях в бесконечной полосе.** Литвинов Н. В., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 4, 388—402

Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 8343). Изложены некоторые свойства получен-

ных чисел влияния для бигармонической задачи для бесконечно длинной полосы. На ряде примеров для бесконечно длинной полосы показывается с приведением эпюр напряжений по сечениям, как нужно практически пользоваться полученными числами влияния при инженерных расчетах. Г. Н. Савин

493. **Проблема кручениядля ⊤, |_ и ¯|_ профилей. Базилевич** (Das Torsionsproblem der, |_ und ¯|_ Träger. Basilewitsch W.), Publs Inst. math. Acad. serbe Sci., 1953, 5, 5—20 (нем.)

Задача кручения для профилей, составленных из прямоугольных областей, решается путем представления решения в отдельных областях в виде тригонометрических рядов и сшивания таких решений вдоль общих прямых. Произведены детальные расчеты, сводящиеся к решению бесконечной системы уравнений; однако ее исследование не проводится. Я. С. Уфлянд

494. **Расчет переходных процессов в длинных линиях при помощи цилиндрических функций от двух независимых переменных. Кузнецов П. И.,** Электричество, 1953, № 5, 35—40

Статья посвящена обзору работ В. Н. Кузнецова (РЖМат, 1954, 4047), П. И. Кузнецова (Math. Revs, 1948, **9**, 30, 283, 552; 1949, **10**, 90, 581) и Э. Я. Риекстыньша (РЖМат, 1953, 309), относящихся к применению цилиндрических функций от одного и двух независимых переменных для решения систем телеграфных уравнений при различных граничных и начальных условиях. В приложении 1 рассмотрены свойства цилиндрических функций от двух независимых переменных. В приложении 2 рассмотрен вопрос о представлении контурного интеграла

$$\int_{\gamma} F\left(u, \sqrt{Au^2+Bu+C}\right) \times$$

$$\times \exp\left[z_1 (au+b+\sqrt{Au^2+Bu+C})/2\right] du$$

через цилиндрические функции от одной и двух переменных. Здесь $F$ — рациональная функция своих переменных, $a$, $b$, $A$, $B$, $C$ — постоянные, $z_1$ — параметр, $\gamma$ — замкнутый контур, содержащий все особые точки подинтегральной функции и не уходящий в бесконечность. В. А. Судаков

495. **Теория сопротивления судов при ходе на волнении. Хаскинд М. Д.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 159

Исследуется общая формула для среднего сопротивления судов при ходе на волнении ($\overline{R}^*$), выведенная автором в 1947 г. (Тр. ЦАГИ, 1947, № 603). Показано, что некоторые физические предпосылки приводят к значительному упрощению вычислений $\overline{R}^*$, в особенности ее боковой составляющей.

496. **Исследование осесимметричной волны в слоистой упругой среде методом функционально-инвариантных решений. Зволинский Н. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 161

Показывается, что метод функционально-инвариантных решений в применении к задаче с осевой симметрией позволяет развить некоторый приближенный прием, при помощи которого волновое поле может быть изучено в окрестности фронтов различных волн, наблюдаемых в этом поле. Приближенный прием демонстрирует на примере задачи отражения и преломления волн на границе двух различных упругих полупространств, граничащих вдоль плоскости. Падающая волна вызвана точечным источником, действующим непродолжительное время.

497. **Эволюция проблемы моментов и задача о колебаниях струны. Крейн М. Г.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 40

498. **Об изгибе круглых пластинок со смешанными краевыми условиями. Шерман Д. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 159-160

Рассматриваются два случая: а) контур пластинки частично защемлен и частично оперт; б) контур пластинки частично оперт и частично свободен.

В обоих случаях задача сводится к сингулярному интегральному уравнению и затем к вполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

499. **Электромагнитные методы изучения слоистой среды. Тихонов А. Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 97

500. **О работах по распространению нестационарных волн (звуковых, сейсмических и т. п.), выполненных за 1950—1955 гг. Петрашень Г. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 92—93

501. **Проблемы прогноза погоды. Кибель И. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 78—79

502. **Методы решения нелинейных вихревых задач аэродинамики отрывных течений. Никольский А. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 158

Дается математическая постановка нелинейных задач аэрогидродинамики, к которым приводит теоретическое исследование проблемы обтекания крыла малого удлинения при больших углах атаки со срывом потока с передней и боковой кромок, проблема обтекания плохо обтекаемых тел с наличием отрывов потока и вихреобразований; приводятся приближенные решения ряда простейших задач.

503 К. **Некоторые задачи нелинейной теории устойчивости оболочек.** Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н. № 10. Казань, Тат. книгоиздат, 1956, 100 стр., 4 р. 65 к.

504 К. **Методы математической физики. Джеффрис, Джеффрис** (Methods of mathematical physics. Jeffreys Sir Harold, Jeffreys Lady Bertha Swirles), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 322, 7 (англ.)

505 Д. **О решении линейных дифференциальных уравнений теплопроводности в интегральной форме. Алексеева О. П.,** Автореф. дисс. канд. техн. н., Энерг. ин-т АН СССР, М.—Л., 1956

**См. также**: 202, 203, 295, 317, 390 К, 509, 579, 638, 649, 652, 658, 664, 665, 881, 882, 888, 932Д

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

506. **Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала. Иванов В. К.,** Тр. 3-го сес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 116—117

507. **Об одном семействе интегральных уравнений. Карапиколов** (Върху една класа интегрални уравнения. Карапиколов Хр.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954 (1955); **1**, ч. 2, 121—127 (болг.; рез. русс., франц.)

Рассматривается уравнение

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Предполагается, что

$$f(t) = f_1(t) \prod_{i-1}^{k} (t - t_i)^{-\lambda_i},$$

$$F(t, z) = F_1(t, z) \prod_{j-1}^{m} (t - \tau_j)^{-\mu_j} \prod_{i-1}^{n} (z - z_j)^{-\nu_j}.$$

$|F(t, \mathrm{Re}^{i\theta})| = O(R^p)$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $p$ — действительное число. Здесь $\lambda_i$, $\mu_i$, $\nu_i$ — целые неотрицательные числа, $t_i$, $\tau_i$, $z_i$ — точки верхней полуплоскости, $f_1(t)$ — функция, голоморфная при $\mathrm{Im}\, t \geqslant 0$; $F_1(t, z)$ голоморфна по $z$, $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ при фиксированном $t$, $\mathrm{Im}\, t \geqslant 0$, и наоборот. Решение ищется в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \prod_{j=1}^{m} (t - \tau_j)^{-\mu_j} \prod_{i=1}^{k} (t - t_i)^{-\lambda_i}.$$

По теореме вычетов отыскание функции $\varphi_1(t)$ сводится к решению некоторой линейной алгебраической системы.
С. Г. Михлин

**508. Решение одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. Скоробогатько В. Г.,** Тр. Среднеаз. ун-та, 1956, вып. 66, 69—83

Решается линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} K_i(x, t)\, u^{(i)}(t)\, dt \qquad (1)$$

методом, ранее применяемым автором (РЖМат, 1956, 2276). Здесь функция $f(x)$ и ядра $K_i(x, t)$ имеют непрерывные производные по $x$ до $m$-го порядка включительно для $0 \leqslant x, t \leqslant 1$. Находится вид решения в случае несобственных значений $\lambda$ и исследуется случай собственного значения $\lambda$.

Примечание референта. Решение уравнения (1) получено референтом путем сведения его к интегральному (Сб. науч. работ. Минский пед. ин-т, 1952, 154—166).
Ю. К. Ландо

**509. О решении граничной задачи с помощью интегральных уравнений. Иноуэ** (積分方程式による境界値問題の解法について. 井上正雄), 數學, Сугаку, 1 954, 6, № 3, 161—162 (япон.)

Рассматриваются задачи о существовании решений интегральных уравнений, к которым приводятся задачи Дирихле и задачи Неймана. Полученные интегральные уравнения приводятся к следующим уравнениям:

$$\mu(P) = \varphi_{\pm 1}(P) \pm \int_S K_3(P, Q)\, \mu(Q)\, dS_Q,$$

где

$$\varphi_{\pm 1}(P) = f(P) \pm \int_S K_1(P, Q)\, f(Q)\, dS_Q + \pm \int_S K_2(P, Q)\, f(Q)\, dS_Q.$$

Таким образом, это позволяет решать задачи Дирихле и Неймана, не опираясь на теорию Фредгольма, относящуюся к уравнениям с «полярным» ядром. Заметка является поправкой ошибочного доказательства в книге автора «Теория потенциала» (ポテンシヤル論).
Ли Дя Гон

**510. О решении неоднородной формы первого интегрального уравнения Милна. Басбридж** (On solutions of the non-homogeneous form of Milne's first integral equation. Busbridge I. W.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 23, 218—231 (англ.)

Пусть

$$E_n(s) = \int_1^\infty e^{-xs} x^{-n}\, dx,$$

$n$ — целое положительное число и $j(s)$ — функция, определяемая равенством

$$j(s) = s \int_0^\infty J(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (\mathrm{re}\, s > 0), \qquad (1)$$

где $J(t)$ — решение интегрального уравнения

$$J(\tau) = \frac{\chi}{2} \int_0^\infty E_1(|t - \tau|) J(t)\, dt + B(\tau), \quad 0 < \chi \leqslant 1. \qquad (2)$$

Метод В. А. Амбарцумяна (Астроном. ж., 1942, 19, вып. 5, 30), позволяющий находить функцию $j(s)$ для $B(\tau) = e^{-\sigma\tau}$ ($\sigma > 0$, $0 < \chi < 1$), не определяя решения уравнения (2), распространяется на случай, когда $B(\tau)$ — полином и $B(\tau) = E_n(\tau)$. Приводится ряд теорем, обосновывающих метод.
А. В. Щелкунов

**511. Приложение теории кусочно-голоморфных функций к уравнениям Хопфа—Винера. Спаренберг** (Application of the theory of sectionally holomorfic functions to Wiener—Hopf type integral equations. Sparenberg J. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A56, № 1, 29—34; Indagationes math., 1956, 18, № 1, 29—34 (англ.)

Рассматриваются интегральные уравнения типа Хопфа — Винера первого и второго рода. С помощью преобразования Фурье уравнения приводятся к краевым задачам Римана для пары аналитических функций. Новых результатов нет. Использованный метод применялся ранее для решения более общих интегральных уравнений (Рапопорт И. М., Докл. АН СССР, 1948, 59, № 8; Тр. Матем. ин-та АН УССР, 1949, № 12; Гахов Ф. Д. и Ю. И. Черский, РЖМат, 1956, 6624).
В. С. Рогожин

**512. Применение теории нормированных колец к доказательству теорем о разрешимости некоторых систем интегральных уравнений. Гохберг И. Ц.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 126—127

Рассматриваются системы интегральных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty K_{ij}(x - s)\, \varphi_i(s)\, ds - \lambda \varphi_i(x) = f_j(x$$

в пространстве $L(0, \infty)$.

**513. О некоторых основных положениях теории систем интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 37—38

Исследуется система интегральных уравнений, сокращенно записываемая в виде

$$g(t) - \int_0^\infty K(t - s)\, g(s)\, ds = f(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty),$$

где $K(t) = \|K_{jl}(t)\|_1^n$ $(-\infty < t < \infty)$ — квадратная матрица-функция с элементами из $L_1(-\infty, \infty)$, а $g = \{g_j(t)\}_1^n$ и $f(t) = \{f_i(t)\}_1^n$ $(0 \leqslant t < \infty)$ $n$-мерные вектор-функции, представляемые как матрицы с одним столбцом.

**514. Исследование нелинейного интегрального уравнения типа Урысона. Гусейнов А. И., Мамедов Я. Д.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 116

Исследуется интегральное уравнение вида

$$u(x) = \Phi\left[x;\ \int_G K(x, s, u(s))\, ds, \lambda\right].$$

Доказываются теоремы существования в пространствах $C$, $L_p$ и $S$, где $S$ — множество функций, удовлетворяющих условиям:

1) $u(x) \in L_p$; 2) $|u(x)| \leqslant u_0(x)$ $(0 < u_0(x) \leqslant \infty)$.

**515. О положительных решениях некоторых нелинейных интегральных уравнений. Вайн-**

**берг М. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 115

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$F(x, u(x)) = \int_B K(x, y, u(y))\, dy + f(x)$$

в предположении непрерывности вещественных функций вещественных аргументов $F(x, u)$, $K(x, y, u)$ и $f(x)$, заданных для $x, y \in B$ и $u \in [0, a]$, где $B$ — ограниченная область $n$-мерного евклидова пространства и $a > 0$.

**516. Об аналитичности решений некоторых нелинейных уравнений. Покорный В. В.**, Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 2, 39—45

Рассматривается уравнение

$$\varphi^*(x) = \int_0^1 \gamma[x, y, \varphi^*(y), \alpha^*, \lambda^*]\, dy, \qquad (1)$$

где $\alpha^*$, $\lambda^*$ — числовые параметры.

Автор в первой части работы, следуя Н. Н. Назарову (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УССР, 1948, вып. 4), предполагает существование решения $\varphi_0^*(x)$ при $\alpha^* = \alpha_0$ и $\lambda^* = \lambda_0$.

Производя замену $\lambda^* = \lambda_0 + \lambda$, $\alpha^* = \alpha_0 + \alpha$ и $\varphi^*(x) = \varphi_0(x) + \varphi(x)$ получает уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 \Gamma(x, y, \varphi(y), \alpha, \lambda)\, dy, \qquad (2)$$

где

$$\Gamma(x, y, z, \alpha, \lambda) = \sum_{n+k+l \geqslant L} A_{nkl}(x, y)\, z^n \alpha^k \lambda^l,$$

$$A_{nkl}(x, y) = \frac{1}{n!\, k!\, l!} \frac{\partial^{n+k+l} \gamma(x, y, \varphi_0(y), \alpha_0, \lambda_0)}{\partial \varphi_0(y)^n\, \partial \alpha_0^k\, \partial \lambda_0^l}.$$

Доказаны

Теорема 1. Нелинейное интегральное уравнение (2) в случае, когда 1 не есть собственное значение ядра

$$A_{100}(x, y) = \frac{\partial \Gamma(x, y, \varphi_0(y), \alpha_0 \lambda_0)}{\partial \varphi_0(y)}$$

при малых $\alpha$ и $\lambda$ имеет единственное в классе непрерывных функций решение, представимое в виде ряда $\varphi(x) = \sum_{s+t \geqslant 1} \varphi_{st}(t)\, \alpha^s \lambda^t$;

Теорема 2. Если при $\lambda = \lambda_0$ нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 \gamma(x, y, \varphi(y), \lambda)\, dy \qquad (3)$$

имеет изолированное решение $\varphi_0(x)$ и 1 есть собственное значение ядра

$$\frac{\partial \gamma(x, y, \varphi_0(y), \lambda_0)}{\partial \varphi_0(y)}$$

ранга 1, то всякое непрерывное решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (3), стремящееся к $\varphi_0(x)$ при $\lambda \to \lambda_0$, представимо в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x) (\lambda - \lambda_0)^{\frac{k}{m}},$$

где $m \geqslant 1$ — целое число. К. Т. Ахмедов

**517. Нелинейные интегральные уравнения (современное состояние и перспективы). Немыцкий В. В., Вайнберг М. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 19—21

**518 Д. Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений. Стейн** (The approximate solution of integrodifferential equations. Stein Frederick Max.—Doct. diss. State Univ. Iowa, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2232 (англ.)

Сообщается без каких-либо намеков на доказательство, что 1) при определенных условиях интегро-дифференциальное уравнение

$$M(u) = L(u) - \int_a^b h(x, t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

с граничными условиями: $R_i(u) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, имеет единственное решение

$$u(x) = \int_a^b H(x, t)\, f(t)\, dt,$$

где $H(x, t)$ — функция Грина данной граничной задачи; 2) исследованы существование, единственность и сходимость полиномов $P_n(x)$, удовлетворяющих граничным условиям и реализующих минимум выражения

$$\int_a^b |f(x) - M(P_n(x))|^r\, dx \qquad (r > 0);$$

3) аналогичная проблема исследована для случаев, когда функциями приближения являются тригонометрические суммы или суммы конечных ортогональных рядов.

Я. В. Быков

**519 Д. Интегральные уравнения типа свертки. Черский Ю. И.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н. Тбилис. матем. ин-т, Тбилиси, 1956

**520 Д. К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Гурьянов И. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казахск. ун-т, Алма-Ата, 1956

См. также: 424, 478 К, 498, 633

## АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

**521. Таблица чисел Стирлинга второго рода и чисел показательной функции. Микса** (A table of Stirling numbers of the second kind, and of exponential numbers. Miksa Francis L.), Math. Teacher, 1956, 49, № 2, 128—133 (англ.)

Пусть $x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$. Раскрывая скобки, получим $x^{(n)} = S_1 x^n - S_2 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} S_n x$, где целые коэффициенты $S_i$ называются числами Стирлинга 1-го рода. Обратно,

$$x^n = \sum_{r=1}^{n} S_n x^{(r)}, \qquad (1)$$

например $x^3 = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)}$. Коэффициенты ${}_r S_n$ называются числами Стирлинга 2-го рода. Суммы $G_n = \sum_{r=1}^{n} {}_r S_n$ являются коэффициентами членов $x^n / n!$ в ряде Маклорена и называются числами показательной функции $e^{e^{x-1}}$. Дана таблица чисел ${}_r S_n$ и $G_n$ до $n = 27$ и указан способ вычисления, ряд свойств и приложений этих чисел.

Опечатка: в формуле (1) напечатано $x^{(n)}$ вместо $x^n$.

В. А. Голубев

**522. Обобщение неравенства о средних арифметическо-геометрических. Хантер** (A generalization of the inequality of the arithmetic-geometric means. Hunter, John), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 2, № 4, 149—158 (англ.)

Пусть $x_1,\ldots, x_n$ —вещественные, положительные числа, $A=\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2$, $ns=\sum_{i=1}^n x_i$, $p=\prod_{i=1}^n x_i$. Тогда $A=0$, $s^n/p=1$ лишь в том случае, если $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Для всех других случаев доказывается теорема 1, являющаяся основным результатом в статье. Если $\beta$ означает корень уравнения $A=\beta^2(n-1)(ns)^2$ в интервале $0<\beta<1$, тогда $s^n/p\geqslant 1/\{1+\beta(n+1)\times\times(1-\beta)^{n-1}$. Этот результат дан и Зигелем (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, 46, 302—312), но лишь для случая, когда все переменные $x_i$ различны. Далее излагается доказательство неравенства Шура для $A/n^2$.

В. А. Голубев

**523. О бесконечной системе уравнений. Урбаник** (O pewnym nieskończonym układzie równań. Urbanik K.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, Ser. 1, 1, № 2, 253—255 (польск.; рез. русс., англ.)

Пусть $\{m_k\}$ и $\{n_e\}$ — последовательности различных положительных целых чисел, $m_k\neq n_l$ для $k,\ l=1,2,\ldots$

Автор доказывает, что

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|n_l^2-m_k^2|}<l$ для $l=1,\ 2,\ldots$;

2) если $|A|>1$, то единственной ограниченной последовательностью $x_k$, удовлетворяющей системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{n_l^2-m_k^2}=Ax_l\quad(l=1,\ 2,\ldots),$$

является последовательность $x_k=0$ $(k=1,\ 2,\ldots)$.

R. Sikorski

**524. Об интересном типе функций. Седлачек** (O zajímavém druhu funkcí. Sedláček Jiří), Mat.-přírodověd. rozhl., 1955, 34, № 3, 128—135 (чеш.)

Исследуются некоторые известные функции, данные алгебраическими выражениями, содержащими абсолютные величины; приводятся графики этих функций.

Йозеф Голубарж

**525. Неравенства Турана и Лагерра. Сковгор** (Turans og Laguerres uligheder. Skovgaard H.), 12 te Skand matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 290 (дат.)

**526. Ненужное педагогическое усложнение понятия «предел». Иогансон** (En unødvendig pedagogisk vanskelighet ved limesbegrepet. Johansson Ingebrigt), Nord. mat. tidskr., 1953, 1, № 4, 165—167 (норв.)

Как известно, обычное определение выражения $\lim_{x\to a}f(x)$ обходится без предварительного определения выражения $x\to a$. Автор предлагает ввести понятие «последовательность $x_n$ сходится к $a$», сводя его посредством определения к тому, что во всякой окрестности $a$ (т. е. во всяком содержащем интервале) содержатся все точки $x_n$, кроме, может быть, конечного их числа. После этого высказывание $\lim_{x\to a}f(x)=b$ приобретает простой вид импликации: если $\{x_n\}\to a$, то $\{f(x_n)\}\to b$.

А. С. Есенин-Вольпин

**527. Сходящиеся последовательности в неархимедовых пространствах последовательностей. Дорлейн** (Convergent sequences in non-archimedian sequence spaces. Dorleijn M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 107—119; Indagationes math., 1955, 17, № 1, 107—119 (англ.)

Пусть $K$ — полное неархимедово числовое поле (всякая сходящаяся последовательность элементов $K$ имеет предел в $K$) и пусть множество $\alpha$ точек $x=(x_1,\ x_2,\ldots)$ $(x_i\in K)$ есть линейное пространство последовательностей.

Примерами пространств последовательностей являются пространство $\omega$ всех последовательностей, пространство $\varphi$ всех конечных величин последовательностей пространство $\sigma_\infty$ всех ограниченных последовательностей и др.

Пространство $\alpha^*$, двойственное к $\alpha$, есть множество всех точек $u=(u_1,\ u_2,\ldots)$ таких, что для каждой $x$ из $\alpha$ $ux=\sum_{i=1}^{\infty}u_ix_i$ сходится. Пространство $\alpha$ нормально, если при условии, что $|y_k|\leqslant|x_k|$, $k=1,\ 2,\ldots$, где $x\in\alpha$, $y$ также принадлежит $\alpha$.

Последовательность точек $x^{(n)}$ пространства $\alpha$ называется $\alpha-\beta$-сходящейся $(\varphi\leqslant\beta\leqslant\alpha^*)$, если каждым $u=(u_1,\ u_2,\ldots)$ из $\beta$ и $\varepsilon>0$ соответствует число $N=N(\varepsilon,\ u)>0$ такое, что

$$|u(x^{(n)}-x^{(n+1)})|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x_i^{(n)}-x_i^{(n+1)})\right|<\varepsilon$$

для $n\geqslant N$.

Если $\beta=\alpha^*$, то $x^{(n)}$ называется $\alpha$-сходящейся.

Предположим далее, что в $K$ справедлива теорема Больцано — Вейерштрасса. Множеством $\alpha'$, союзным с пространством последовательностей $\alpha$, называется множество точек $u=(u_1,\ u_2,\ldots)$ пространства $\omega$ таких, что каждой $x$ из $\alpha$ соответствует число $M=M(x,\ u)>0$ такое, что $|u_ix_i|<M$, $i=1,\ 2,\ldots$

Отметим следующие теоремы:

1. Единственным пространством, для которого $\alpha'=\alpha$, является $\sigma_\infty$.

2. Если $\varphi\leqslant\beta\leqslant\alpha^*$, то каждая $\alpha-\beta$-ограниченная последовательность точек пространства $\alpha$ содержит $\alpha-\varphi$-сходящуюся подпоследовательность.

3. Для того чтобы каждая $\alpha-\beta$-ограниченная последовательность точек пространства $\beta$ ($\varphi\leqslant\beta\leqslant\alpha^*$, $\beta$ нормально) содержала $\alpha-\beta$-сходящуюся последовательность, необходимо и достаточно, чтобы $\beta'=\beta^*$.

Дан пример пространства последовательностей, в котором не каждая $\alpha-\beta$-ограниченная последовательность точек содержит $\alpha-\beta$-сходящуюся последовательность $(\varphi\leqslant\beta\leqslant\alpha^*)$. Указаны также приложения полученных результатов к частным пространствам последовательностей.

М. Д. Калашников

**528. Об изменениях частного двух функций. Эрхарт** (Sur les variations du quotient de deux fonctions. Ehrhart E.), Rev. math. spéc., 1956, 66, № 9, 213—215 (франц.)

Рассматривается задача построения по графикам двух функций графика их частного. Решение основывается на следующих предложениях; 1) если в некотором интервале функции $u(x)$ и $v(x)$ одного знака, и графики их $(U)$ и $(V)$ сохраняют неизменные и противоположные направления изгиба, то $u(x)/v(x)$ имеет в этом интервале не более одного экстремума (то же утверждение справедливо для функций, имеющих значения разных знаков, но графики которых изгибаются в одну и ту же сторону); 2) необходимое (и, вообще говоря, достаточное) условие существования экстремума функции $u/v$ при $x=x_0$ состоит в том, чтобы касательные к кривым $(U)$ и $(V)$ в соответствующих точках пересекались на оси $ox$; 4) для существования экстремума функции $u/v$ при $x=x_0$ необходимо и достаточно, чтобы в соответствующей точке плоскости кривая $(V)$ каса-

лась (не пересекая) кривой $(U_1)$, получаемой из $(U)$ преобразованием, ортогонально-аффинным относительно оси $ox$; при этом, если $u(x_0) > 0$ и в окрестности соответствующей точки $(V)$ лежит над $(U_1)$, то $x_0$ есть точка максимума. А. Г. Школьник

**529. О некоторых новых результатах теории вероятностей. Йордан** (A valószínüségszámitás néhány új eredményéröl. Jordan Karoly), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 2, 129—135 (венг.)

I. Автор исследует приближение эмпирической функции $y(x)$ посредством функций вида

$$f(x) = [a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + \cdots + a_n Q_n(x)] \frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p+1)},$$

где $Q_s(x)$ означают обобщенные полиномы Лагерра. Параметры $a_s$ определяются по принципу моментов; дается представление $f(x)$ также в таком виде:

$$f(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) e^{-x}.$$

II. Во второй части работы определяется неполный момент бернуллиевого распределения:

$$P(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu (1-P)^{n-\nu}.$$

Выводится формула

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \left[\binom{\nu}{s} - \binom{n}{s} p^s\right] P(\nu) =$$

$$= -qP(\lambda) \sum_{i=0}^{s} \binom{\lambda}{s-i} \binom{n-s+i}{i} p^i \Big/ \binom{s}{i}.$$

L. Takács

**530. Геометрическая интерпретация дифференциалов высшего порядка. Алексиевич** (Interpretarea geometrică a diferenţialelor de ordin supèrior. Alexievici V.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, A8, № 3, 144—147 (рум.)

**531. Приближение функций рациональными функциями. Кольман** (Aproximace daných závislostí racionálními funkcemi. Kohlmann Cenék), Slaboproudý obzor, 1956, 17, № 1, Příloha, P1—P4 (чеш.)

**532. Исправленная формула обращения. Брун** (Une formule d'inversion corrigée. Brun Viggo), Math. scand., 1955, 3, № 2, 224—228 (франц.)

Пусть

$$a(x) = x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

— функция, заданная на интервале $(-\rho, \rho)$. Ищется явное выражение функции

$$A(x) = x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots, \quad A(a(x)) = x,$$

обратной заданной.

Вводя $r$-е итерации функции $a(x)$: $a_r(x) = a(a_{r-1}(x))$, $a_0(x) = x$ $(r = 1, 2, \ldots)$, элементарным путем автор получает следующую формулу обращения

$$A(x) = S(x) + R(x),$$

где

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2!} a_1''(x) + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m!} a_{m-1}^{(m)}(x) + \ldots$$

(если ряд справа сходится)

и

$$R(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{m!} \int_0^x \left[ u^m \binom{m}{2} \left(\frac{x}{u}\right)^2 a_1^{(m+1)}(x-u) - \right.\right.$$

$$- \binom{m}{3} \left(\frac{x}{u}\right)^3 a_2^{(m+1)}(x-u) + \cdots$$

$$\left.\left. \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} \left(\frac{x}{u}\right)^m a_{m-1}^{(m+1)}(x-u) \right] du \right\}.$$

Эта формула первоначально была получена им в предположении, что остаточный член $R(x)$ равен нулю.

А. Л. Кузьмина

**533 К. Непрерывные отображения в анализе. Радо, Райхельдерфер** (Continuous transformations in analysis. Rado T., Reichelderfer P. V.), Die Grundlehren der Math. Wissenschaften. Berlin, 1955, 75, 442 стр. (англ.)

В монографии собраны исследования метрико-топологического характера непрерывных отображений областей евклидовых пространств.

В первой части изучаются понятия из смежных областей математики, используемые в дальнейшем. Сюда относятся сведения из теории множеств, теории метрических и топологических пространств и их непрерывных отображений, теории абелевых групп, в частности их спектров, элементов комбинаторной топологии как гомологического, так и гомотопического характера. Доказываются, например, теоремы Жордана—Брауэра, теоремы об инвариантности областей, их группы, числа компонент дополнений гомеоморфных компактов и т.п.

Во второй части рассматриваются вопросы, связанные с понятием ориентируемости, например изучается степень отображения, ее локальные и интегральней свойства. В третьей части дается обзор лебеговой теории меры, теории интегрирования и аддитивоных функций множеств.

Четвертая часть является, в известном смысле, основной: в ней и изучаются собственно непрерывные отображения областей евклидовых пространств. Здесь определяется понятие вариации отображения, абсолютной непрерывности отображения и обобщенного якобиана; устанавливается связь между их свойствами; дается весьма общая формула замены переменного в интеграле по области, изучаются предельные теоремы, дающие возможность судить о свойствах отображения, являющегося пределом равномерно сходящейся внутри области последовательности отображений, по свойствам членов этой последовательности. Рассматривается связь введенного понятия вариации с вариацией в смысле Банаха.

В пятой части исследуются дифференциальные отображения областей и отображения, удовлетворяющие обычному или обобщенному условию Липшица. В последний шестой части рассматривается ряд специфических свойств отображений плоских областей.

Л. Д. Кудрявцев

**534 К. Что такое дифференцирование? Болтянский В. Г.**, М., Гостехиздат, 1955, 64 стр., илл., 90 коп.

Книга из серии «Популярные лекции по математике» (вып. 17). В форме, доступной для учащихся средней школы, дается объяснение таких понятий высшей математики, как производная, дифференциальное уравнение, число $e$, натуральный логарифм. Рассматривается ряд задач из физики, решение которых приводит к возникновению этих понятий. В книге 4 раздела: 1. Задача о падении тела. 2. Дифференцирование. 3. Гармонические колебания. 4. Другие применения понятия производной. Л. Е. Садовский

**535 К. Введение в высшую математику, ее применение в геометрии, физике, естествознании и технике. Т. 1. Штрубеккер** (Einführung in die höhere Mathematik. Mit bes. Berücks. ihrer Anwendungen auf Geometrie, Physik, Naturwissensch. und Technik. Bd. 1, Grundlagen. Strubecker Karl. Mün-

chen, Oldenbourg, 1956, XV, 821 S., Ill., 36.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 23, 1640 (нем.)

**536 К. Курс высшей математики. Т. 4. Смирнов В. И.** (Curs de matematici superioare. Vol. 4. Smirnov V. I. Trad. din limba rusă. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 878 p., il., 34, 90 lei), Bul. bibliogr., 1956, A, № 6, 209 (рум.)

**537 К. Математический анализ. 1. Фундаментальные исследования. Тоёда** (解析. I. の徹底的研究. 豊田浩七. 山海堂, 355 頁 200 圓). Санкайдо, 1954, 355 стр., 200 иен (япон.)

**538 К. Введение в исчисление бесконечно малых. Окоти** (微分解說. 大河內治. オーム社, 11 月, 268 頁, 250 圓. Ому-ся, 1954, 268 стр., 250 иен (япон.)

**539 К. Методы вычисления предела. Куроницси** (極限說計法. 倉西正嗣. オーム社, 151 頁 170 圓) Ому-ся, 1954, 151 стр., 170 иен. (япон.)

**540 К. Основы высшей математики. Котциг** (Základy vyššej matematiky. Kotzig Anton. Bratislava, SPN, 1953, 195 [1] str., 18, 45 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. Slow.-kniha, 1954, 5, jan-febr., 31 (словац.)

**541 К. Курс высшей математики. Часть II. Аналитическая геометрия. Виноградов** (Curs de matematici superioare. Part 2-a. Geometrie analitică. Vinogradov S. P.: Fac. mat. şi fiz., Bucureşti, 1955, 210 p., il., 7 lei.—Litógr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 6, 210 (рум.)

**542 К. Курс математического анализа. 1,2. Хинчин.** Пер. с русс. изд. (Matematikai analizis. Belsö használatra szovjet eredetiböl fordiototta az analizis tanszék kollektivája. Hincsin A. Ja. Bolyai Todomanyegyetem Kolozsvár matematikai és fizikai kar, Kolozsvár, 1955, 1. Kötet. 153 l.— Litorg.; 2 Kötet. 240l. — Litogr.), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 20—21, 12 (венг.)

**543 К. Курс высшей математики. Часть IV (2). Интегральное исчисление (продолжение). Дифференциальные уравнения. Георгиу** (Curs de matematici superioare. Part 4-a (2). Calculul integral (continuare). Ecuati diferenţiale. Gheorghiu Gh. Th. Inst. politehn. Timişoara, 1955, p. 927—1295, il.—Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 6, 206 (рум.)

**544 К. Математический анализ. I. Доп. изд. Судзуки.** (解析) I. 增補版. 鈴木彌門. 千代田書房, 417 頁, 260 圓) Тиёдасёбо, 1954, 417 стр., 260 иен. (япон.)

**545 К. Математический анализ. II. Пейович** (Математичка анализа. II. Пејовић Т. Београд, «Научна книга», 1956, VII, 295 стр.), Bibliogr. jugosl., 1956, 7, № 5, 168 (сербо-хорв).

**546 К. Курс высшей математики** (Для механ.-матем. и физ.-матем. фак. гос. ун-тов и для втузов с расшир. программой). Т. 2. Изд. 14-е испр. **Смирнов В. И.** М., Гостехиздат, 1956, 628 стр., илл., 14 р. 30 к.

**547 К. Курс математического анализа** (Для втузов). Ч. 2. Изд. 7-е, стереотип. **Берман А. Ф.** М., Гостехиздат, 1956, 358 стр., илл., 7 р. 85 к.

**548 К. Упражнения по математическому анализу. Финци, Морра** (Esercizi di analisi matematica. Vol. II. 2 ed. agg. Finzi Bruno, Morra Francesco. Milano, C. Tamburini, 1955, 335 p., 3000 L.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 653, 423 (итал.)

**549 К. Дифференциальное исчисление. Ярник** (Diferenciální počet. Pokračování úvodu do počtu diferenciálního. Jarník V.), Praha, Nakl. Českosl. akad. věd, 1953, 595 str., 350 Kčs) (чеш.)

Книга является продолжением I тома (РЖМат, 1956, 8908). Она состоит из XII глав.

Гл. I содержит основы теории множеств. Дано определение суммы множеств, разности, пересечения, эквивалентности. Доказаны основные теоремы для счетных множеств. Гл. II посвящена исследованию последовательностей целых и комплексных чисел. Доказаны теоремы Больцано — Вейерштрасса и Больцано — Коши. В гл. III рассматриваются бесконечные ряды и бесконечные произведения с комплексными членами и даны некоторые дополнения к теории числовых рядов, изложенной в т. I. В гл. IV рассматриваются равномерно сходящиеся последовательности и функциональные последовательности. Дан признак сходимости Больцано — Коши и критерий Абеля — Дирихле для рядов с постоянными членами. Гл. V посвящена действительным функциям одной действительной переменной. Приведены неравенства Гёльдера, Буняковского и Минковского. Гл. VI посвящена метрическим пространствам.

Вводится понятие метрического пространства, евклидова пространства, пространства непрерывных функций, заданных на ограниченном замкнутом интервале. Дано понятие производного множества, замыкания, границы и внутренности множества. Для этих понятий доказан ряд теорем. После этого речь идет о специальных метрических пространствах, имеющих значение в математическом анализе. Дальше автор дает определение замкнутого множества и для него доказывается ряд теорем. В заключение приведена теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции полиномами и дано понятие наилучшего приближения.

Гл. VII—X посвящены исследованию свойств действительных и комплексных функций от $n$ вещественных переменных. В гл. VII, кроме того, говорится о перемене порядка дифференцирования, доказаны теорема Тейлора и теорема о дифференцировании предельной функции. В гл. VIII дано понятие линейной зависимости и независимости функций. Гл. IX посвящена замене переменных. В гл. X дано понятие экстремума функции $n$ действительных переменных. Гл. XI—XII посвящены теории комплексных функций комплексной переменной. Č. Vitner

**550 К. Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление и начало интегрального исчисления. Кокриамон** (Infinitesimaal analyse. Deel I. Differentiaal en beginselen der integraalrekening. Cocriamont Th. Antwerpen-Brussel-Gent-Leuven, Standaard-Boekh., 955, II, 174 blz., 195 fr.), Bibliogr. Belgique, 1955, 81, № 8, 186 (флам.)

**551 К. Курс высшей математики.** Для техникумов. Изд. 3-е. **Суворов И. Ф.,** М. «Сов. наука», 1956, 352 стр., илл., 6 р. 80 к.

**552 К. Курс высшей математики.** Для техникумов. Изд. 9-е, переработ. **Тарасов Н. П.,** М., Гостехиздат, 1956, 404 стр., илл., 7 р. 15 к.

**553 Д. Независимые функции. Карлин** (Independent functions. Karlin Samuel. Doct. diss., Princeton Univ., 1947), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 3, 425 (англ.)

**554 Д. Применение дифференциальных уравнений к расчетам производства планирования и контроля. Фромк** (On the application of difference equations in the study of production planning and control. Froemke Robert Lawrence. — Doct. diss. Columbia Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 7, 1220—1221 (англ.)

**555 Д. Дифференциальное исчисление для функций от матриц. Кой** (A differential calculus for functions of matrices. Coy John William.— Doct. diss. Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 8, 1405 (англ.)

Приводится краткое содержание докторской диссертации автора, в которой систематизированы и дополнены основные положения дифференциального исчисления для функций от матриц. Г. П. Сафронова

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**556. Некоторые теоремы о рядах. Искра К. К.,** Уч. зап. Гродненск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 41—50

Вводится определение: два ряда $\Sigma_1^\infty U_n$ и $\Sigma_1^\infty V_n$ ($U_n>0$, $V_n>0$) называются рядами с асимптотически одинаковыми членами, если существуют постоянные $A>0$ и $B>0$ такие, что $A<U_n/V_n<B$. Доказывается теорема: если два ряда $\Sigma_1^\infty U_n$ и $\Sigma_1^\infty V_n$ имеют асимптотически одинаковые члены, то они или оба сходятся, или оба расходятся.

Определение. Два ряда $\Sigma_1^\infty U_n$ и $\Sigma_1^\infty V_n$ называются рядами с асимптотически одинаковыми членами в узком смысле, если одновременно

$$\Sigma_1^\infty |U_n/V_n - U_{n+1}/V_{n+1}|<\infty \quad \text{и}$$

$$\Sigma_1^\infty |V_n/U_n - V_{n+1}/U_{n+1}|<\infty.$$

Теорема. Два ряда с асимптотически одинаковыми членами в узком смысле или одновременно сходятся, или одновременно расходятся. Указываются применения этих теорем к обоснованию интегрального признака сходимости рядов, у которых члены не монотонно убывают к нулю. И. В. Матвеев

**557. Одна практическая теорема о пределе. Схеффер** (Een practische limietstelling. Scheffer M.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1955—1956, **43**, № 4, 216—219 (голл.)

Приводится доказательство следующего предложения: если для последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ выражение $n(1-a_{n+1}/a_n)>K>0$ при $n>N$, то последовательность $\{a_n\}$, начиная с достаточно большого номера, монотонно убывает и $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. В качестве одного из применений теоремы доказывается сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} c_n, \text{ где } c_n = n^n/n!\,e^n; \qquad (1)$$

для этого устанавливается, что в рассматриваемом случае $\lim_{n\to\infty} n(1-c_{n+1}/c_n)=1/2$. В качестве второго примера показано, что если $\lim_{n\to\infty} n(1-a_{n+1}/a_n)>0$ и меньше 1, то степенной ряд $\Sigma_{n=1}^\infty a_n z^n$ сходится во всех точках круга $|z|=1$, за исключением точки $z=1$, в которой он расходится. А. Г. Школьник

**558. Цепь признаков сходимости для рядов с положительными членами. Стрелецкий Э. В.,** Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 67—69

Дается метод построения цепи признаков сходимости рядов с положительными членами, исходя из признака Куммера и теоремы Дини. Каждый следующий признак в цепи является более сильным, чем предыдущий в вопросе сходимости ряда, т. е. если признак Куммера дает ответ на вопрос о сходимости ряда, то следующий в цепи признак тем более дает ответ. Обратное неверно, что показывается на примерах. И. В. Матвеев

**559. О преобразованиях Хаусдорфа двойных последовательностей. Рамануджан** (On Hausdorff transformations for double sequences. Ramanujan M. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1955, **A42**, № 3, 131—135 (англ.)

Четырехмерная матрица называется матрицей Хаусдорфа $(H, \mu)$, если она является произведением $\Delta\mu\Delta$, где $\Delta$ — матрица с элементами

$$\Delta_{pqmn} = (-1)^{m+n}\binom{p}{m}\binom{q}{m},$$

а $\mu$ — диагональная матрица, т. е матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов $\mu_{mnmn}=\mu_{mn}$. Величина $\mu_{mn}$ называется регулярным моментом. если

$$\mu_{mn} = \int_0^1\int_0^1 u^m v^n d_u d_v \chi(u, v),$$

где $\chi(u, v)$ — функция с ограниченным изменением на квадрате $(0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1)$, причем $\chi(0,0)=0$, $\chi(1, 1)=1$, $\chi(u, +0)=\chi(u, 0)$, $\chi(+0, v)=\chi(0, v)$.

Двойная последовательность $(s_{mn})$ называется ограниченной $\lambda$, где $\lambda$ — матрица с элементами $\lambda_{pqmn}$, если последовательность $(t_{pk})$, в которую преобразуется с помощью $\lambda$ последовательность $(s_{mn})$, ограниченная $(t_{pq}=\Sigma_{m,n}\lambda_{pq\,mn}s_{mn})$.

Доказываются следующие две теоремы. I. На множестве двойных последовательностей, ограниченных $(H, \mu)$, метод $(H, \nu)$ включает $(H, \mu)$ тогда и только тогда, когда все величины $\nu_{mn}/\mu_{mn}$ — регулярные моменты. II. (Двумерный аналог теоремы Мерсера.) Пусть $\alpha>0$, $\beta>0$ и

$$t_{pq} = \alpha\beta s_{pq} + \frac{\alpha(1-\beta)}{q+1}\sum_{j=0}^{q} s_{pj} +$$

$$+\frac{\beta(1-\alpha)}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_{iq} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(p+1)(q+1)}\sum_{i,\,j=0}^{p,\,q} s_{ij}.$$

Тогда, если последовательность $(t_{pq})$ ограниченная и сходится к $l$, то это же самое можно сказать о $(s_{pq})$. В. М. Даревский

**560. Соотношения включения для некоторых методов суммирования. Шунмейкер** (Inclusion relations among some methods of summability. Schoonmaker N. James), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 102—108 (англ.)

Рассматриваются условия включения для матричных методов суммирования Эйлера $E(p)$ метода Тейлора $T(r)$ и метода суммирования, обозначенного как $S(q)$. Матрицы, определяющие эти методы, имеют вид

$$E(p) \equiv E_{nk}(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ p\neq 0, \qquad (1)$$

$$T(r) \equiv T_{nk}(r) = (1-r)^{n+1}\binom{k}{n} r^{k-n}\, r\neq 1, \qquad (2)$$

$$S(q) \equiv S_{nk}(q) = (1-q)^{n+1}\binom{n+k}{k} q^k,\quad q\neq 0,\quad q\neq 1, \qquad (3)$$

$p$, $q$, $r$ могут принимать комплексные значения.

Теорема 1. Если $|q_1|<1$, $|q_2|<1$ и $q_1\neq q_2$, то не существуют $q_1$ и $q_2$ такие, что $S(q_2)\supset S(q_1)$. Для $q_1$ действительных этот результат установлен Мейером—Кёнигом (Meyer — König W., Math. Z., 1949, **52**, 257—304).

Теорема 2. Если $|p|<1$, $|q|<1$ и $|q(1-1/p)|<1$, тогда справедливо следующее матричное равенство:

$$S(q)\,E(1/p) = S(q/[p+q-pq]).$$

Теорема 3. Если $|p|<1$, $|q|<1$, а $p$ и $q$ удовлетворяют условиям

$$|1/p+1/q-1| = |1/p| + |1/q-1|, \qquad (4)$$

$$|1/q|>|1/p|+|1-1/p|, \qquad (5)$$

то $S(q)\supset E(p)$.

Теорема 4. Если $|p|<1$, $|q|<1$ и $S(q)\supset E(p)$, то тогда необходимо выполняются соотношения (4) и

$$\left|\frac{1}{q}\right| \geqq \left|\frac{1}{p}\right| + \left|1-\frac{1}{p}\right|.$$

Теорема 5. Если $p = r/(r-1)$ и $0 < p < 1$, то тогда $E(p) \supset T(r)$.

Теорема 6. Если $p = r/(r-1)$ и $0 < |r| < 1$, то $E(p) \supset T(r)$ тогда и только тогда, если $0 < p < 1/2$.

Теорема 7. Если $0 < q < 1/3$, то тогда $S(q) \supset T(q)$.

И. И. Огиевецкий

561. **Обращения матриц и матричных преобразований. Вилансний, Целлер** (Inverses of matrices and matrix-transformations. Wilansky Albert, Zeller Karl), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 414—420 (англ.)

Пусть $y = T(x)$ — преобразование, которое с помощью матрицы $A = (a_{nk})$ преобразует последовательность $x = \{x_n\}$ в последовательность $y = \{y_n\}$, где $y_n = \Sigma_k^\infty a_{nk} x_k$. Через $D$ обозначается множество всех последовательностей $x$, для которых преобразование $y = T(x)$ имеет смысл, а через $R$ — множество всех последовательностей $T(x)$ ($x \in D$). Рассматриваются правосторонняя $A'$, левосторонняя $'A$ и двусторонняя $A^{-1}$ матрицы, обратные по отношению к $A$, и одноименные с ними преобразования $T'$, $'T$, $T^{-1}$ обратные по отношению к $T$. $A'$ и $T'$ таковы, что $AA' = I$ ($I$ — единичная матрица), а $T[T'(x)] = x$ для каждого $x \in R$. Аналогично определяются $'A$, $A^{-1}$, $'T$, $T^{-1}$. Получены результаты, относящиеся к вопросу о существовании указанных обратных матриц и преобразований. В частности, доказано следующее. 1. Если $A$ — конечнострочная матрица, то $A'$ существует тогда и только тогда, когда $R = (s)$, где $(s)$ — множество всех последовательностей. 2. Пусть $A$ — матрица с конечными столбцами, а определяемое с ее помощью преобразование $T$ таково, что каждой последовательности $y \in R$ соответствует только одна последовательность $x \in D$. Тогда, если $R \supset E$ ($E$ — множество всех последовательностей $x = \{x_n\}$, у которых $x_n = 0$ при почти всех $n$), то $A^{-1}$ существует. 3. Пусть $A = (a_{nk})$ — реверсивная матрица, причем имеет смысл и не равно нулю выражение $\lim_{n\to\infty} \Sigma_k a_{nk} - \Sigma_k \lim_{n\to\infty} a_{nk}$. Тогда $A^{-1}$ существует и является матрицей преобразования $T^{-1}$.

В. М. Даревский

562. **Некоторые вопросы линейных матричных преобразований. Волков И. И.**, Докл. АН СССР, 1956, 106, № 4, 591—594

Последовательность комплексных чисел $\{s_n\}$ суммируется линейным методом, определенным комплексной матрицей $A = (a_{mn})$, $m, n = 0, 1, \ldots$, к значению $s$, если

$$\lim_{m\to\infty} \underline{\lim}_{q\to\infty} R \sum_{n=0}^{q} a_{mn} s_n = \lim_{m\to\infty} \overline{\lim}_{q\to\infty} R \sum_{n=0}^{q} a_{mn} s_n = Rs$$

и аналогичное выражение для мнимой части. На этой основе определяются матричные методы — регулярные, вполне регулярные, $T_\infty$-матрицы; дается понятие полной эквивалентности двух методов суммирования. Ядром линейного преобразования последовательности $\{z_n\}$, совершаемого при помощи матрицы $A = (a_{mn})$, называется множеством точек $z$, удовлетворяющих при любом действительном $\varphi$ условию

$$Rze^{i\varphi} \leqslant \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{q\to\infty} R \sum_{n=0}^{q} a_{mn} z_n e^{i\varphi},$$

и обозначается $K_A(z_n)$. Под $K(z_n)$ понимается ядро последовательности $\{z_n\}$. Понятие ядра линейного преобразования последовательности было введено и изучалось Кноппом (Knopp K., Math. Z., 1930, 31, 97), позднее рассматривалось в работах Агнью, Лоренца (Agnew R., Amer. J. Math., 1939, 61, 178; РЖМат, 1955, 5897). В дальнейшем изложении через $A_{m_0 n_0}$ обозначена матрица, полученная из матрицы $A = (a_{mn})$ заменой нулями всех элементов $a_{mn}$, для которых $m < m_0$ или $n < n_0$. В работе формулируется 6 теорем, приведем основные результаты:

Теоремы 1, 2, 4 (в сжатой форме). Линейное преобразование, определенное регулярной матрицей $A = (a_{mn})$, для любой последовательности $\{z_n\}$, удовлетворяет условию:

а) $K_A(z_n) \subset K(z_n)$

тогда и только тогда, когда можно указать числа $m_0$ и $n_0$ такие, что $A_{m_0 n_0}$ есть $T_\infty$-матрица,

б) $\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{q\to\infty} R \sum_{n=0}^{q} a_{mn} z_n e^{i\varphi} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} Rz_n e^{i\varphi}$

тогда и только тогда, когда существуют такие числа $m_0$ и $n_0$, что матрица $A_{m_0 n_0}$ вполне регулярна, а в случае, в формуле равенства, матрица $A_{m_0 n_0}$ определяет метод суммирования, вполне эквивалентный сходимости.

Теорема 5. Если два регулярных матричных метода $A = (a_{mn})$ и $B = (b_{mn})$ вполне эквивалентны, то для любой ограниченной комплексной последовательности $\{z_n\}$ $K_A(z_n) = K_B(z_n)$. В статье встречаются некоторые неясные формулировки, замечены опечатки: на стр. 591 в формуле (1) внизу, справа, вместо $\lim$ должно стоять $\overline{\lim}$, на стр. 592 начало фразы «комплексная плотность»: следует читать «комплексная плоскость.»

М. П. Щеглов

563. **Свертывание методов суммирования. Вермс** (Convolution of summability methods. Vermes P.), Итон л'аналиса математит. J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 160—177 (англ.)

Пусть $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$, $C = (c_{nk})$ — матричные методы суммирования, данные при помощи преобразования последовательности в последовательность. Автор называет метод $C$ свертыванием методов $A$ и $B$, если $c_{nk} = \Sigma_{i=0}^{k} a_{ni} b_{n,k-i}$. Показывается, что при нормировке $\|A\| = \sup_n \Sigma_k |a_{nk}|$ методы суммирования, сохраняющие сходимость последовательностей, составляют коммутативное нормированное кольцо с единицей, если умножение методов суммирования понимать в смысле свертывания. Доказывается также одна общая теорема типа Бореля-Окада о суммируемости ряда Тейлора $\Sigma_n a_n z^n$ в том случае, когда поле суммирования ряда $\Sigma_n z^n$ не является односвязным. Наконец, в случае матричных методов суммирования $F = (f_{nk})$, $G = (g_{nk})$, определенных при помощи преобразования ряда в последовательность, изучается свертывание $H = (h_{nk})$ вида

$$h_{nk} = \Sigma_{i=0}^{k} f_{ni} g_{n,k-i} / (k+1).$$

Г. Ф. Кангро

564. **О некоторых регулярных методах обобщенного суммирования рядов. Кауфман Б. Л.**, Уч. зап. Чкаловского пед. ин-та, 1956, вып. 9, 27—46

Пусть

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}^{(s)} S_k, \qquad (1)$$

где

$$\lambda_{n,k}^{(s)} = n!\,(ks+1)/(n-k)! \prod_{i=0}^{k} (n+is-i+1)$$

для $k \leqslant n$.

Если $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = b$, то последовательность $S_n$ суммируется методом $(P, s)$ к числу $l$.

Если же

$$\lambda_{n,k}^{(s)} = n!\,(s+1)^k / (n-k)! \prod_{i=0}^{k} [(s+1)(n-i)+1],$$
$$k \leqslant n,$$

и $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = l$, то будем говорить, что последовательность $S_n$ суммируется методом $(\bar{P}, s)$ к числу $l$.

Метод $(P, 2)$ совпадает с методом суммирования Валле-Пуссена (определение этого метода см., например, Натансон, Конструктивная теория функций, Л., Гостехиздат, 1949).

В работе исследуются некоторые свойства методов суммирования $(P, s)$ и $(\bar{P}, s)$.

Теорема 1. Методы $(P, s)$ и $(\bar{P}, s)$ регулярны.

Теорема 2. Метод $(P, 1)$ сильнее метода $(C, 2)$.

Теорема 3. Существует ряд, суммируемый $(P, 1)$, но не суммируемый методом Абеля.

Теорема 4. Если ряд суммируется $(\bar{P}, 1)$, то последовательность его частных сумм, удовлетворяет условию $S_n = o(\sqrt{n})$.

Теорема 5. Метод суммирования $(\bar{P}, 1)$ слабее метода суммирования $(C, 1)$. И. И. Огиевецкий

**565. Тауберова теорема для α-сходимости чезаровских средних. Бойд** (A Tauberian theorem for α-convergence of Cesàro means. Boyd A. V.), Proc. Amer .Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 59—61 (англ.)

Устанавливается следующая теорема: Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и ряд $\Sigma a_n$ суммируется методом $(A, \alpha)$ к $S$. Тогда для $r \geqslant -1$. $\Sigma a_n$ суммируется методом $(C, r, \alpha)$ к $S$ тогда и только тогда, если последовательность $\{B_n^r / C_n^{r+1}\}$ α-сходится к нулю.

Здесь $A_n^k$ и $B_n^k$ обозначают соответственно $n$-ю чезаровскую сумму (Харди, Расходящиеся ряды, 1951) порядка $k > -1$ соответственно для рядов $\Sigma a_n$ и $\Sigma b_n$, где $b_n = n a_n$. Для $k = -1$ автор полагает $A_n^{-1} = a_n$, $B_n^{-1} = b_n$. Определение методов суммирования $(A, \alpha)$, $(C, r, \alpha)$ $r > -1$, α-сходимости последовательности см. в работе Геринга (РЖМат, 1956, 499).

Под суммируемостью $(C, -1, \alpha)$ понимается суммируемость ряда $\Sigma a_n$ методом $(C, 0, \alpha)$ в предположении, что последовательность $\{n a_n\}$ α-сходится к нулю.

И. И. Огиевецкий

**566. Преобразования Абеля и Рисса общих тауберовых рядов. Агнью** (Abel and Riesz transforms of general Tauberian series. Agnew Ralph Palmer), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 3, 293—336 (англ.)

Для числовых рядов $\Sigma_0^\infty u_n$, удовлетворяющих условию Кронеккера $\overline{\lim}_{n\to\infty} |x_n| < \infty$, где $x_n = (n+1)^{-1} \times \Sigma_{k=0}^n k u_k$, устанавливаются точные оценки, связывающие абелевы и риссовы преобразования $A(t) = \Sigma_{k=0}^\infty t^k u_k$ $(0 \leqslant t < 1)$, $R^{(r)}(\omega) = \Sigma_{k<\omega+1} \left(1 - \frac{k}{\omega+1}\right)^r u_k$. Пусть $r \geqslant 0$, $q > 0$ фиксированы, а $t \to 1-0$ и $\omega \to +\infty$ таким образом, что $(1-t)\,\omega \to q$. Тогда

$$\overline{\lim} |A(t) - R^{(r)}(\omega)| \leqslant G_r(q) \overline{\lim_{n\to\infty}} |x_n|,$$

где

$$G_r(q) = \delta(r) + e^{-q} + \int_q^\infty x^{-1} e^{-x}\,dx + \int_0^1 x \left| \frac{d}{dx} \frac{e^{-qx} - (1-x)^r}{x} \right| dx,$$
$$\delta(0) = 1,\ \delta(r) = 0\ (r > 0).$$

Константа $G_r(q)$ неулучшаема. Для $r = 0$ этот результат известен (Wintner A., Comment. math. helv., 1947, **20**, 216—222; Hadwiger H., там же, 319—332; Hartman Ph., Amer. J. Math. 1947, **69**, 599—606). Далее в работе показывается, что для каждого фиксированного $r \geqslant 0$ $G_r(q) \to \infty$ при $q \to 0$ и $q \to \infty$; функция $G_r(q)$ достигает минимума в единственной точке $q = q_r$, причем $G_r(q_r)$ является наименьшим среди чисел $H_r$, обладающих следующим свойством: существуют функции $t(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ такие, что $t(\alpha) \to 1-0$, $\omega(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$ и

$$\overline{\lim}_{\alpha\to\infty} |A(t) - R^{(r)}(\omega)| \leqslant H_r \overline{\lim}_{n\to\infty} |x_n|$$

для всякого ряда $\Sigma_0^\infty u_n$, удовлетворяющего условию Кронеккера. Устанавливаются асимптотические формулы

$$q_r = r + \frac{E-1}{2} + \frac{(2E-3)(E+1)}{24r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$
$$G_r(q_r) = \frac{E^2}{2(1+E)\,r} + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

где $E = 1{,}678346990016661\ldots$ — единственное положительное решение уравнения $e^E = 2(1+E)$. В заключение доказывается теорема: Пусть $r > 0$ фиксировано $\omega_1 \to \infty$, $\omega_2 \to \infty$, $\omega_1 / \omega_2 \to 1$. Тогда $R^{(r)}(\omega_1) - R^{(r)}(\omega_2) \to 0$ для всякого ряда, удовлетворяющего условию Кронеккера. Б. И. Кореньблюм

**567. О сходимости интерполяционного ряда Ньютона. Оруджев Гардашхан,** Азэрб. девлэт. пед. инст. эсэрлэри, Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1955, **2**, 146—153

Рассматривается ряд Ньютона

$$\sum_{n=1}^\infty a_n (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n) \qquad (1)$$

с узлами интерполяции $x_n = S_n / P_n$ $(P_n > 0$, $\lim S_n = \lim (P_1 + P_2 + \ldots + P_n) = \infty$ при $n \to \infty)$ в предположении, что показатель сходимости $\mu$ последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет условию $1 \leqslant \mu < 2$. Доказывается, что если ряд (1) сходится в точке $z_0$, не совпадающей с узлами интерполяции, то он сходится в полуплоскости $1 + \mathrm{Re}\,(z - z_0) > \mu$. Далее доказываются два предложения: 1) Если ряд (1) имеет конечную абсциссу сходимости $\lambda$, то он равномерно сходится в области, определяемой неравенствами

$$1 + \mathrm{Re}\, z \geqslant \mu + \lambda + \varepsilon,\quad |z - \mu - \lambda + 1| \leqslant R$$

при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и сколь угодно большом $R$ (у автора неточно сформулировано: «при достаточно большом $R$»), а сумма его будет регулярной функцией в любой конечной части полуплоскости $\mathrm{Re}\, z + 1 > \lambda + \mu$; 2) Ряд Ньютона (1) и обобщенный ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^\infty C_n e^{-\lambda_n z},\ C_n = (-1)^n a_n \prod_{k=1}^n S_k / P_k,\ \lambda_n = \ln S_n \qquad (2)$$

имеют одни и те же абсциссы сходимости и абсолютной сходимости. Обе теоремы являются обобщением соответствующих теорем для ряда Ньютона с натуральными узлами интерполяции (Гельфонд А. О., Исключение конечных разностей, 1952, 162—169), которые получаются из теорем автора при $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = \ldots = 1$. А. Г. Школьник

**568. О (C, 1, 1)-суммируемости двойного ортогонального ряда. Федулов В. С.,** Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 4, 433—442

Пусть двойная последовательность $\{\varphi_{ij}(x, y)\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ образует ортонормированную систему функций на некотором прямоугольнике $R = [a, b; c, d]$.

Двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\varphi ij\,(x, y), \qquad (1)$$

где $a_{i,j}$ — произвольные действительные числа, назовем двойным ортогональным рядом. Основным результатом статьи является следующая теорема:

Если двойной ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}^2 [\log\log(m+1)]^2 [\log\log(n+1)]^2$$

сходится, то ряд (1) $(C, 1,1)$-суммируем на $R$ почти всюду.

Показывается, что рост множителя $[\log\log(m+1)]^2 \times [\log\log(n+1)]^2$ не может быть понижен. Указанный результат является переносом на двумерный случай известной теоремы Меньшова (Меньшов Д. Е., Fundam. math., 1926, 8, 55—108). И. Е. Жак

**569. Обобщенные интегралы Фурье. Миллер, Заде** (Generalized Fourier integrals. Miller K. S., Zadeh L. A.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 3, 256—260 (англ.)

Рассматривается разложение функций в ряд по функциям $f(e^{j\omega t})$, где $f$ — произвольная функция, допускающая представление в форме

$$f(e^{j\omega t}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{jn\omega t}.$$

Если $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega)\, X(j\omega)\, d\omega$, то для отыскания ядра $k^{-1}$ обратного преобразования

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{-1}(j\omega t)\, x(t)\, dt$$

требуется разрешить интегральное уравнение

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega t)\, k^{-1}(j\omega t')\, d\omega,$$

где $\delta$ — дельта-функция. Полагая $k(j\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{jn\omega t}$, взаимное ядро отыскивается в форме

$$k^{-1}(j\omega t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} e^{-\frac{j\omega t}{n}};$$

коэффициенты $b_n$ находятся из тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z} \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-z} = 1.$$

Л. Я. Цлаф

**570 К. Бесконечные ряды. Кнопп** (Szeregi nieskończone. Knopp Konrad. Tłum. z niem. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 808, 1 nlb., s., 48, 60 zł), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 18, 257 (польск.)

**571 Д. Теория и применение метода исчисления конечных разностей в бесконечных рядах. Анвар Али Мохаммед** (Theorie und Anwendung der Methode der Differenzen-Summation von unendlichen Reihen. Anwar Ali Mohammad. Diss. Math. Naturwiss. F. Göttingen, 1953, 64 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 1, 76 (нем.)

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**572. Два интеграла, содержащие модифицированные бесселевы функции второго рода. Коноплли** (Two integrals involving modified Bessel functions of the second kind. Conolly B. W.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, 2, № 3, 147—148 (англ.)

Устанавливаются следующие формулы:

$$K_\mu(a)\, K_\nu(b) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\nu-\mu)u}\left[\frac{\omega(u)}{\omega(-u)}\right]^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} K_{\mu+\nu}\left(\sqrt{\omega(u)\,\omega(-u)}\right) du,$$

$$\omega(u) \equiv ae^{u} + be^{-u};\ R(a) \geqslant 0,\ R(b) \geqslant 0,\ R(a+b) > 0;$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} k^{-2\zeta}\, \widetilde{K}_{\mu+\zeta}(a)\, \widetilde{K}_{\nu-\zeta}(b)\, d\zeta =$$

$$= \pi i k^{\mu-\nu} p^{\mu+\nu} \widetilde{K}_{\mu+\nu}\left(\sqrt{pq}\right),$$

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ p \equiv k + k^{-1},\ q \equiv a^2 k + b^2 k^{-1},$$

$$\widetilde{K}_\mu(z) \equiv z^{-\mu} K_\mu(z).$$

Первая из них при $a = b$ обращается в известную формулу Никольсона. М. Н. Олевский

**573. О некоторых интегралах, содержащих бесселевы функции. Макробert** (Some Bessel function integrals. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 2, № 4, 183—184 (англ.)

На основании формулы

$$\int_0^{\infty} E(p;\ \alpha_r : q;\ \rho_s : z/\operatorname{sech}^2 u)\, (\sinh u)^{2n-1} \cosh u\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(n)\, z^n E(p;\ \alpha_r - n : q;\ \rho_s - n : z),$$

$$p \geqslant q+1,\ z \neq 0,\ |\operatorname{amp} z| < \pi,\ R(n) > 0,$$

$$R(\alpha_r - n) > 0,\ r = 1, 2, \ldots, p$$

выводятся некоторые интегралы, содержащие бесселевы функции; так, например:

$$\int_0^{\infty} e^{z\operatorname{sech}^2 u} K_m(z\operatorname{sech}^2 u)\, (\sinh u)^{2k-1}\, du =$$

$$= \frac{\cos m\pi}{\sqrt{2\pi z}} \frac{1}{2}\Gamma(x)\, \Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2} - k - m\right) e^z W_{k,m}(2z),$$

$$z \neq 0,\ |\operatorname{amp}| < \pi,\ R(k) > 0,\ R(k+m) < \frac{1}{2},$$

где $W_{k,m}$ — известная функция Уиттекера.

Н. С. Кошляков

**574. Интегралы, содержащие произведения бесселевых функций. Рагаб** (Integrals involving products of Bessel functions. Ragab F. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 2, № 4, 180—182 (англ.)

Показывается, что интегралы вида

$$\int_0^{\infty} \lambda^{k-1} K_{2m}(z/\sqrt{\lambda})\, K_n(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^{k-1} J_{2m}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) K_n(\lambda)\, d\lambda,$$

$\int_0^{\infty} \lambda^{k-1} J_{2m}(x/\sqrt{\lambda})\, J_n(\lambda)\, d\lambda$ выражаются посредством сумм, содержащих обобщенные гипергеометрические функции. Н. С. Кошляков

**575. Об асимптотическом представлении функций Бесселя при равных значениях порядка и аргумента. Гаттески** (Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento. Gatteschi Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 4, 531—536 (итал.)

Ссылаясь на ряд результатов, полученных им в ранее опубликованных работах, автор получает асимптотические оценки для бесселевых функций при больших значениях индекса и аргумента:

$$Y_\nu(\nu) = \frac{-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}3^{-4/3}\pi\nu^{1/3}} + \rho^*, \quad |\rho|^* \leqslant \frac{0{,}252}{\pi\nu}, \quad \nu \geqslant 1;$$

$$|J_\nu(\nu x)| < \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{3{,}841}{\pi\nu^{1/3}} + \frac{0{,}252}{\pi\nu}\right], \quad x > 1;$$

$$|Y(\nu x)| < \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{3{,}841}{\pi\nu^{1/3}} + \frac{0{,}252}{\pi\nu}\right], \quad x > 1.$$

Н. С. Кошляков

576. **Некоторые формулы для произведения трех модифицированных бесселевых функций второго рода.** **Рагаб** (Some formulae for the product of three modified Bessel-functions of the second kind. Ragab F. M.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1955, **A58**, № 5, 621—626; Indagationes math., 1955, **17**, № 5, 621—626 (англ.)

Интегралы $\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1}K_e(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda$, где $f(\lambda)$ — одна из следующих функций: а) $K_m(e^{\pi i}x/\lambda)K_n(x/\lambda)$, б) $K_m(x/\lambda)K_n(x/\lambda)$, в) $K_m(e^{\pi i}x\lambda)K_n(x\lambda)$, г) $K_m(x\lambda)\times K_n(x\lambda)$, выражаются через $E$-функции (случаи а) и б)) и через функции ${}_6F_5$ (случаи в) и г)). Выражение для интеграла в случае в) крайне громоздкое (оно занимает больше страницы !).

М. Н. Олевский

577. **Теоремы разложения для $G$-функций. XI. Разложения в ряды по обобщенным гипергеометрическим функциям.** **Мейер** (Expansion theorems for the $G$-function. XI. Expansions in series of generalized hypergeometric functions. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1956, **A59**, № 1, 70—82, Indagationes math., 1956, **18**, № 1, 70—82 (англ.)

В реферируемой части работы (начало см. РЖМат. 1953, 796) устанавливаются два разложения $G$-функции по обобщенным гипергеометрическим функциям. Приведем одно из них:

$$G^{2,\,p}_{p+1,\,q+2}\left(z\,\middle|\begin{matrix}1-\gamma_1, \ldots, 1-\gamma_p, \sigma\\ 0, \mu, 1-\delta_1, \ldots, 1-\delta_q\end{matrix}\right) - \sum_{r=0}^{\infty} A^{(r)}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix}b+r, \gamma_1, \ldots, \gamma_p;\\ b, \delta_1, \ldots, \delta_q;\end{matrix} -z\right),$$

где $r!\,\Gamma(b+\sigma+r)\,\Gamma(\delta_1)\ldots\Gamma(\delta_q)\,A^{(r)} = (\sigma-\mu)_r \times \Gamma(b+r)\,\Gamma(b+\mu)\,\Gamma(\gamma_1)\ldots\Gamma(\gamma_p)$, $q$ — целое $\geqslant 0$, $p$ равно $q$ или $q+1$. При $p=q+1$ предполагается, что а) $R(\gamma_i+\mu)>0$, б) $\gamma_i \neq 0, -1, -2, \ldots (i=1,2,\ldots,p)$ $z\neq 0$, $|\arg z| \leqslant \pi/2$; при $p=q$ в дополнение к а) и б) предполагается, что $R(\Sigma_1^p\gamma_i - \Sigma_1^q\delta_i - b - 2\mu) < 1/2$ и $z>0$. Полученные разложения содержат как частные и предельные случаи ряд известных формул.

М. Н. Олевский

578. **Об интегралах, содержащих $E$-функции.** **Рат хи** (A few infinite integrals involving $E$-functions. Rathie C. B.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 2, № 4, 170—172 (англ.)

С помощью основных теорем операционного исчисления находятся значения некоторых интегралов, содержащие $E$-функции, так например:

$$\int_0^\infty x^{\delta-\alpha-\beta-\nu-1}(x+z)^{-\gamma}E(\alpha,\beta,\gamma:\delta;x+z)_1F_1(\delta-\alpha-\beta,$$

$$\delta-\alpha-\beta-\nu;-x)\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\delta-\alpha-\beta-\nu)}{\Gamma(\delta-\alpha)\,\Gamma(\delta-\beta)} \times$$

$$\times z^{-\gamma-\nu}E(\delta-\alpha,\ \delta-\beta,\ \gamma+\nu:\delta;z),\quad R(\gamma+\nu)>0,$$

$$R(\delta-\alpha-\beta-\nu)>0,\ |\arg z|<\pi,\ z\neq 0;$$

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}(x+z)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\lambda,\mu;\nu;-\frac{x}{2}\right)E[l;\alpha_r:n;\rho_s:$$

$$:\{(x+z)/m\}^m]\,dx = \Gamma(\nu)\,z^{\nu-\alpha}m^{-\nu}E\{l+2m;\ \alpha_r:n+2m;$$

$$\rho_s:(z/m)^m\},\ R(\nu)>0,\ R(\alpha+\lambda-\nu)>0,\ R(\alpha+\mu-\nu)>0,$$

$$|\arg z|<\pi,\ z\neq 0,\ \alpha_{l+k+1}=(\alpha+\lambda-\nu+k)/m,\ \rho_{n+k+1}=$$

$$=(\alpha+\lambda+k)/m\ \alpha_{l+m+k+1}=(\alpha+\mu-\nu+k)/m,\ \rho_{n+m+k+1}=$$

$$=(\alpha+\lambda+\mu-\nu+k)/m,\qquad k=0,1,2,\ldots,\quad m-1.$$

Н. С. Кошляков

579. **К определению функции Эйри для многосвязных областей.** **Бошер** (Sur la détermination analogique de la fonction d'Airy dans des domaines multiplement connexes. Boscher Jean), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 16, 1023—1025 (франц.)

В граничные условия для определения функции Эйри в $n$-связной области входят $3(n-1)$ неизвестных постоянных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,\ldots,n-1)$, которые должны быть найдены из требования однозначности перемещений и деформаций. Для двухсвязной области, когда один из контуров $\Gamma_2$ свободен от внешних нагрузок, эти условия могут быть записаны в виде:

$$\int_{\Gamma_2}\left[x\frac{d}{dn}(\Delta\Phi) + y\frac{d}{ds}(\Delta\Phi)\right]ds = 0;$$

$$\int_{\Gamma_2}\left[y\frac{d}{dn}(\Delta\Phi) - x\frac{d}{ds}(\Delta\Phi)\right]ds = 0; \qquad (E)$$

$$\int_{\Gamma_2}\left[\frac{d}{dn}(\Delta\Phi)\right]ds = 0;$$

Здесь $\Phi$ — функция Эйри, $\Delta$ — оператор Лапласа. Эту функцию автор предлагает искать в виде: $\Phi = \Phi_0 + \alpha\Phi_\alpha + \beta\Phi_\beta + \gamma\Phi_\gamma$, причем $\Phi_0, \Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ — бигармонические функции, граничные условия для которых уже не содержат никаких неизвестных величин. Условия (E) дают систему трех уравнений для нахождения трех неизвестных $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

В случае, когда область, занятая упругим телом, симметрична относительно оси $X$ или $Y$, эта система упрощается, так как некоторые из интегралов в (E) исчезают.

В качестве примера рассмотрена задача Ламе (труба, подверженная внутреннему давлению).

Г. Н. Савин

580. **Свойство ортогональности гипергеометрических полиномов.** **Улссон** (An orthogonal property of the hypergeometric polynomial. Olsson R. Gran), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1955, **28**, № 12, 59—61 (англ.)

Указывается вывод свойства ортогональности в $(-\infty,\infty)$ гипергеометрических полиномов $\varphi_m(xi) = F(1-m, 1+xi; 2; 2)$ и $\varphi_n(-xi)$, $m\neq n$, с весом $x/\operatorname{sh}\pi x$, основанный на их интегральном представлении, принадлежащем Бейтману, и содержатся замечания к его работе (Bateman H., Proc. Nat. Acad. Sci., 1942, **28**, 374—377) и исправления некоторых неясностей и опечаток в ней.

М. Н. Олевский

581. **Линейные дифференциальные уравнения, удовлетворяющиеся некоторыми модуляторными эллип-**

тическими функциями. **Тушар, Ван-дер-Поль** (Equations differentielles linéaires vérifiées par certaines fonctions modulaires elliptiques. Touchard J., van der Pol Balth), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 2, 166—169; Indagationes math., 1956, 18, № 2, 166—169 (франц.)

Рассматриваются функции, определенные разложением

$$\alpha_{2l-1} = 1 + \frac{2}{\zeta(1-2l)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \sigma_{2l-1}(n),$$

где $t = -2\pi i\tau$, $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\mu + \nu i$, $\nu > 0$; в частности,

$$\alpha_3^3(t) - \alpha_5^2(t) = \frac{(12)^3 \omega_1^{12}}{\pi^{12}} (g_2^3 - 27 g_3^2).$$

Авторы показывают, что функции

$$y_k = [\alpha_3^3(t) - \alpha_5^2(t)]^{-k/12}, \quad k = 1,2,3,\ldots,12, \qquad (1)$$

удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям $k+1$-го порядка. Предварительно доказывается, что для функции $f(\tau)$, удовлетворяющей соотношению

$$f(\tau') = \frac{\lambda}{(a+b\tau)^m} f(\tau), \quad \tau' = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}, \quad ad - bc = 1,$$

имеет место дифференциальное равенство

$$\frac{1}{f(\tau_1)} \frac{d^{m+1} f(\tau_1)}{d\tau^{m+1}} = (a+b\tau)^{2m+2} \frac{1}{f(\tau)} \frac{d^{m+1} f(\tau)}{d\tau^{m+1}}. \qquad (2)$$

Так как функция $y$, определяемая равенством (1), удовлетворяет соотношению

$$y(\tau') = \frac{\lambda}{(a+b\tau)^k} y(\tau),$$

то к ней применима формула (2).

Пользуясь основными теоремами теории модулярных функций, авторы показывают, что правая часть равенства (2) приводится к полиному от $\alpha_3(t)$ и $\alpha_5(t)$ и таким образом получаются искомые дифференциальные уравнения.

В заключение приводится таблица этих уравнений для $k = 1, 2, \ldots, 12$. Например:

$$k=1, \quad (12)^2 \frac{dy_1^2}{dt^2} = \alpha_3(t)\, y_1,$$

$$k=2, \quad 6^3 \frac{d^3 y_2}{dt^3} = \alpha_5(t)\, y_2 \text{ и т. д.}$$

Н. С. Кошляков

582. **Асимптотическое разложение присоединенных функций Лежандра $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ при $|n| \to \infty$ и $|\mu \pm 1| \to 0$.** **Робен** (Développements asymptotiques des fonctions associées de Legendre, $P_n^m(\mu)$ et $Q_n^m(\mu)$, pour $|n| \to \infty |\mu \pm 1| \to 0$. Robin Louis), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 7, 868—870 (франц.)

Используя известные соотношения между присоединенными функциями Лежандра $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ и их связь с функциями Бесселя при $n \to \infty$ и $\mu \to \pm 1$, автор получает асимптотические разложения присоединенных функций Лежандра, выраженные через функции Бесселя различного вида и справедливые для всех $m$, $|n| \to \infty$, $-\pi < \arg n < \pi$ и $|\mu \pm 1| \to 0$. При этом

1) для $\mu > 1$ и $|\mu - 1| \to 0$ функция $Q_n^m(\mu)$ выражается через функции $K_i(x)$, где $x = (2n+1) \times \left[\frac{1}{2}(\mu - 1)\right]^{1/2}$; $i = m, m-1, m-2, m-3$;

2) для $\mu < 1$ и $|\mu - 1| \to 0$ функция $Q_n^{-m}(\mu)$ выражается через функции $Y_i(x)$, где $x = (2n+1)\sin\frac{\theta}{2}$; $\mu = \cos\theta$; $(\theta \to 0)$, $i = m, m+1, m+2, m+3$;

3) для $\mu < 1$ и $|\mu + 1| \to 0$ функции $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ выражаются через функции $I_m(x)$ и $Y_m(x)$, где $x = (2n+1)\cos\frac{\theta}{2}$; $\mu = \cos\theta$; $(\theta \to \pi)$, $i = m, m-1, m-2, m-3$.

Э. Л. Блох

583. **Новые разложения в конечные ряды для полиномов Лежандра. Гуд** (A new finite series for Legendre polynomials. Good I. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 385—388 (англ.)

Элементарным путем автор получает новое представление полиномов Лежандра $P_N(x)$ в виде конечной суммы:

$$P_N(x) = \frac{1}{t} \sum_{r=0}^{t-1} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\frac{2\pi r}{t}\right)^N \qquad (1)$$

при $t > N$.

Это соотношение можно рассматривать как обобщение известной интегральной формулы Лапласа для полиномов Лежандра (последняя получается из (1) переходом к пределу при $t \to \infty$). Н. П. Купцов

584. **О решениях обобщенного дифференциального уравнения Лагерра. Янкович** (On solutions of the generalized Laguerre differential equation. Jankovič Z.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1955, 2, № 2, 58 (англ.)

Обобщенные функции Лагерра $Q_\nu^s$ представляют собой частные решения уравнения вырожденных гипергеометрических функций

$$xy'' + (s+1-x)y' + \nu y = 0$$

и зависят от двух параметров $s$ и $\nu$.

Автор выводит из этого уравнения рекуррентные формулы для этих решений, имеющие место для всех допустимых значений параметров $s$ и $\nu$ и содержащие два произвольных множителя $c_\nu$ и $f(\nu + s)$, из которых последний может быть определим для специального ряда рассматриваемых решений.

Рекуррентные формулы позволяют построить явные выражения решений для целых значений параметра $\nu = n$ (обобщенные полиномы Лагерра $Q_n^s$ и обычные полиномы Лагерра $Q_n^0$). Н. С. Кошляков

585. **О рядах произведений трех полиномов Гегенбауэра. Лакшмана-Рао** (On a series of products of three Gegenbauer polynomials. Lakshmana Rao S. K.), J. Indian Inst. Sci., 1955, 37, № 4, B338—B340 (англ.)

Доказывается следующая формула:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\nu} C_n^\nu(x) C_n^\nu(y) C_n^\nu(z) = \begin{cases} b_\nu [(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{1/2-\nu} g^{\nu-1}, & g > 0, \\ 0, & g < 0, \end{cases}$$

где $[\Gamma(n+2\nu)]^2 a_{n,\nu} = (n!)^2 (n+\nu)$, $[\Gamma(\nu)]^4 b_\nu = 4^{1-2\nu}\pi$, $g \equiv 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$, $-1 < x, y, z < 1$, $\nu > 0$.

При $2\nu = 1$ она обращается в формулу, установленную Винти (Vinti J. P., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 19—23). В работе $\Gamma(\nu)$ обозначается символом $\Gamma\nu$.
М. Н. Олевский

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**586. Вычисление преобразований Фурье. Линвилл, Скотт, Гиймен** (Evaluation of Fourier transforms. Linvill W. K., Scott R. E., Guillemin E. A.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 3, 243—250 (англ.)

Описываются приближенные методы нахождения преобразований Фурье и указываются электрические схемы, позволяющие находить спектральную функцию преобразования Фурье.
Л. Я. Цлаф

**587. Обобщенные конечные косинус-преобразования Фурье. Черчилл** (Generalized finite Fourier cosine transforms. Churchill R. V.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 1, 85—94 (англ.)

Пусть преобразование $T\{F(x)\}$ определяется соотношением

$$T\{F(x)\} = \int_0^1 F(x)\cos k_n x\,dx = f(n),\quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $k_n$ — характеристические числа задачи Штурма — Лиувилля:

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0,\quad y'(0) = 0,\quad hy(1) + y'(1) = 0,\quad h \neq 0.$$

Назовем сверткой двух ограниченных интегрируемых функций $F(x)$ и $G(x)$ выражение

$$X[F, G] = \frac{1}{2}\int_0^1 [F_0(x+t) + F_0(x-t)]\,G(t)\,dt -$$

$$- h\int_{1-x}^1 F_0(x+t)\,G_h(t)\,dt.$$

где $F_0(x)$ — четное периодическое с периодом 2 продолжение функции $F(x)$ и

$$G_h(x) = e^{hx}\int_x^1 e^{-ht}G(t)\,dt.$$

Имеет место соотношение $f(n)\,g(n) = T\{X[F, G]\}$. Далее приводится таблица $T$-операционных соотношений и решается задача о продольном изгибе упругого бруса.
Л. Я. Цлаф

**588. Интеграл Фурье. Гиймен** (The Fourier integral — a basic introduction. Guillemin E. A.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 3, 227—230 (англ.)

Вводная статья к серии статей в указанном журнале, посвященной приложениям интеграла Фурье.
Л. Я. Цлаф

**589. Об усилении $C_\varkappa$-метода для интеграла Лапласа на вертикальных прямых. Пейеримхофф** (Über das Anwachsen der $C_\varkappa$- Mittel von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden. Peyerimhoff Alexander), Math. Ann., 1954, **128**, № 2, 138—143 (нем.)

Интеграл Лапласа — Стилтьеса $\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ (где $\alpha(t)$ — функция ограниченной вариации на конечном интервале) $C_\varkappa$ — суммируем ($\varkappa \geqslant 0$) в точке $s = s_0$, если существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\varkappa}\int_0^x (x-t)^\varkappa e^{-s_0 t}\,d\alpha(t).$$

Абсцисса $C_\varkappa$-суммируемости есть число $\beta_\varkappa$, удовлетворяющее следующим условиям: для $R(s) > \beta_\varkappa$ вышеуказанный предел существует и является аналитической функцией $f(s) = f(\sigma + i\tau)$, если же $R(s) < \beta_\varkappa$, то предела не существует. Обозначим через $\mu(\sigma)$ верхнюю грань таких чисел $\xi$, для которых имеем соотношение

$$|f(\sigma + i\tau)| = O(|\tau|^\xi) \text{ при } |\tau| \to \infty.$$

Известна следующая оценка: $\mu(\sigma) \leqslant \varkappa + 1$ $(\sigma > \beta_\varkappa)$. Предварительные частные результаты многих авторов показывают, что вышеуказанную оценку нельзя улучшить.

В реферируемой статье автор доказывает это в следующей строгой и общей форме:

Теорема 1. Пусть $\eta(\tau)$ — любая положительная неограниченная при $\tau \to \infty$ функция. Тогда для каждого $\varkappa \geqslant 0$ существует интеграл Лапласа $\int_0^\infty e^{-st}a(t)\,dt$ (где $a(t)$ — интегрируемая функция в конечном интервале), суммируемый $C_\varkappa$-методом к значению $f(s)$ при $R(s) > 0$, для которого

$$f(\sigma + i\tau) \neq O(1)\frac{\tau^{\varkappa+1}}{\eta(\tau)},\text{ когда } \tau \to \infty,$$

для всех рациональных $\sigma > 0$.

Теорема 2. Аналогичные результаты получены для ряда Дирихле

$$\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu e^{-\mu_\nu s}$$

Доказательства проводятся методами функционального анализа.

Автор рассматривает исследуемые интегралы как линейные функционалы в соответственно построенных банаховых пространствах, оценивает норму снизу и применяет теорему Банаха — Штейнхауза
C. Ryll-Nardzewski

**590. Теорема операционного исчисления и некоторые интегралы, содержащие лежандровы, бесселовы и *E*-функции. Ратхи** (A theorem in operational calculus and some integrals involving Legendre, Bessel and *E*-functions. Rathie C. B.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, **2**, № 4, 173—179 (англ.)

Доказывается сначала одна теорема, относящаяся к преобразованию Лапласа, и затем применяется к вычислению интегралов от специальных функций. Например:

$$\int_0^\infty \cosh\nu\theta\,(p^2\cosh^2\theta - 1)^{-\frac{1}{2}m}P_n^{-m}(p\cosh\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma_*\left(\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\Gamma_*\left(\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(m + 1/2)\,\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m-n)} \times$$

$$\times p^{-m-n-1}2^{m-\frac{2}{2}}F_1\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2};\ m + 1/2;\ 1 - p^{-2}\right),$$

$$R(m \pm \nu + n + 1) > 0,\quad R(m \pm \nu - n) > 0,\quad R(p) > 0,$$

$$|1 - p^{-2}| < 1,$$

$$\int_0^\infty \cosh\nu\theta\,(p^2\cosh^2\theta - 1)^{-\frac{1}{2}m}Q_n^m(p\cosh\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_*\left(\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times 2^{m-2}p^{-m-n-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};\quad n+\frac{3}{2};\ p^{-2}\right),$$

$$R(m\pm\nu+n-1)>0,\ R(p)>0,$$

$$\int_0^\infty \cosh\nu\theta\,(\operatorname{sech}\theta)^{m+\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(x\operatorname{sech}\theta)\,d\theta =$$

$$=\frac{\Gamma_*\left(\frac{1}{2}m\pm\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma(m+n+1)}\,2^{m-\frac{3}{2}}x^{n+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times {}_2F_3\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n+1,\quad n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{4}x^2\right),$$

$$R(m\pm\nu+n+1)>0,\quad R(x)>0,$$

$$\int_0^\infty \cosh\nu\theta\,(\cosh\theta)^{-\gamma}E\{l;\alpha_r:m;\rho_s:\lambda(\cosh\theta)^{2n}\}\,d\theta =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,E(l+2n;\ \alpha_2:m+2n;\ \rho_s:\lambda),$$

$$(\gamma\pm\nu)>0,\quad R(\lambda)>0,\quad \alpha_{l+k+1}=(\gamma+\nu+2k)/2n,$$

$$\rho_{l+n+k+1}=(\gamma-\nu+2k)/2n,\quad \rho_{m+k+1}=(\gamma+1+2k)/2n,$$

$$\rho_{m+n+k+1}=(\gamma+2k)/2n,\ k=0,1,2,\ldots,(n-1),$$

где

$$\Gamma_*(a\pm b)=\Gamma(a+b)\Gamma(a-b),$$

$$\Gamma_*(a\pm b\pm c)=\Gamma(a+b+c)\Gamma(a+b-c)\Gamma(a-b+c)\Gamma(a-b-c).$$

Н. С. Кошляков

**591. Теоремы операционного исчисления и некоторые свойства обобщенных $K$-функций Бейтмана.** Саркар (On certain theorems on operational calculus and some properties of the generalised $K$-function of Bateman. Sarkar G. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, № 2, 81—86 (англ.)

Дается доказательство двух теорем из операционного исчисления, относящихся к преобразованию Лапласа, и применение этих теорем к нахождению интегральных формул. Так, например

$$\int_0^1 P_n^\lambda(1-2y^2)(1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}y^{2\lambda+2\nu}e^{\frac{1}{2}xy^2}k_{2s}^{2\lambda}\left(\frac{1}{2}xy^2\right)dy =$$

$$=\frac{(-1)^{n+s-l-1}\pi^{1/2}\Gamma(n+2\lambda)\Gamma(\nu+2l+2)}{2^{2\lambda}n!\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2l+2)\,\Gamma(\nu-n+2l+2)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\nu+\lambda+2l+\frac{3}{2}\right)x^{2l+1}}{\Gamma(n+2\lambda+\nu+2l+2)}\times$$

$$\times {}_3F_3\left(\begin{matrix}l-s+1,\ \nu+2l+2,\ \lambda+\nu+2l+3/2;\\ 2l+2,\ \nu-n+2l+2,\ n+2\lambda+\nu+2l+2;\end{matrix}\ x\right),$$

$$\nu+\lambda+2l+3/2>0;$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x}x^{-(m+1/2)}J_{2m+1}(2(xy)^{1/4})\,I_{2m+1}(2(xy)^{1/4})\times$$

$$\times K_{2(m+r+1)}^{2m}\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{(-1)^r2^{2m}\{\Gamma(2m+2)\}^2}{\Gamma(2m+r+2)\,\Gamma(2m+2r+2)}\times$$

$$\times y^{m+\frac{1}{2}+r}{}_0F_2(2m+2r+2,\ 2m+2r+3;\ y),$$

где $e^{\frac{1}{2}x}k_{2n}^{2l}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{(-1)^{n-l-1}x^{2l+1}}{\Gamma(2l+2)}\,{}_1F_1(l-n+1;\ 2l+2;\ x)$,

$x>0$, $n\geqslant l+1$; $n-l$ — положительное целое число.

Н. С. Кошляков

**592. О применении неполной гамма-функции в операционном исчислении.** Тоскано (Sul complemento della funzione gamma incompleta nel calcolo simbolico. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 484—488 (итал.)

Используя очевидное соотношение

$$\Gamma(1-\alpha)\,pe^p\Gamma(\alpha,p)\div\!\!\to\frac{t^{-\alpha}}{t+1};\quad \alpha<1,$$

где $\Gamma(\alpha,p)=\int_p^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$, и теорему свертывания, автор получает изображение функции

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\frac{t^{1-\alpha-\beta}}{(t+1)(t+2)}\left[{}_2F_2\left(1,1-\alpha,2-\alpha-\beta,\frac{t}{t+1}\right)+\right.$$

$$\left.+{}_2F_2\left(1,1-\beta,2-\alpha-\beta,\frac{t}{t+1}\right)\right]\ \div\!\!\to pe^{2p}\Gamma(\alpha,p)\Gamma(\beta,p),$$

где $\alpha<1$, $\beta<1$, ${}_2F_2(\alpha,\beta,\gamma,z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. При $\alpha=\beta=0$ и $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ получаются изображения функций

$$\frac{2\ln(t+1)}{t+2}\ \text{и}\ \frac{1}{(t+2)\sqrt{t+1}},$$

найденные ранее Поли (Poli L., Ann. Soc. sci. Bruxelles, 1954, **68**, 13—22). Задавая $\alpha$ и $\beta$ ряд частных значений, автор находит изображение некоторых других функций.

Э. Л. Блох

**593. Тауберова теорема для преобразования Лапласа.** Ганелиус (Un théorème taubérien pour la transformation de Laplace. Ganelius Tord), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 6, 719—721 (франц.)

Теорема. Пусть $\alpha(\lambda)$ $(0\leqslant\lambda<\infty)$ — вещественная функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале, $Q(\omega)$, $\varphi(\omega)$ — положительные функции, определенные при $\omega>0$, причем $Q(\omega)/\omega$ монотонно растет к бесконечности при $\omega\uparrow\infty$, а $\varphi(\omega)=\omega^\nu L(\omega)$, где $\nu$ — вещественное число, а $L(\omega)$ — медленно растущая функция в смысле Караматы (это значит, что $L(\omega)$ непрерывна и $L(\omega t)/L(\omega)\to 1$ $(\omega\to\infty)$ при каждом фиксированном, $t>0$). Если $q(\omega)$ есть функция, обратная $Q(\omega)$, то из

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{\omega}}d\alpha(\lambda)=O\left[\omega\varphi(\omega)\,e^{-2\frac{Q(\omega)}{\omega}}\right]\quad(\omega\to\infty)$$

и тауберова условия

$$\sup_{\omega\leqslant\Omega\leqslant\omega+q(\omega)}\int_\omega^\Omega d\alpha(\lambda)=O[\varphi(\omega)\,q(\omega)]\quad(\omega\to\infty)$$

следует

$$\int_0^\omega(\omega-\lambda)^{p-1}d\alpha(\lambda)=O\{\varphi(\omega)[q(\omega)]^p\}\quad(\omega\to\infty)$$

для каждого целого $p\geqslant 1$. Указывается, что идея доказательства основана на односторонних $L_1$-приближениях (Freud G., Acta Math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, 299—307; РЖМат, 1954, 5159).

Б. И. Коренблюм

594. Об особенностях преобразования Меллина. Дёч (Über die Singularitäten der Mellin-Transformierten. Doetsch Gustav), Math. Ann., 1954, 128, № 2, 171—176 (нем.)

Предположим, что преобразование Меллина

$$\varphi_j(s)=\int_0^\infty z^{s-1}\Phi_j(z)\,dz \quad (j=1,2)$$

может быть аналитически продолжено на верхнюю полуплоскость $\Re s<x_j$, где оно имеет полюса $-\lambda_{j\nu}(\Re\lambda_{j_\bullet}<\Re\lambda_{j_1}<\ldots\to\infty)$ с главными частями

$$\frac{c_{j\nu}^{(1)}}{s+\lambda_{j\nu}}+\ldots+\frac{c_{j\nu}^{(l_{j\nu})}}{(s+\lambda_{j\nu})^{l_{j\nu}}}.$$

Автор доказывает, что преобразование Меллина произведения $\Phi_1\Phi_2$ можно аналитически продолжить на полуплоскость $\Re s<x_1+x_2$, где оно имеет полюса $-\lambda_{1\mu}-\lambda_{2\nu}$ с главными частями

$$\sum_{\alpha=1}^{l_\omega}\sum_{\beta=1}^{l_{2\mu}}\binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\frac{c_{1\nu}^{(\alpha)}\,c_{2\mu}^{(\beta)}}{(s+\lambda_{1\nu}+\lambda_{2\mu})^{\alpha+\beta-1}}.$$

Если различные $-\lambda_{1\nu}-\lambda_{2\mu}$ принимают одинаковые значения, то соответствующие главные части складываются.

Теорема доказана для функций $\Phi_1$ и $\Phi_2$, удовлетворяющих определенным натуральным асимптотическим неравенствам в точках 0 и $\infty$. J. Mikusiński

595. Преобразование Ганкеля функций, равных нулю вне конечного интервала. Гриффит (Hankel transforms of functions zero outside a finite intervall. Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1955 (1956), 89, № 2, 109—115 (англ.)

Если преобразование Ганкеля $G(u)$ функции $q(x)$ определяется как $G(u)=\text{l.i.m.}\int_0^\infty xI_\nu(ux)g(x)dx$, $\nu>-1/2$, то доказывается, что $g(x)$ равно нулю для почти всех $x>A$ и $x^{1/2}g(x)$ принадлежит к $L^2(0,A)$ тогда и только тогда, когда $G(z)$ аналитична для $z$ в области $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$, $|z|>\varepsilon>0$, $z^{1/2}G(z)=0(e^{A\,\mathrm{Im}\,z})$ при $|z|\to\infty$, $\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$; $G(ue^{i\pi})=e^{i\pi\nu}G(u)$, $u>0$; $u^{1/2}G(u)\subset L^2(0,\infty)$ и $|G(z)|=O(|z|^\nu)$ при $z\to 0$. Л. Я. Цлаф

596. О представлении функции посредством преобразования Пуассона. Стандиш (On the representation of a function by a Poisson transform. Standish Charles), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 1, 95—104 (англ.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для представления функции $f(x)$ в форме

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(y)}{1+(x-y)^2},$$

где $\alpha(y)$ ограниченной вариации на $(-\infty,\infty)$; или же в форме

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(y)\,dy}{1+(x-y)^2},$$

где $g(y)$ либо интегрируема на $(-\infty,\infty)$, либо ограничена на $(-\infty,\infty)$, либо принадлежит $L_p$ для некоторого $p>1$. Л. Я. Цлаф

597. Операционное исчисление в современной науке. Микусинский (Rachunek operatorów na tle aktualnych kierunków matematyki. Mikusiński J.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, Ser. 1, 1, № 2, 344—370 (польск.; рез. русс., англ.)

Обзорная статья о различных интерпретациях операционного исчисления, в особенности алгебраической интерпретации, развитой автором. Статья содержит также основные свойства алгебраических полей операторов вместе с приложениями к обыкновенным дифференциальным уравнениям и элементы операционного анализа с приложением к дифференциальным уравнениям с частными производными.

Автор указывает на связь операционного исчисления с преобразованием Лапласа, с теорией аналитических функций, с теорией моментов, с классическим анализом и теорией распределения Шварца, в $B_0$ пространствах Мазура и Орлича.

Список литературы содержит 29 названий. S. Drobot

598 К. Элементы операционного исчисления. Лекции. Римский-Корсаков Б. С. Всес. заоч. энерг. ин-т. М., 1956, 125 стр., илл. беспл.

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

599. Алгорифм для решения проблемы перевозок. Глейзал (An algorithm for solving the transportation problem. Gleyzal A.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1955, 54, № 4, 213—216 (англ.)

Предлагается конечный алгорифм для решения проблемы составления наиболее рационального плана перевозок однородного груза от нескольких пунктов производства к ряду пунктов потребления. Заданные числа, выражающие объемы производства и потребления в каждом из пунктов и затраты по перевозке единицы груза из каждого пункта в любой другой, предполагаются целыми. Допускаются планы, в которых количества груза, перевозимого из одного пункта в другой, также выражаются целыми числами.

В вычислительной схеме автора, в отличие от других (см., например, Flood M. M., РЖМат, 1954, 2603), комбинаторные идеи играют большую роль, чем теория линейных неравенств. Г. Ш. Рубинштейн

См. также: 283, 293, 369, 370, 423, 445, 466, 468, 476, 478 К, 527, 652, 910

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

600. Экстремальные множества и гиперплоскости максимальной опоры. Гика (Mulţimi extremale şi hiperplane de sprijin maximale. Ghika Al.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, sec. mat. şi. fiz., 1955, 7, № 1, 59—64 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть $x$ есть точка границы выпуклого тела $A$, расположенного в действительном топологическом векторном пространстве $E$. Гиперплоскостью максимальной опоры тела $A$ в точке $x$ называется такая гиперплоскость $H$ опоры тела $A$, что $H\ni x$ и если $H'$ есть гиперплоскость опоры тела $A$, $H'\ni x$ и $H'\supset A\supseteq H\,|\cap A$, то $H'=H$. Доказывается теорема: для любых $A$ и $x$ существует по крайней мере одна гиперплоскость максимальной опоры З. Л. Лейбензон

601. Свойства отделения выпуклых конусов. Кли (Separation properties of convex cones. Klee V. L., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 313—318 (англ.)

В линейном топологическом пространстве $E$ замкнутый выпуклый конус с вершиной в нуле $\phi$ пространства $E$ называется $\phi$-конусом. Множество $A \cap -A$ обозначается через $A'$. Доказываются следующие теоремы: 1. Пусть $A$ и $B$ суть $\phi$-конусы в локально выпуклом линейном топологическом пространстве $E$, $A$ локально компактен и $A \cap B = \{\phi\}$. Тогда существует такой непрерывный линейный функционал $f$, определенный на $E$, что $f < 0$ на $A \setminus A'$, $f = 0$ на $A' \cup B'$ и $f \geqslant 0$ на $B \setminus B'$. 2. Пусть $A$ и $B$ суть $\phi$-конусы в сепарабельном нормированном линейном пространстве $E$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда верно заключение теоремы 1 : $f > 0$ на $B \setminus B'$. 3. Существуют такие $\phi$-конусы $A$ и $B$ в пространстве Гильберта, что $A' = B' = A \cap B = \{\phi\}$ и конусы $A$ и $B$ нельзя разделить гиперплоскостью (т. е. нельзя провести между $A$ и $B$ гиперплоскость $P$ так, что $A \cap P = B \cap P = \{\phi\}$). З. Л. Лейбензон

**602. Ограниченные множества в ($F$)-пространствах.** Дьёдонне (Bounded sets in ($F$)-spaces. Dieudonné Jean), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 729—731 (англ.)

В предположении справедливости гипотезы континуума строится несепарабельное метризуемое локально выпуклое пространство $E$, все ограниченные подмножества которого сепарабельны. $E$ неполно; в его пополнении имеется ограниченное множество, не содержащееся в замыкании никакого ограниченного множества из $E$. Д. А. Райков

**603. Два замечания к слабой компактности.** Птак (Two remarks on weak compactness. Pták Vlastimil), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 532—545 (англ.; рез. русс.)

Пусть $X$ —полное локально выпуклое пространство, $B$ — ограниченное множество в $X$. Для того чтобы замыкание $B$ было слабо бикомпактно, (необходимо и) достаточно, чтобы $B$ удовлетворяло «условию ($C$)», которое геометрически можно выразить следующим образом: любое счетное подмножество максимального центрированного семейства гиперплоскостей таких, что каждая их слабая окрестность пересекает $B$, имеет с $B$ непустое пересечение. Если $B$ выпукло, то условие ($C$) можно заменить более слабым условием ($H$): каждое счетное множество гиперплоскостей, образующее вместе с $B$ центрированное семейство, имеет с $B$ непустое пересечение. Первая теорема обобщает прежний результат автора (РЖМат, 1955, 4545), вторая — теорему Флойда и Кли (РЖМат, 1956, 3907). Д. А. Райков

**604. Полнота, совершенная полнота и $k$-пространства.** Коллинс (Completeness, full completeness, and $k$ spaces. Collins Heron S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 832—835 (англ.)

Вполне регулярное топологическое пространство $E$ называется псевдоконечным, если каждое бикомпактное множество в $E$ конечно, полукомпактным, если в $E$ существует такое счетное семейство бикомпактных множеств, что каждое бикомпактное множество содержится в каком-либо члене этого семейства, и $k$-пространством, если топологию в $E$ нельзя усилить, не нарушив бикомпактности какого-либо множества. Для полукомпактного $E$ следующие условия равносильны: $C(E)$ (пространство всех непрерывных вещественных функций на $E$ с «компактно-открытой» топологией) полно, $C(E)$ совершенно полно (РЖМат, 1956, 8130), $E$ есть $k$-пространство. Для псевдоконечного $E$ каждое из этих условий равносильно дискретности пространства $E$. Высказывается предположение, что если $C(E)$ совершенно полно, то $E$ паракомпактно. Д. А. Райков

**605. Операторы умножения.** Кристеску (Operatori-produs. Cristescu Romulus), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1955, № 8, 23—33 (рум.; рез. русс., франц.)

Изучаются положительные биаддитивные операторы $z = \langle x, y \rangle$, отображающие произведение двух $K$-линеалов $X$ и $Y$ в третий $Z$. Устанавливается ряд их свойств, аналогичных свойствам произведения элементов в $K$-линеале. Даются условия, при которых оператор $\langle x, y \rangle$ оказывается билинейным. Приводятся некоторые приложения к функциональным уравнениям. Б. З. Вулих

**606. Псевдонормы в теории линейных топологических пространств.** Ландсберг (Pseudonormen in der Theorie der linearen topologischen Räume. Landsberg Max), Math. Nachr., 1955, 14, № 1, 29—38 (нем.)

Рассматриваются связи между псевдонормами и окрестностями нуля в топологических линейных пространствах, а также топологические линейные пространства второй категории в себе. Доказывается, что метризуемое топологическое линейное пространство, обладающее достаточным множеством линейных функционалов, локально выпукло тогда и только тогда, когда всякое слабо ограниченное множество в нем ограничено; достаточно даже ограниченности каждой последовательности, слабо сходящейся к нулю. Д. А. Райков

**607. Мультинормированные пространства — объект, дуальный к локально выпуклым пространствам.** Маринеску (Espaces polynormés, duals des espaces localement convexes. Marinescu Georges), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 24, 1693—1695 (франц.)

Локально выпуклая топология на векторном пространстве $E$, как известно, может быть задана семейством полунорм $\{|x|_\alpha\}_{\alpha \in A}$, удовлетворяющим условиям: а) если $x \neq 0$, то $|x|_\alpha \neq 0$ для некоторого $\alpha \in A$, и б) для любых $\alpha, \beta \in A$ существует такое $\gamma \in A$, что $|x|_\alpha \leqslant |x|_\gamma$ и $|x|_\beta \leqslant |x|_\gamma$. Это семейство полунорм определяет на сопряженном пространстве $E^*$ семейство «обобщенных норм» $|x^*|_\alpha = \sup_{|x|_\alpha \leqslant 1} |\langle x, x^* \rangle|$ (могущих принимать и значение $+\infty$). Оно удовлетворяет, следующим дуальным условиям: а*) $|x^*|_\alpha < +\infty$ для некоторого $\alpha \in A$ и б*) для любых $\alpha, \beta \in A$ существует такое $\gamma \in A$, что $|x^*|_\gamma \leqslant |x^*|_\alpha$ и $|x^*|_\gamma \leqslant |x^*|_\beta$. Векторное пространство $E^*$, снабженное семейством обобщенных норм, удовлетворяющим этим условиям, называется мультинормированным. На $E^*$ вводится псевдотопология: сходящейся считается последовательность, сходящаяся хотя бы по одной обобщенной норме. Строится также объект, дуальный к совокупности $\mathscr{L}(E)$ всех непрерывных линейных операторов на $E$, и устанавливается, что если оператор $L \in \mathscr{L}(E)$ обладает непрерывным обратным, то уравнение $L^*(y^*) = x^*$, где $L^*$ — сопряженный оператор, всегда разрешимо. Д. А. Райков

**608. Два условия, равносильные нормируемости.** Вильямсон (Two conditions equivalent to normability. Williamson J. H.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 1, 111—113 (англ.)

Пусть $E$ — локально выпуклое пространство; $L$ — линейное семейство непрерывных линейных отображений $E$ в топологическое линейное пространство $F$ и $M$ — алгебра непрерывных линейных отображений $E$ в себя, причем $L$ и $M$ содержат все отображения вида $(y \otimes u)(x) = u(x)\, y$, где $u \in E'$, $y \in F$, соответственно $y \in E(E'$ — сопряженное к $E)$. $E$ нормируемо тогда и только тогда, когда: 1) $Tx$ ($T \in L$, $x \in E$) непрерывно по совокупности обоих аргументов в некоторой линейной топологии на $L$ или соответственно 2) умножение в $M$ непрерывно в некоторой $\mathfrak{S}$-топологии (РЖМат, 1955, 2760). Последний результат был независимо получен Блэром (РЖМат, 1956, 3145). Д. А. Райков

609. **Проекции в пространстве ($m$). Джеймс** (Projections in the space ($m$). James Robert C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, 899—902 (англ.)

Проекцией в пространстве Банаха $B$ называется линейное (ограниченное) идемпотентное отображение $B$ в себя. Подпространства $M$, $N \subset B$ называются дополняющими, если существует такая проекция $P$, что $P(B)=M, P(N)=\{0\}$. Собчиком (Sobczyk A., Bull. Amer. Math. Soc., 1941, **47**, 938—947) было высказано предположение, что в пространстве ($m$) всех ограниченных последовательностей или вообще не существует сепарабельных дополняющих подпространств или, в крайнем случае, такое подпространство рефлексивно.

В работе сформулированы две теоремы, имеющие отношение к поставленному вопросу: 1) Проекция пространства ($m$) на сепарабельное подпространство не может иметь нормы, равной единице. 2) При определенных ограничениях общего характера дополняющее сепарабельное подпространство пространства ($m$) рефлексивно. Г. П. Акилов

610. **Функции Хара и проблема базиса в пространствах Банаха. Эллис, Гальперин** (Haar functions and the basis problem for Banach spaces. Ellis H. W., Halperin Israel), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 28—39 (англ.)

Используются понятия функции длины и сглаженной функции длины $\lambda$, а также пространства $L^{\lambda}$, введенные авторами ранее (РЖМат, 1954, 4489). Доказывается существование базиса в сепарабельном $L^{\lambda}$ при условии, что $\lambda$ есть сглаженная функция длины, а также при более общих предположениях относительно функции длины $\lambda$. Конструкция базиса является обобщением конструкции базиса функций Хара для классических пространств $L^{(p)}$ (Schauder J., Math. Z., 1928, **28**, 317—320). Д. П. Мильман

611. **О понятии дизъюнктных линейных многообразий в пространстве Банаха. Дель-Паскуа** (Su una nozione di varietà lineari disgiunte di uno spazio di Banach. Del Pasqua Dario), Rend. mat. e applic., 1955, **13**, № 3—4, 406—422 (итал.)

Линейные многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ банахова пространства $\mathfrak{B}$ называются дизъюнктными, если существует такое $k>0$, что

$$\| f+g \| \geqslant k \| g \| \qquad (f \in \mathfrak{M},\ g \in \mathfrak{N}).$$

Изучаются простейшие их свойства. Г. П. Акилов

612. **Обобщение скалярного произведения. Ритт** (A generalization of inner product. Ritt R. K.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 1, 23—26 (англ.)

Для элементов банахова пространства $B$, сопряженное к которому равномерно выпукло, строится скалярное произведение $(x, y)$, являющееся линейным функционалом относительно $y$ при каждом фиксированном $x \in B$ и непрерывно зависящее от $x$ при каждом $y \in B$. В случае, когда $B$ — гильбертово пространство, это обобщение совпадает с обычным скалярным произведением. Кроме того, в работе устанавливается, что если $B^*$ строго выпукло, то для того чтобы $B$ было гильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы производные $\frac{d}{dt} \| x+ty \|_{t=0}$ и $\frac{d}{dt} \| y+tx \|_{t=0}$ существовали и были равны для любых $x$, $y \in B(\| x \| = \| y \| = 1)$.

Г. П. Акилов

613. **Топология функциональных пространств. Райков Д. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 55

614. **О рефлексивности полунепрерывных норм. Мори, Амемия, Накано** (On the reflexivity of semi-continuous norms. Mori Tuyosi, Amemiya Ichirô, Nakano Hidegorô), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 684—685 (англ.)

Теорема Накано: каждая непрерывная псевдонорма рефлексивна, доказывается в предположении полунепрерывности псевдонормы. А. Н. Балуев

615. **Теорема о сходимости с условием ограниченности. Мак-Шейн** (A dominated-convergence theorem. McShane E. J.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 2, 325—331 (англ.)

Теорема о предельном переходе для интеграла, построенного автором в частично упорядоченных множествах (РЖМат, 1955, 5168), а также структурные свойства суммируемых элементов доказываются при более слабых предположениях, чем первоначально. В частности, в области $G$ значений интеграла вводится аксиома отделимости типа аксиомы Хаусдорфа: Если $a$, $b \in G$ и $a<b$, то существуют непересекающиеся открытые множества $V_a$ и $V_b$, содержащие $a$ и $b$ соответственно. В работе используется введенное автором понятие предела синтакса, (РЖМат, 1955, 1124). Б. З. Вулих

616. **О дизъюнктности элементов в пространстве функций ограниченной вариации. Егорова И. А.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед., ин-та, 1955, **103**, 151—159

В $K$-пространстве $V$ функций ограниченной вариации, заданных на отрезке $[a, b]$, доказываются следующие условия, достаточные для дизъюнктности двух его элементов $x=x(t)$ и $y=y(t)$: 1) $x(a)y(a)=0$; 2) $x(t)$ и $y(t)$ не имеют общих точек разрыва; 3) $|x|'(t) \cdot |y|'(t)=0$ почти всюду на $[a,b]$ ($|x|(t)$ — функция-модуль, определяемая для функции $x(t)$ формулой $|x|(t)=|x(a)|+\operatorname{var}_a^t x(\tau)$); 4) совокупность значений хотя бы одной из функций $|x|(t)$ или $|y|(t)$ на множестве тех точек, где $|x|'(t)=|y|'(t)=+\infty$, имеет меру 0. Условия 1)—3) также и необходимы для дизъюнктности $x$ и $y$. Доказывается еще ряд теорем, касающихся структуры $K$-пространства $V$, в частности устанавливается его разложение на три компоненты: абсолютно непрерывных функций, сингулярных функций и функций скачков. Б. З. Вулих

617. **Односторонние окрестности в $K$-пространствах. Ширяева Е. В.**, Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, № 14, 29—42

Правой $A$-окрестностью элемента $z$ из $K$-пространства $X$ называется множество $A_0$, обладающее свойствами: 1) если $x \in A_0$, то $x \geqslant z$; 2) если $x_0 \in A_0$, то из $z \leqslant x \leqslant x_0$ следует $x \in A_0$; 3) если $x > z$, то существует такое число $\alpha > 0$, что $z+\alpha(x-z) \in A_0$. Циклом операции $U(x)$ из $X$ в $X$ называется совокупность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_p$ такая, что $U(x_{i-1}) = x_i$, $x_p = x_0$. Исследуются свойства $A$-окрестностей и циклов непрерывных монотонных операций в регулярных $K$-пространствах. А. Н. Балуев

618. **О пространствах непрерывных функций. Пták** (Concerning spaces of continuous functions. Pták Vlastimil), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 412—431 (англ.; рез. русс.)

Пусть $T$ — вполне регулярное топологическое пространство, $C(T)$ — пространство всех непрерывных функций на $T$ с «компактно-открытой» топологией, $hT$ — хьюиттовское расширение пространства $T$, т. е. та часть чеховского расширения, на которую непрерывно продолжается каждая функция из $C(T)$. Даются различные характеристики, в терминах $C(T)$, тех линейных функций на $C(T)$, которые непрерывны на $C(hT)$, например, слабая непрерывность на каждом сепарабельном абсолютно выпуклом слабо бикомпактном подмножестве пространства $C(T)$. Первый параграф содержит независимое изложение теории хьюиттовского расширения. Д. А. Райков

619. **Минимальные точки выпуклых множеств в пространствах последовательностей.** Радо (Minimal points of convex sets in sequence spaces. Rado Richard), Math. Z., 1956, 63, № 5, 486—495 (англ.)
Доказывается теорема: Пусть в системе

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{r\lambda}x_\lambda + a_r = 0 \quad (r = 0,1,\ldots,m-1) \qquad (1)$$

коэффициенты $a_{r\lambda}$ и свободные члены $a_r$ — комплексные числа, причем $\Sigma_{\lambda=0}^{\infty}|a_{r\lambda}|<\infty$ $(r<m)$; пусть $X$ — множество последовательностей $x=\{x_\lambda\}$ комплексных чисел, удовлетворяющих системе (1) и таких, что ряды в системе (1) сходятся абсолютно. Допустим, что $X\neq 0$. Тогда существуют единственная последовательность $z=\{z_\lambda\}\in X$, натуральное число $n$ $(1\leqslant n\leqslant 1+p$, где $p$ — ранг матрицы $\|a_{r\lambda}\|)$ и распределение множества $\{0;1,2,\ldots\}$ по непустым без общих элементов множествам $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ таким, что $|z_\lambda|=\rho_\lambda$ $(\lambda\in N_\nu,\ \nu<n)$, $\rho_0>\rho_1>\ldots>\rho_{n-1}$. Для каждого $x\in X-\{z\}$ существует такое $\nu<n$, что $x_\lambda=z_\lambda$ при $\lambda\in N_0+\ldots+N_{\nu-1}$ и $\sup|x_\lambda|>\rho_\nu$ при $\lambda\in N_\nu+\ldots+N_{n-1}$.
Если ранг матрицы $\|a_{r\lambda}\|$ равен $m$, то очевидно при любых числах $a_r$ будет $X\neq 0$.

Эта теорема обобщает теорему В Рогозинского (РЖМат, 1956, 7457) и выводится из доказываемой автором теоремы о свойствах минимального элемента выпуклого слабо замкнутого ограниченного множества в пространстве последовательностей комплексных чисел.
С. И. Зуховицкий

620. **О норме линейного функционала в пространстве Орлича.** Салехов Д. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 129—130

621. **О некоторых топологических проблемах нелинейного функционального анализа.** Красносельский М. А., Люстерник Л. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 39—40

622. **Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой.** Иохвидов И. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 38—39

623. **Теория несамосопряженных операторов и ее применения.** Лившиц М. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 40—41

624. **Теорема о коммутативности для нормальных операторов.** Фугледе (A commutativity theorem for normal operators. Fuglede Bent), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 221—227 (англ.)
Рассматривается ряд вопросов, в бо́льшей своей части уже изложенных автором (Proc. Nat. Acad. U.S.A., 1950, 36, 35—40). Доказывается, что если в гильбертовом пространстве некоторый ограниченный оператор $B$ коммутирует с ограниченным нормальным оператором $N$, то $B$ коммутирует также и с $N^*$. Указывается далее, что здесь условие ограниченности может быть опущено. Приводится ряд соображений по поводу дальнейших обобщений теоремы и вопросов, к ней примыкающих.
В. Б. Лидский

625. **О перестановочности самосопряженных операторов.** Девинац, Нусбаум, Нёйман (On the permutability of self-adjoint operators. Devinatz A., Nussbaum A. E., Neumann J. von), Ann. Math., 1955, 62, № 2, 199—203 (англ.)
Два самосопряженных (вообще неограниченных) оператора $T_1$ и $T_2$ в гильбертовом пространстве называются перестановочными, если перестановочны соответствующие им спектральные функции $E_1(\lambda)$ и $E_2(\sigma)$ при любых $\lambda$ и $\sigma$.
Основной результат: Если существует самосопряженный оператор $T$ такой, что $T\subseteq T_1T_2$, то операторы $T_1$ и $T_2$ перестановочны (символ $T\subseteq T_1T_2$ означает, что ко всякому элементу $f$ из области определения $T$ допустимо последовательное применение операторов $T_2$ и $T_1$ и результат его равен $Tf$).
В. Б. Лидский

626. **Представление функционала в виде интеграла.** Маржик Ян, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 467—487 (рез. франц.)
Пусть $P$ — непустое множество; $Z$ — некоторое линейное пространство определенных на $P$ действительных функций, содержащее вместе с каждой функцией $f$ функции $|f|$ и $\min(f,1)$; $\mathfrak{T}$ — минимальное $\delta$-тело, содержащее все множества $E\{x: f(x)>1\}$ с $f\in Z$; и $J$ — действительный аддитивный функционал, определенный на $Z$ и обладающий тем свойством, что для всякой сходящейся к нулю монотонной последовательности $f_n\in Z$ справедливо соотношение $J(f_n)\to 0$. Доказывается, что существует одна и только одна действительная счетно-аддитивная функция $\varphi$, определенная на $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющая соотношению $J(f)=\int_P f\,d\varphi$ для всякой функции $f\in Z$.
Даются условия, достаточные для того, чтобы соотношение $J(f_n)\to 0$ было справедливо для всякой сходящейся к нулю монотонной последовательности $f_n\in Z$ и всякого неотрицательного аддитивного функционала $J$. Указываются различные классы пространств $Z$, удовлетворяющих этим условиям.
В. А. Рохлин

627. **Теоремы типа Сакса для абстрактных полиномов.** Альбрыхт (Theorems of Saks's type for abstract polynomials. Albrycht J.), Studia math., 1955, 15, № 1, 26—28 (англ.)
Используя метод предыдущей работы (РЖМат, 1955, 874), автор приводит две теоремы, обобщающие на случай полиномиальных операторов степени $m$ некоторые результаты референта (РЖМат, 1954, 5175, теоремы I и II). Формулировки совершенно аналогичны формулировкам реф. 5175.
A. Alexiewicz

628. **О теоремах разложения по собственным и присоединенным элементам несамосопряженных линейных операторов.** Талдыкин А. Т., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 130—131

629. **Спектральная теория.** Данфорд (Spectral theory. Dunford Nelson), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater Oklahoma, 1955, 203—208 (англ.)
Формулируются условия, налагаемые на резольвенту $T_\xi=(\xi I-T)^{-1}$ оператора $T$, действующего в банаховом пространстве $X$, при которых оператор является спектральным (т. е. обладает спектральным семейством $E_\sigma$, определенным на борелевских множествах комплексной плоскости и счетноаддитивным в смысле слабой топологии).
Рассматриваются лишь ограниченные операторы, спектр которых расположен на гладкой жордановой кривой $\Gamma$. Пусть $x$ — некоторый элемент банахова пространства $X$, а $x^*$ — линейный функционал на $X$. Через $x(\xi)$ обозначается аналитическая функция $T_\xi x$, через $\rho(x)$ — ее область регулярности в комплексной плоскости $\xi$, а через $\sigma(x)$ — дополнение к $\rho(x)$. Далее вводится функционал $(x^*,x)_\sigma=(2\pi i)^{-1}\int_C x^*x(\xi)\,d\xi$, где $C$ — жорданова кривая, лежащая в области регулярности функции $x^*x(\xi)$.
Теорема. Для того чтобы оператор $T$ был спектральным, необходимы следующие условия:
$N_1$. Если $\sigma$ — замкнутое множество комплексной плоскости, то множество $[x\mid\sigma(x)\subset\sigma]$ замкнуто.

$N_2$ (условие ограниченности). Существует константа $K$ такая, что $|(x^*, x)_\sigma| \leqslant K\,|x|\,|x^*|$.

Далее утверждается, что указанные условия позволяют построить счетноаддитивное семейство $E_\tau$, определенное на некоторой булевой алгебре $B$ подмножеств комплексной плоскости. Однако для доказательства того, что $B$ содержит все борелевские множества комплексной плоскости, приходится накладывать условия на рост резольвенты. Приводятся два из них:

$G_1$. Для каждого $\zeta \in \Gamma$ найдутся целое число $\nu(\zeta)$ и константа $K$ такие, что $|(\zeta - \xi)^{\nu(\zeta)} T_\xi| \leqslant K(\zeta)$, если $\xi$ приближается к $\zeta$ по нормали к кривой $\Gamma$ в точке $\zeta$.

$G_2$ (более ограничительное). Пусть $d(\xi)$ — расстояние от $\xi$ до спектра оператора $T$, тогда при приближении $\xi$ к спектру $d^m(\xi)\,|T_\xi| \leqslant K$.

Формулируется теорема: Если $X$ — рефлексивное банахово пространство и резольвента $T_\xi$ удовлетворяет условию $G_1$, то для спектральности оператора $T$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $N_2$.

Утверждается также, что в рефлексивном пространстве $X$ спектральный оператор $T$ является оператором типа $m$ в том и только в том случае, когда выполняются условия $N_2$ и $G_2$ (спектральный оператор $T$ называется оператором типа $m$, если

$$f(T) = \sum_{n=0}^{m-1} \int_{\sigma(T)} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} (T - \lambda I)^n dE_\lambda).$$

Приводятся теоремы, уточняющие предыдущие в том случае, когда спектр расположен на отрезке вещественной оси. Доказательства не приводятся. В. Б. Лидский

**630. Спектральная теория неограниченных замкнутых операторов. Тейлор** (Spectral theory of unbounded closed operators. Taylor Angus E.), Proc. Sympos. Spectral. Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 267—275 (англ.)

Результаты Данфорда (Dunford N., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 185—217) по спектральной теории ограниченных линейных операторов, определенных во всем пространстве Банаха $B$, обобщаются на неограниченные линейные замкнутые операторы $T$, определенные на линейном многообразии $D(T) \subset B$. Предполагается, что резольвентное множество $\rho(T)$ оператора $T$ не пусто. Как и у Данфорда, развивается «операционное исчисление», основанное на соответствии между классом $F$ функций $f(\lambda)$, регулярных в открытой (связной или несвязной) области $\Delta(f)$, содержащей спектр $\sigma(T)$ оператора $T$, и некоторым классом $\Phi$ операторов $f(T)$ (если оператор $T$ неограничен или, если $D(T) \neq B$, то, по определению, точка $\lambda = \infty$ принадлежит $\sigma(T)$.

Соответствие между $F$ и $\Phi$ у Данфорда определялось равенством

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R_\lambda(T)\, d\lambda,$$

которое автор заменяет формулой

$$f(T) = f(\infty) I + \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R_\lambda(T)\, d\lambda,$$

где $C$ — полная граница области, содержащей спектр оператора $T$.

Пусть $D_n(T)$ означает множество всех тех элементов $x$ из $D(T)$, для которых определены степени $Tx$, $T^2x, \ldots, T^nx$.

Получены следующие результаты:

1. Если функция $f(\lambda)$ из $F$ не имеет нулей в $\sigma(T)$, то оператор $f(T)$ определяет взаимно однозначное отображение пространства $B$ на себя; при этом функции $1/f(\lambda)$ из $F$ соответствует в $\Phi$ оператор $[f(T)]^{-1}$.

2. Если функция $f(\lambda)$ из $F$ имеет нуль порядка $n < \infty$ в точке $\lambda = \infty$ и не имеет других нулей в $\sigma(T)$, то оператор $f(T)$ определяет взаимно однозначное отображение пространства $B$ на $D_n(T)$.

3. Если $f \in F$, то

$$f[\sigma(T)] = \sigma[f(T)].$$

Последняя теорема остается справедливой при замене функции $f$ из $F$ произвольным полиномом.

Доказательства проведены лишь частично.

И. М. Глазман

**631. Спектральная теорема и классический анализ. Лорх** (The spectral theorem and classical analysis. Lorch E. R.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 259—265 (англ.)

Лекция, содержащая ранее опубликованные результаты автора (Bull. Amer. Math. Soc., 1939, **12**, 945—947; Trans. Amer. Math. Soc., 1941, **49**, 18—40; Acta scient. math. Szeged, 1950, **12B**, 137—144). Вначале излагаются существенные моменты доказательства спектральной теоремы теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве с помощью классической теоремы Коши. При этом исходным пунктом доказательства является замена интеграла

$$P_{\lambda,\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta I - A}, \qquad (1)$$

где $C$ есть простой спрямляемый контур, пересекающий вещественную ось в точках $\lambda$ и $\mu$, интегралом

$$K_{\lambda,\mu}(m, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\zeta - \lambda)^m (\mu - \zeta)^n (\zeta I - A)^{-1}\, d\zeta, \qquad (2)$$

где $m$ и $n$ — натуральные числа. В отличие от интеграла (1) интеграл (2) всегда существует.

Далее кратко излагаются вопросы, связанные с обобщением спектральной формулы для унитарных операторов в гильбертовом пространстве на случай произвольных равномерно ограниченных операторов в рефлексивном пространстве Банаха (Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, гл. X).

И. М. Глазман

**632. Спектральная теория и гармонический анализ. Эберлейн** (Spectral theory and harmonic analysis. Eberlein W. F.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 209—219 (англ.)

Обзор основных результатов, относящихся к гармоническому анализу на коммутативных локально компактных группах, и их (не вполне еще выясненных) связей с теорией спектра функций. Сообщается следующий еще не опубликованный результат автора: каждая слабо почти периодическая функция представима и притом единственным образом в виде суммы сильно почти периодической функции и слабо почти периодической функции с чисто непрерывным спектром.

Д. А. Райков

**633. О собственных элементах нечетных потенциальных операторов в гильбертовом пространстве. Вайнберг М. М.**, Матем. сб., 1956, **38**, № 1, 3—22

Исследуются собственные элементы нечетных потенциальных операторов в гильбертовом пространстве. Новой в работе является теорема 5: Если $F(x)$ — сильно непрерывный потенциальный оператор, определенный в гильбертовом пространстве $H$, $F(-x) = -F(x)$, $(F(x), x) > 0$ при $\|x\| > 0$, $B$ — положительный, самосопряженный, вполне непрерывный в $H$ оператор, обладаю-

ций счетным множеством собственных элементов, то, каково бы ни было $c>0$, произведение $BF$ имеет не менее счетного числа попарно линейно независимых собственных элементов

$$\psi_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1/2} \eta_k^{(\nu)} x_k,$$

$$(\eta_1^{(\nu)}, \eta_2^{(\nu)}, \ldots) = \eta^{(\nu)} \in l_2 \ (\nu = 1, 2, \ldots), \ \left\| \eta^{(\nu)} \right\| = c,$$

где $x_k$ и $\lambda_k$ — собственные векторы и числа оператора $F$. Собственные элементы $BF$ соответствуют собственным значениям $\mu_\nu = (\psi_\nu, F(\psi_\nu))/c^2$, образующим убывающую последовательность, сходящуюся к нулю.

Дано приложение этой теоремы к одному классу нелинейных интегральных уравнений. Э. С. Цитланадзе

634. **Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой. Крейн** (On an application of the fixed-point principle in the theory of linear transformations of spaces with indefinite metric. Krein M. G.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, 1, 27—35 (англ.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1950, 5, № 2, 180—190.

635. **Об одном классе операторных уравнений. Цалюк З. Б.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 7, 31—37

Доказываются три теоремы.

Теорема 1. Пусть линейный оператор $L(\lambda)$ аналитичен по $\lambda$ в некоторой области $\Gamma$ плоскости комплексного переменного или прямой и отображает пространство $E_1$ в пространство $E_2$. Если в окрестности $O(\lambda)$ любой точки $\lambda \in \Gamma$ оператор $L(\lambda)$ представим в виде $L(\lambda) = B(\lambda) + A(\lambda)$, где $A(\lambda)$ — линейный, компактный аналитический в $O(\lambda)$ оператор, а $B(\lambda)$ имеет аналитический в $O(\lambda)$ обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$, то 1) или $L(\lambda)$ не обратим ни при каком $\lambda \in \Gamma$, или $L^{-1}(\lambda)$ существует и является мероморфным в $\Gamma$ оператором; 2) в окрестности полюса $\lambda = \lambda_0$ оператор $L^{-1}(\lambda)$ разлагается в ряд

$$L^{-1}(\lambda) y = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_0)^{-(n-k)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k} f_j^{k-i}(y) x_j^i + \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_0)^k F_k y,$$

где $x_j^i$ — собственные и присоединенные к ним элементы оператора $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, а $f_j^i$ — собственные и присоединенные к ним элементы оператора $L^*(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$.

Первая часть утверждения теоремы вытекает из теоремы И. Ц. Гохберга (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 4, 629).

Вторая часть теоремы есть перенесение результатов Л. В. Келдыша (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 1, 11—14) на пространство Банаха.

При доказательстве теоремы предполагается вполне непрерывность оператора $B^{-1}(\lambda) A(\lambda)$, для чего в условии теоремы следует наложить дополнительное ограничение (например, замкнутость оператора $B^{-1}(\lambda)$, из которой вытекает ограниченность оператора $B^{-1}(\lambda)$).

Во второй теореме доказывается существование по крайней мере одного собственного значения уравнения $[I - A(\lambda)] x = y$, в предположении, что $A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$, $A_k$ — самосопряженные, вполне непрерывные операторы, действующие в пространстве Гильберта.

Далее получаются разложения элемента $y = A(\lambda_0) x$ и резольвенты $R(\lambda)$ оператора $A(\lambda)$ по собственным элементам оператора $A(\lambda)$. К. Т. Ахмедов

636. **Бесконечные системы с монотонной операцией. Ширяева Е. В.,** Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, № 14, 43—51

Исследуются свойства последовательностей: $x_{n+1} = V(x_n)$, где $V(x)$ — убывающая операция, переводящая $K$-пространство $X$ в себя. Результаты применяются к бесконечным системам вида $x = Ax + b$, где $A$ — матрица с отрицательными элементами.

Примечание референта. Теорема 3 является частным случаем теоремы Л. В. Канторовича (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 6, 849—852). А. Н. Балуев

637. **Об одной задаче вариационного исчисления в целом в гильбертовом пространстве. Борисович Ю. Г.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 14, 117—138

Исследуются некоторые новые свойства рода множеств, введенного М. А. Красносельским (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 2, 157—164). Используя эти свойства, автор дает оценку снизу множества критических точек функционала на более общих поверхностях в гильбертовом пространстве, чем это рассматривалось ранее. Используется также структура множества критических точек в случае слияния нескольких критических значений. Э. С. Цитланадзе

638. **О решении нестационарных операторных уравнений различных типов. Ладыженская О. А.,** Докл. АН СССР, 1955, 102, № 2, 207—210

Способ доказательства разрешимости краевых задач для линейных уравнений и систем гиперболического и параболического типов, предложенный автором (РЖМат, 1956, 7371), переносится на некоторые типы операторных уравнений. Пусть $H$ — полное сепарабельное гильбертово пространство, а $H_1$ — пространство квадратично суммируемых функций, заданных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant l$, со значениями в $H$. Пусть далее $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — два семейства линейных операторов в $H$, для которых:

1) оператор $S_1$ — самосопряженный, положительно определенный, устанавливает взаимно однозначное соответствие между своей областью определения $D(S_1) \subset D(S_2)$, плотной в $H$ и не зависящей от $t$, и всем $H$; существуют такие положительные постоянные $C_1$ и $\delta \leqslant 1/7$, что $\| S_2 u \|^2 \leqslant \delta \| S_1 u \|^2 + C_1 (S_1 u, u)$;

2) для любого $x \in H$ функции $S_k(t_1) S_1^{-1}(t_2) x$ измеримы по $t_1$ и по $t_2$; для любого $x \in D(S_1)$ функции $S_k(t) x$ сильно дифференцируемы по $t$;

3) операторы $S_1(t_1) S_1^{-1}(t_2)$, $S_{kt} S_1^{-1} (k = 1, 2)$, где $S_{kt}$ определен равенством $d(S_k(t) x)/dt = S_{kt} x$, ограничены и их нормы не зависят от $t_k$.

Превратим множество $D(S_1^{1/2})$ в гильбертово пространство, введя скалярное произведение $(S_1^{1/2}(0) x, S_1^{1/2}(0) y)$. Определим далее для функций $u(t) \in H_1$, являющихся неопределенными интегралами функций из $H_1$, причем $u \in D(S_1)$, $u_t \in D(S_1)$, оператор $Au = (u_t + S_1 u + S_2 u;\ u(0))$ с областью значений $R(A)$ в гильбертовом пространстве $W = H_1 \times D(S_1^{1/2})$. Утверждается, что оператор $A$ допускает замыкание $\bar{A}$, причем $R(\bar{A}) = \bar{R}(A) = W$. Уравнение $\bar{A}u = (f; \varphi_0)$ однозначно разрешимо для любых $f \in H_1$ и $\varphi_0 \in D(S_1^{1/2})$. Элементы $v \in D(\bar{A})$ являются неопределенными интегралами, причем $v_t \in H_1$, $v \in D(S_1^{1/2})$ при всех $t$, $v \in D(S_1)$ для почти всех $t$ и $S_1 u \in H_1$, так что $\bar{A}u = (u_t + S_1 u + S_2 u;\ u(0))$. Приведены аналогичные теоремы для

уравнения 2-го порядка $u_{tt} + S_1 u + S_2 u = f$ ($u(0) = \varphi_0$, $u_t(0) = \varphi_1$) и уравнения типа Шредингера $u_t - iS_1 u = f$ ($u(0) = \varphi_0$) (в последнем случае пространство $H$ считается комплексным), а также некоторые обобщения. Работа содержит лишь схемы доказательств.

А. Д. Мышкис

**639. Метод моментов для несамосопряженных линейных операторов и ускорение сходимости итеративных процессов. Воробьев Ю. В.,** Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 161—167

Теорема 1 предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 4650) переносится на случай произвольного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве. В качестве приложения указывается один прием ускорения сходимости итеративного процесса решения линейных уравнений. Осуществление этого приема не требует выделения наибольших по абсолютной величине собственных значений. М. Ш. Бирман

**640. О приближении абстрактных функций со значениями в гильбертовом пространстве. Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б.,** Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 3, 385—388

Рассматривается вопрос о наилучшем (чебышевском) приближении функции $\varphi(q)$ посредством полиномов $\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(q)$ в метрике комплексного гильбертова пространства $H$ с ортонормированным базисом $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Предполагается, что $\varphi(q)$ и $f_k(q)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) — функции со значениями в $H$, определенные и непрерывные на некотором компакте $Q$, причем система $\{f_k(q)\}$ линейно независима.

Используя результаты работы С. И. Зуховицкого (РЖМат, 1956, 5339; см. также РЖМат, 1956, 610), авторы устанавливают существование наименее уклоняющегося полинома и обобщают критерий А. Н. Колмогорова (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 216—221). Формулируются условия единственности наименее уклоняющегося полинома, обобщающие теорему Хара.

Если $H$ конечномерно и имеет базис $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, то при $N \leqslant s$ все теоремы остаются в силе. Для $N = ns$, где $n$ — натуральное число, соответствующие теоремы даны в работе С. И. Зуховицкого и М. Г. Крейна (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 1, 217).

Отмечается особенность случая $(n-1)s < N < ns$, $n \geqslant 2$, для которого условия единственности наименее уклоняющегося полинома должны быть дополнены.

В. Н. Никольский

**641. О приближении абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве. Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б.,** Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 5, 773—776

Рассматривается вопрос о наилучшем приближении абстрактных непрерывных функций $\varphi(q)$, заданных на некотором компакте $Q$, со значениями в банаховом пространстве $X$, посредством полиномов $p_\alpha(q) = \sum_1^N a_k f_k(q)$, где функции $f_k(q)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ образуют линейно независимую систему. Обычным путем доказывается существование наилучшего полинома.

Пусть $s$ — размерность пространства $X$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, и пусть $n$ — такое натуральное число, что $(n-1)s < N \leqslant ns$. Утверждается, что для единственности наилучшего полинома необходимо, чтобы: 1) система $\{f_k(q)\}$ была системой Чебышева (в обобщенном смысле, именно, всякий не тождественно равный нулю полином может обращаться в нуль не более чем в $n-1$ точке $Q$); 2) всегда была разрешима интерполяционная задача: $p_\alpha(q_i) = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), $q_i \in Q$, $q_i \neq q_k$ ($i \neq k$), $x_i \in X$.

Отмечается, что при $N \leqslant s$ или $N = ns$ из 1) вытекает 2). Условия 1) и 2) становятся достаточными, если дополнительно потребовать, чтобы $X$ было строго нормированным. Решается также вопрос о числе точек максимального уклонения наилучшего полинома. Доказательства не приводятся.

Полученные результаты содержат как частный случай теоремы другой заметки авторов (реф. 640).

В. Н. Никольский

**642. Непрерывные произведения в линейных пространствах. Мак-Нерни** (Continuous products in linear spaces. Mac-Nerney J. S.), J. Elisha Mitchel Scient. Soc., 1955, **71**, № 2, 185—200 (англ.)

Дается обобщение результатов автора (РЖМат, 1956, 4660), заключающееся в замене требования непрерывности функции $F$ требованием идемпотентности ее скачков слева и справа и соответствующем ослаблении требований к функции $M$. В связи с этим интегралы и непрерывные произведения понимаются как пределы Мура — Смита. М. К. Гавурин

**643. О функциях от элементов полуупорядоченного кольца. Соболев В. И.,** Тр. семинара по функциональному анализу. Воронежск. ун-т, 1956, № 1, 39—42

Приводится полное доказательство теоремы автора (РЖМат, 1953, 1134) в предположении, что $\Delta$ есть произвольный полуинтервал $(\lambda, \mu)$. А. Н. Балуев

**644. К теории квазиунитарных алгебр. Пуканский** (On the theory of quasi-unitary algebras. Pukánszky L.), Acta scient. math., 1955, **16**, № 1—2, 103—121 (англ.)

Изучаются квазиунитарные алгебры $\mathbf{R}$ в смысле Диксмье, т. е. алгебры над полем комплексных чисел с антиавтоморфизмом $x \to x^s$, автоморфизмом $x \to x^j$ и скалярным произведением, причем 1) $(x^s, x^s) = (x, x)$, 2) $(x, x^j) \geqslant 0$, 3) $(xy, z) = (y, x^j z)$, 4) отображение $y \to yx$ непрерывно при каждом $y$, 5) линейные комбинации элементов вида $xy + (xy)^j$ плотны в $\mathbf{R}$.

Пополнение алгебры $\mathbf{R}$ является гильбертовым пространством $R_0$, в котором действуют кольца операторов $\mathbf{R}_g$, $\mathbf{R}_d$, индуцируемых умножением слева (соответственно справа) на элементы из $R_0$. Преобразования $x \to x^j$ и $x \to x^s$ индуцируют операторы $J$ и $S$. Доказывается, что если $\mathbf{R}_g$ полуконечно, то $J$ есть минимальное замкнутое расширение произведения $M'M^{-1}$, где $M \in \mathbf{R}_d$ — положительный самосопряженный оператор, а $M' = SMS$. Изучаются более подробно свойства квазиунитарных алгебр и, в частности, алгебр с квазиконечным кольцом $\mathbf{R}_g$. Ю. А. Шрейдер

**645. Максимальные подалгебры групповых алгебр. Уэрмер** (Maximal subalgebras of group-algebras. Wermer John), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 692—694 (англ.)

Рассматривается упорядоченная дискретная топологическая абелева группа $G$ и ее групповая алгебра $L$, т. е. банахова алгебра функций $f$ на $L$, для которых $\Sigma_{\lambda \in G} |f(\lambda)| < \infty$. Пусть $L^+$ — собственная замкнутая подалгебра алгебры $L$, состоящая из функций, равных нулю вне множества неотрицательных элементов из $G$. Устанавливается, что $L^+$ является максимальной подалгеброй алгебры $L$ (т. е. не содержится ни в какой большей собственной замкнутой подалгебре), тогда и только тогда, когда упорядоченность в $G$ является архимедовой.

М. И. Граев

**646. Инвариантные кольца функций на торе. Де-Леу, Меркил** (Intrinsic algebras on the torus. De Leeuw K., Mirkil H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **81**, № 2, 320—330 (англ.)

Кольцо функций на $n$-мерном торе $T_n$ (с обычными операциями сложения и умножения) называется инвариантным, если оно переходит в себя при всех автоморфизмах тора.

Нормированное кольцо функций $R$ называется кольцом типа $C$, если для каждой функции $f(x) \in R$ имеет место равенство $\|f\| = \sup_y \inf_h \|f+h\|$, где $h = h(x) \in R$ равна нулю в окрестности точки $y$. Примером является кольцо $D_m(T_n)$, состоящее из всех функций $f(x)$, на торе $T_n$, обладающих непрерывными производными до порядка $m$.

Доказывается, что всякое инвариантное кольцо типа $C$ на торе $T_n$, содержащее все бесконечно дифференцируемые функции, совпадает с некоторым кольцом $D_m(T_n)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Для $n = 1$ теорема была доказана референтом (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 1, 91—137).

Г. Е. Шилов

**647. Об образующих нормированных колец. Карлесон** (On generators of normed rings. Carleson L.), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 16—17 (англ.)

Очень краткое и не вполне ясное резюме выступления автора.

В нормированном кольце с единицей полином $T_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ называется полиномом Чебышева, если $\lambda_n = \|T_n(x)\| \leqslant \|P_n(x)\|$ для любого полинома $P_n(x)$ степени $n$ со старшим коэффициентом 1. Число $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{1/n}$ есть емкость (capacity) спектра $\sigma(x)$ элемента $x$ (неясно, идет ли речь об определении или о теореме и какой смысл в последнем случае имеет термин capacity; во всяком случае, следуя автору, мы должны сказать, что емкость круга равна его радиусу, емкость отрезка — половине его длины и емкость конечного числа точек — нулю. *Реф*). Далее, если $\sigma(x)$ не содержит внутренних точек, $a_n(z)$ — функция распределения (? *Реф.*) массы $1/n$ в каждом корне многочлена $T_n(z)$, то $\lim_{n\to\infty} a_n(z)$ есть функция распределения однородной массы на $\sigma(x)$.

Кроме того, указывается, что в кольце $L(0, 2\pi)$ со сверткой имеется одна образующая (в качестве которой можно взять любую функцию с коэффициентами Фурье, отличными от нуля и друг от друга), а в кольце $L_n(-\infty, \infty)$ со сверткой имеется $n+1$ образующих.

Г. Е. Шилов

**648. Функциональный анализ и вычислительная математика. Соболев С. Л., Люстерник Л. А., Канторович Л. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 43

**649. Спектральная теория динамических систем. Рохлин В. А., Фомин С. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 41—42

**650. Измеримые подпространства и подалгебры. Бахадур** (Measurable subspaces and subalgebras. Bahadur R. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 565—570 (англ.)

Пусть $(X, S, \mu)$ — пространство с мерой, т. е. $X$ — основное множество, $S$ — некоторая $\sigma$-алгебра его подмножеств и $\mu$ — счетноаддитивная неотрицательная функция (мера), определенная на $S$; предполагается, что $\mu X = 1$). Далее пусть $V$ — действительное гильбертово пространство $L_2(X, S, \mu)$ измеримых функций с интегрируемым квадратом на $(X, S, \mu)$; $W$ — его подпространство; $S^0$ — минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая все множества $E\{x : f(x) < \alpha, f \in W\}$; $S_0$ — класс тех множеств (в $X$), характеристические функции которых содержатся в $W$; $T$ — оператор ортогонального проектирования на $W$. Подпространство $W$ называется: а) алгебраическим, если оно содержит функцию 1 и вместе с каждыми двумя ограниченными функциями содержит их произведение; б) ограниченным, если множество содержащихся в нем ограниченных функций плотно в нем и в) измеримым, если в $S$ имеется такая $\sigma$-подалгебра $S^*$, что $W = L_2(X, S^*, \mu)$ (т. е. $W$ есть в точности совокупность всех $S^*$-измеримых функций из $V$). Оператор $T$ называется сохраняющим константы, если $Ta = a$ для всякой постоянной функции $a$, и положительным, если из $f \geqslant 0$ следует $Tf \geqslant 0$.

Главный результат: следующие четыре условия эквивалентны между собой: 1) оператор $T$ сохраняет константы и положителен; 2) подпространство $W$ является алгебраическим и ограниченным; 3) $S_0 = S^0$; 4) $W = L_2(X, S^0, \mu)$. Если эти условия выполнены, то $T$ есть «оператор условной вероятности относительно $S^0$», т. е. оператор, относящий каждой функции $f \in L_2(X, S, \mu)$ ту (единственную) функцию $g \in L_2(X, S^0, \mu)$, для которой $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ при любом $A \in S^0$.

Применяя эти теоремы к конечномерному случаю, автор находит общий вид симметрической вероятностной идемпотентной матрицы (т. е. матрицы $\|t_{ij}\|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющей условиям: $t_{ij} = t_{ji}$, $t_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^n t_{ij} = 1$, $\sum_{r=1}^n t_{ir} t_{rj} = t_{ij}$).

Примечание референта. Для случая, когда $(X, S, \mu)$ есть пространство Лебега, эквивалентность условий 2), 3) и 4) содержится в результатах работы референта (Докл. АН СССР, 1948, 59, № 4, 643—646), которая, по-видимому, неизвестна автору. В. А. Рохлин

**651. Представление групп Ли. Гельфанд И. М., Граев М. И., Наймарк М. А., Березин Ф. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 37

**652. Однородные функции и их приложения. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.,** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 3—70

Статья посвящена дальнейшему развитию метода обобщенных функций в анализе. Авторы называют обобщенной функцией линейный непрерывный функционал на некотором пространстве основных функций, например обращающихся в нуль вне конечной области $n$-мерного пространства $R_n$ и бесконечно дифференцируемых. Каждой локально интегрируемой функции $f(x)$ можно сопоставить такой функционал по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Но неинтегрируемые локально функции такие, как $1/x^\lambda$ и др., также представляют интерес для анализа; поэтому желательно иметь способ сопоставления и таким функциям некоторых функционалов. Используя идущий от М. Рисса (Riesz M., Acta math., 1949, 81, 1—223) прием аналитического продолжения по параметру, авторы решают эту задачу для широкого класса функций $f(x)$, нулевые поверхности которых содержат только «приводимые точки» (определение см. ниже). Этот класс включает в себя однородные положительные функции. Некоторые результаты реферируемой статьи соприкасаются с результатами Бюро (РЖМат, 1956, 4532).

§ 1 носит подготовительный характер; в нем подробно изложены в основном известные результаты М. Рисса, за исключением пункта о присоединенных функциях (см. ниже). Речь идет о функциях одного переменного; авторы определяют обобщенные функции $x^\lambda$ $(x > 0)$ и $|x|^\lambda$ $(x < 0)$ для всех (комплексных) $\lambda$; при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ соответствующие функционалы задаются формулами

вида (1). Аналитическое продолжение каждой из этих функций есть мероморфная функция с простыми полюсами при $\lambda = -1, -2, \ldots$ и вычетами в полюсе $\lambda = -k$ соответственно $\frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$ и $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$. Указанные обобщенные функции однородны, т. е. удовлетворяют функциональному уравнению $f(ax) = a^{\lambda} f(x)$ (функционал $f(ax)$ в $R_n$ определяется формулой $(f(ax), \varphi(x)) = (f(x), a^{-n}\varphi(x/a))$; таким образом, они являются собственными функциями оператора подобного преобразования $Af(x) = f(ax)$. Присоединенные функции степени $\lambda$ порядка $k$ естественно задаются уравнениями $f_0 = f$, $Af_k = a^{\lambda} f_k + \beta f_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; авторы описывают все присоединенные функции степени $\lambda$.

В § 2 строится обобщенная функция $f^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — обычная однородная функция степени 1, непрерывная и вне начала координат положительная. При $\operatorname{Re}\lambda > -n$ соответствующий функционал определяется по формуле вида (1). Оказывается, что аналитическое продолжение этой функции по $\lambda$ есть мероморфная функция от $\lambda$ с простыми полюсами при $\lambda = -n, -n-1, \ldots$ Вычет в точке $\lambda = -n-m$ имеет вид $P_m(\partial/\partial x)\,\delta(x)$, где $P_m(\partial/\partial x)$ — некоторый дифференциальный оператор $m$-го порядка с постоянными коэффициентами, каждый из которых равен соответствующему моменту $m$-го порядка области $f \leqslant 1$ относительно начала координат. В частности, для $f = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = r$ вычет при $\lambda = n - 2m$ равен $\frac{\Omega_n \Delta^m \delta(x_1, \ldots, x_n)}{2^m m! n(n+2)\ldots(n+2m-2)}$, где $\Omega_n$ — поверхность единичной сферы в $n$-мерном пространстве. Функция $2r^{\lambda}/\left[\Omega_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)\right]$ — целая аналитическая функция от $\lambda$, обращающаяся при $\lambda = -n$ в $\delta(x)$. Этот последний результат принадлежит также М. Риссу.

В § 3 полученные результаты используются для решения некоторых задач с частными производными. Усредняя обобщенную функцию $|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda}$ по всем направлениям $\omega$ $\left(\sqrt{\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2} = 1\right)$, авторы получают формулу

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{\Omega} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda} d\omega = \frac{2r^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}, \quad (2)$$

частным случаем которой ($\lambda = -n$, $n$ — нечетное) является формула, полученная А. А. Хачатуровым (РЖМат, 1956, 1210); соответствующие «классические» формулы, полученные рядом авторов в 20—30-х гг. (Герглотц, Джон и др.) в связи с решением проблемы Радона о восстановлении функции по ее плоским интегралам, приводятся в указанной выше статье Бюро.

При $\lambda = -n$, как указано выше, правая часть обращается в $\Omega_n \delta(x)$. Пользуясь этим, авторы получают решение эллиптического уравнения $m$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)\, U = \Omega_n \delta(x). \quad (3)$$

Именно, авторы заменяют правую часть (3) на $2r^{\lambda}/\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$; по формуле (2) представляют это выражение в виде наложения плоских волн $|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda}$ и затем разыскивают решение уравнения $L(\partial/\partial x)\, U_{\omega\lambda} = C_{n\lambda} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda}$ в виде функции от аргумента $\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$ (эта операция сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения с правой частью $C_{n\lambda}|\xi|^{\lambda}$); полученное решение интегрируют по $\omega$ и полагают $\lambda = -n$. Для однородного многочлена $L$ приводится явный вид решения (зависящий от четности или нечетности $n$ и от соотношения между $n$ и $2m$). Эти последние формулы были ранее получены Джоном и приводятся у Бюро в указанной выше статье. Тот же прием используется при решении задачи Коши для уравнения $m$-го порядка

$$P(\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)\, u = 0 \quad (4)$$

при условии, что для любых $\omega_1, \ldots, \omega_n$ задача Коши для уравнения с двумя переменными $P(\partial/\partial t, \omega_1(\partial/\partial\xi), \ldots, \omega_n(\partial/\partial\xi))\, v_{\omega} = 0$ корректна (Это условие заведомо выполняется для гиперболических многочленов $P$ и для некоторых других). Достаточно решить задачу при начальных данных $\partial^k u(0, x)/\partial t^k = 0$ $(k < m-1)$, $\partial^{m-1} u(0, x)/\partial t^{m-1} = \delta(x)$. Авторы заменяют в последнем начальном условии $\delta(x)$ на $2r^{\lambda}/\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$, представляют это выражение по формуле (2) в виде наложения плоских волн и затем разыскивают решение уравнения (4) с начальными условиями $\partial^k u(0, x)/\partial t^k = 0$ $(k < m-1)$, $\partial^{m-1} u(0, x)/\partial t^{m-1} = C_{n\lambda} |\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^{\lambda}$. Если считать это решение функцией от $t$ и $\xi = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$, то дело сводится к решению указанной выше задачи с двумя переменными. Найденное решение интегрируют по $\omega$ и полагают $\lambda = -n$. На этом пути для однородного гиперболического уравнения получаются формулы Герглотца — Петровского, причем не только для случая $m \geqslant n-1$, рассмотренного Герглотцом и Петровским, но и для общего случая; при $m < n-1$ в формуле существенно участвуют обобщенные функции.

В § 4 строится определение обобщенной функции $G^{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)$, где $G$ уже не обязательно однородная и положительная функция; при больших $\operatorname{Re}\lambda$ соответствующий функционал определяется формулой $(G^{\lambda}, \varphi) = \int_{G>0} G^{\lambda}\varphi dx$. Предполагается, что поверхность $G = 0$ в окрестности начала координат состоит из приводимых точек. Для приводимых точек дается следующее индуктивное определение по числу измерений пространства (или аналитического многообразия), в котором располагается поверхность. Для одного переменного точка $x_0$, в которой $G(x_0) = 0$, называется приводимой, если в некоторой окрестности этой точки функция $G(x)$ эквивалентна однородной функции (т. е. становится однородной функцией после бесконечно дифференцируемого обратимого преобразования координат). В общем случае точка $M$ на поверхности $G = 0$ называется приводимой, если у этой точки имеется окрестность, где эта функция эквивалентна однородной функции, и при этом пересечение поверхности $G = 0$ с достаточно малой сферой с центром в $M$ состоит из приводимых точек на этой сфере. Наименьшее число независимых переменных, от которых будет фактически зависеть функция $G(x)$ в локальных координатах, называется порядком приводимой точки. Если поверхность $G = 0$ состоит из приводимых точек первого порядка, то аналитическое продолжение $G^{\lambda}$ есть мероморфная функция $\lambda$, имеющая простые полюсы в точках $-m/l$, где $l$ — степень однородности функции $G$ в какой-либо точке поверхности $G = 0$ (авторы ука-

зывают, что различных чисел $l$ для данной функции $G$ лишь конечное множество). Для вычисления вычетов $G^\lambda$ вводятся следующие дифференциальные формы: форма $d\omega$, определяемая уравнением $d\omega \cdot dG^{1/l} = dv$ (форма, введенная Лере (Leray J., C. r. Acad. sci, 1952, 234, 1112—1115) в связи с формулами Герглотца), и формы $d_0\omega = \varphi d\omega$, $d_j\omega = (d_{j-1}\omega)' dG^{1/l}$ $(j = 1,2,\ldots)$, где $'$ означает внешнюю производную. При этом вычет функции $G^\lambda$ в полюсе $\lambda = -k/l$ оказывается равным $\frac{1}{(k-1)!}\int_{G=0} d^{k-1}\omega$. Если на поверхности $G = 0$ имеются приводимые точки высших порядков, то каждая из них порождает серию полюсов — $k/l$; если такой полюс порождается и некоторой приводимой точкой меньшего порядка, то его кратность соответственно увеличивается. Для всех видов полюсов функции $G^\lambda$ вычисляются вычеты. В качестве приложения рассматривается асимптотическое поведение интеграла $I_c(\varphi)$ от бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ по поверхностям уровня $G = c$ при $c \to 0$. Находится асимптотическое разложение

$$I_c(\varphi) = \sum a_\nu c^{-\lambda_\nu - 1} + \ln c \sum b_\mu c^{-\lambda_\mu - 1} + \ldots$$

$$\ldots + \ln^{n-1} c \sum g_\tau c^{-\lambda_\tau - 1},$$

где первая сумма вычисляется по полюсам первого порядка функции $(G^\lambda, \varphi)$, вторая по полюсам второго порядка и т. д., а коэффициенты суть младшие коэффициенты лоранова разложения функции в соответствующих точках. Например, для $G = xy$ получается формула

$$I_c(\varphi) = \varphi(0,0)\ln c + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,0)}{x}\,dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0,y)}{y}\,dy + o(c).$$

К вычислению интегралов $I_c$ при малых $c$ приводятся некоторые задачи теории представлений классических групп (РЖМат, 1956, 6705).

В § 5 находятся преобразования Фурье однородных функций (в смысле теории обобщенных функций (РЖМат, 1955, 3291)). Получается следующая общая формула:

$$\widetilde{F}_\lambda(s_1, \ldots, s_n) =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda + n)}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega F_\lambda(\omega_1 \ldots \omega_n) \left\{ \frac{i}{\sum \omega_\nu s_\nu + i\varepsilon\,|\,\omega\,|} \right\}^{\lambda+n} d\omega.$$

Интеграл в правой части есть вычет подинтегральной функции в точке $\lambda = -n$.

Статья заканчивается таблицей преобразований Фурье однородных и присоединенных функций одного переменного. Г. Е. Шилов

653. **Обобщенные функции в теории поля. Параскюк О. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 92

654. **Континуальные интегралы. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Яглом А. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 88—89

655. **Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Гельфанд, Фомин** (Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature. Gelfand I. M., Fomin S. V.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, 1, 49—65 (англ.)
Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1952, 7, № 1, 118—137.

656. **Условие причинности и аналитическая структура матрицы рассеяния. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 83—84

657. **Некоторые вопросы квантовой теории поля. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** (в подлиннике Широков Д. В.), Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 84—85

658. **Рассмотрение проблемы начальных условий для релятивистских волновых уравнений с точки зрения теории обобщенных функций. Пенцлин** (Distributionentheoretische Behandlung von Anfangswertproblemen relativistischer Wellengleichungen. Penzlin Fritz), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Math. naturwiss. Reihe, 1955—1956, 5, № 1—2, 137—149 (нем.)
Рассматриваются практические приложения теории обобщенных функций Кёнига (РЖМат, 1953, 649), в которой обобщенная функция $f$ определяется не интегральными соотношениями, как в теории Шварца, а как формальный степенной ряд $f = \sum_i \partial^i f_i(x)$, где функции $f_i$ принадлежат классу $L^1$ в любом конечном интервале $-\infty < a < x < b < +\infty$; $\partial^i$ — формальный параметр разложения. В последующем оказывается возможным отождествить $\partial^i$ с оператором дифференцирования. Приводятся важнейшие определения и результаты теории Кёнига, а также подробно рассматривается ряд примеров обобщенных функций в пространстве одного и $N$ измерений.
Решения волновых уравнений $\left(\sum_{k=1}^N \partial^2/\partial x_k^2 + \lambda\right) g = h$, где $\lambda \geqslant 0$ и $h$ — известная функция в пространстве $N$ измерений, для заданных начальных условий определяются через функции Грина, которые рассматриваются с точки зрения теории Кёнига. Подробно изучены частные случаи $N = 1,2,3$. Результаты теории Кёнига применены также для решения релятивистских $N$-мерных матричных уравнений с производными первого порядка. В. С. Барашенков

659. **Представление связанных состояний. Гамильтон, Салам** (The bound state representation. Hamilton J., Salam A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 103—112 (англ.)
См. РЖФиз, 1956, 9572.

660. **Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения. Гельфанд, Шапиро** (Representations of the group of rotations of 3-dimensional space and their applications. Gel'fand I. M., Sapiro Z. Ya.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 2, 207—316 (англ.)
Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1952, 7, № 1, 3—117.

661 Д. **Нелинейные преобразования в пространстве Винера вида $y(t) = x(t) + g[t; x(t_1), \ldots, x(t_N)]$. Хафстром** (Non-linear transformations in Wiener space of the form $y(t) = x(t) + q[t; x(t_1), \ldots, x(t_N)]$. Hafstrom John Edward. Doct. diss., Univ. Minnesota, 1954), Dissert Abstrs, 1955, 15, № 4, 600 (англ.)

662 Д. **Теория распределений в локально компактных пространствах. Ч. I. Эренпрейс** (Theory of distributions in locally compact spaces. Part I. Ehrenpreis Leon. — Doct. diss., Columbia

Univ., 1953), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 7, 1238—1239 (англ.)

663 Д. **$C$-конусы и геометрические построения $(L)$ и $(M)$ пространств.** Брауншвейгер (The $C$-cone and geometric constructions of $(L)$ and $(M)$ spaces. Braunschweiger Christian Carl.—Doct. diss., Univ. Wisconsin, 1955); Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 12, 2536—2537 (англ.)

---

См. также: 238, 239, 361, 406, 426, 427, 430 Д, 434, 435, 436—442, 446, 449—451, 453, 481 Д, 894, 931 Д

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

664. **Полумартингалы и субгармонические функции.** Дуб (Semimartingales and subharmonic functions. Doob J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 1, 86—121 (англ.)

Вводится определение полумартингала как стохастического процесса, удовлетворяющего некоторому дополнительному условию. Затем отмечается формальное сходство данного определения полумартингала с определением субгармонической функции, заданной в некоторой плоской области.

Далее устанавливается ряд предложений, выражающих связь между поведением субгармонических функций и свойствами полумартингалов. В частности, установлены аналогии и с некоторыми свойствами броуновских плоских движений.

В конце работы указывается, каким образом результаты работы могут быть обобщены на случай функций, заданных в пространстве, число измерений которого больше двух. В. В. Добронравов

665. **Частное упорядочение в теории мартингалов.** Бохнер (Partial ordering in the theory of martingales. Bochner S.), Ann. Math., 1955, 62, № 1, 162—169 (англ.)

Рассматриваются упорядоченные точечные последовательности, алгебры подпоследовательностей и связанные с ними последовательности функций, принимающих действительные значения. Вводятся понятия полумартингала, мартингала и стохастического процесса как систем последовательностей функций, удовлетворяющих соответствующим условиям. Рассматривается также случай, когда данные системы обладают свойством, характеризующим «процесс А. Н. Колмогорова». Отмечается связь полумартингала с вычислением длины пути, вдоль которого протекает случайный процесс.

В конце работы указывается на возможность обобщения всех результатов работы на случай функций, принимающих не только действительные значения; в частности отмечается, что за функции точек можно принять эрмитовы матрицы. В. В. Добронравов

666. **О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями.** Скороход А. В., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 3, 364—367

Излагается принцип инвариантности для последовательности серий независимых в каждой серии одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn},$$

для которых функции распределения сумм $S_{[nt]} = \sum_{i\leqslant nt}\xi_{ni}$ $(0<t\leqslant 1)$ сходятся к $\Phi_t(x)$ — некоторому безгранично делимому распределению. Случайные функции $\zeta(t) = S_{[(n+1)t]}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ принадлежат пространству $K$ всех функций, определенных на отрезке $[0,1]$ и имеют в каждой точке пределы справа и слева. Случайная функция $\zeta(t)$ однородного процесса с независимыми приращениями с распределением вероятностей $\Phi_t(x)$ определяет на $K$ меру $\mu(\mu(K)=1)$. В пространстве $K$ вводится топология $R$ следующим образом: для любого $\varepsilon>0$ положим $\Delta(t) = x(t+0) - x(t-0)$ и $x^\varepsilon(t) = \sum_{\tau<1,\,\varepsilon<|\Delta(\tau)|}\Delta(\tau)$, $\overline{x}^\varepsilon(t) = x(t) - x^\varepsilon(t)$. Последовательность $x_n(t)$ называется сходящейся к $x(t)$ при $n\to\infty$, если для всякого $\varepsilon$, для которого $x(t)$ не имеет скачков $\pm\varepsilon$, выполняются следующие условия: а) $x_n^\varepsilon(t)\to x^\varepsilon(t)$ во всех точках непрерывности $x^\varepsilon(t)$; б) число разрывов $x_n^\varepsilon(t)$ стремится к числу разрывов $x^\varepsilon(t)$; в) $\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_t|\overline{x}_n^\varepsilon(t) - \overline{x}^\varepsilon(t)| = 0$.

Теорема. Для всякого функционала $f[x(t)]$ в пространстве $K$, измеримого относительно мер $\mu_n$ и $\mu$ и непрерывного в топологии $R$ почти всюду относительно меры $\mu$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\{f[\zeta_n(t)]<\alpha\} = P\{f[\zeta(t)]<\alpha\}$$

в каждой точке непрерывности предельного распределения. В случае, когда $\zeta(t)$ является винеровским процессом, принцип инвариантности развит А. Н. Колмогоровым (Колмогоров А. Н., Изв. АН СССР, отд. естеств. и матем. наук, 1933, 363), Донскером (Donsker M., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6) и Ю. В. Прохоровым (РЖМат, 1953, 1268). В предположении, что $\zeta(t)$ не является нормальным, принцип инвариантности для некоторого класса функционалов установил И. И. Гихман (РЖМат, 1954, 5670).

В. С. Королюк

667. **Случайные функции, удовлетворяющие некоторым линейным соотношениям. II.** Гурье (Random functions satisfying certain linear relations. II. Ghurye S. G.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 105—111 (англ.)

Доказывается несколько теорем о случайных последовательностях, образованных линейными комбинациями значений вещественной случайной функции $X(t)$.

Определение. Если члены случайной последовательности $\{X_n\}$ обладают конечной дисперсией и $X_n$ и $X_k$ некоррелированы при $|n-k|>m$, то последовательность $\{X_n\}$ называется $m$-коррелированной.

Теорема 1. Пусть $X(t)$ — случайная функция, $-\infty<t<\infty$, обладающая непрерывной и стационарной ковариацией. Пусть: 1) существует положительное целое $m$ и набор $k$ вещественных и непрерывных функций $\alpha_1'(h),\ldots,\alpha_k'(h)$, $h\geqslant 0$, для которых при всех $h>0$ случайные величины

$$Y(\alpha'; h; n) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j'(h)\,X([n+k-j]h),\quad \alpha_0'(h)=1,$$
$$n = 0, \pm 1, \ldots$$

образуют $m$-коррелированную последовательность; 2) не существует значения $h>0$, при котором указанное в 1) обстоятельство выполнялось бы для какого-либо $m$ с некоторым набором функций $\beta_1(h),\ldots,\beta_l(h)$, $l<k$, взятых вместо функций $\alpha_j'(h)$.

Тогда существует единственный набор $k$ непрерывных вещественных функций $\alpha_1(h),\ldots,\alpha_k(h)$ со следующими свойствами:

а) Для всех $h>0$ последовательность $\{Y(\alpha; h; n)\}$, $=0, \pm 1, \ldots$, будет $(k-1)$-коррелированной. Она удет $(k-2)$-коррелированной тогда и только тогда, когда $X(t)$ детерминирована и удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(h)\, X(t+[k-j]\,h)=0$$

для всех $h>0$ и всех $t$ (с вероятностью 1).

б) Каждый корень $\gamma_j(h)$ уравнения

$$x^k+a_1(h)x^{k-1}+\ldots+a_k(h)=0 \qquad (1)$$

может быть записан в виде $\exp(\lambda_j h)$, где $\lambda_j$ независимы от $h$ и являются корнями, соответственно кратности $k_j$, некоторого алгебраического уравнения степени $k$ с вещественными коэффициентами. Далее, вещественные части $\lambda_j$ неположительны, и $k_j=1$, если $\lambda_j$ чисто мнимый корень. Корни $\exp(\lambda_j h)$ уравнения (1) имеют кратность $k_j$.

В теореме 2 снимается предположение о стационарности ковариации и, соответственно этому, ослабляется утверждение. Результат подобного типа с заменой $n$-коррелированности на $m$-связанность (РЖМат, 1953, 828) формулируется в виде теоремы 3, из которой получается следствие:

Каждая случайная функция $X(t)$, обладающая свойством, что для всех $t$ и всех $h>0$ приращения

$$[X(t+h)-X(t)],\ [X(t+2h)-X(t+h)],\ \ldots$$

образуют $m$-связанную последовательность, где $m$ — некоторое неотрицательное целое, представляет собой случайную функцию с независимыми приращениями.

Доказательства указанных результатов аналогичны одно другому. Например, применительно к теореме 1, основным является доказательство утверждения 5) о корнях уравнения (1), которое представляет собою характеристическое уравнение некоторого конечно-разностного уравнения для $\rho(jh)$, $j=1,2,\ldots,n$,

где $$\rho(h)=M[X(t)X(t+h)].$$

Н. А. Сапогов

668. **Марковские процессы в нормальных пространствах. Скороход А. В.** Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 151—157

Изучаются однородные марковские процессы в нормальном топологическом пространстве со счетной базой. Главное внимание уделяется свойствам инвариантных множеств. Приводится также теорема, дающая необходимые и достаточные условия существования инвариантной меры. И. И. Гихман

669. **О предельных теоремах для неоднородных цепей Маркова. Сарымсаков Т. А.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, М., АН СССР, 1956, 130

670. **Предельные теоремы для однородных цепей Маркова. Сираждинов С. Х.,** Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1955, 78 (5), 82 стр., 3 р. 50 к.

Введение. Краткий обзор содержания исследований А. А. Маркова, В. Деблина, А. Н. Колмогорова, В. И. Романовского, Т. А. Сарымсакова и др. Гл. I. «Характеристическая матрица» — основы метода характеристических матриц в теории цепей Маркова, предварительные сведения из теории однородных цепей. Гл. II. «Предельные теоремы для дискретного случая». Основная локальная предельная теорема и асимптотическое разложение, выведенное автором для распределения вектора, задающего числа пребывания системы с конечным числом состояний в этих состояниях, при схеме однородной цепи Маркова. Интегральная предельная теорема для одномерной случайной величины, построенной с помощью указанной цепи. Гл. III. «Предельные теоремы для непрерывного случая». Интегральные предельные теоремы различных типов, выведенные автором для марковского процесса с конечным числом состояний и непрерывным временем.

Ю. В. Линник

671. **Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Прохоров Ю. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 47

672. **Введение в теорию стационарных случайных функций. Яглом А. М.,** (具有隨幾平穩 n 級增量的過程的相關理論. 雅格龍 A. M.). 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 1, 3—152 (кит.)

673. **Марковские процессы с непрерывным временем. Дынкин Е. Б.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 44—47

674. **Предельные теоремы для потоков однородных событий. Ососков Г. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 132

675. **О работах Гаусса по теории вероятностей. Гнеденко Б. В.,** В сб.: Карл Фридрих Гаусс, М., АН СССР, 1956, 217—240

676. **Количество информации и энтропия для непрерывных распределений (конечных и бесконечномерных). Колмогоров А. Н., Яглом А. М., Гельфанд И. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 47

677. **Асимптотические разложения некоторых функционалов от сумм случайных величин. Королюк В. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 47

678. **Об аналитических свойствах устойчивых законов распределения. Золотарев В. М.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 49—52

Вместо обычных параметров $(\alpha, \beta)$ $(0<\alpha\leqslant 2, -1\leqslant\beta\leqslant+1)$, характеризующих семейство устойчивых законов распределения, автор вводит в качестве основных параметры $\alpha$ и $\lambda=2\pi^{-1}\operatorname{arctg}\{\beta\,|\,\operatorname{tg}(\pi\alpha/2)\,|\,\}$ при $\alpha\neq 1$ и $\lambda=\beta$ при $\alpha=1$. Новые параметры $(\alpha, \lambda)$ определены для всех точек квадрата $0<\alpha\leqslant 2$, $|\lambda|\leqslant k_\alpha=1-|1-\alpha|$. Приводится без доказательства ряд новых соотношений, которым удовлетворяют функции распределения $F(x, \alpha, \lambda)$ и плотности $p(x, \alpha, \lambda)$ устойчивых законов. Простейшие из них:

1) Для $1<\alpha\leqslant 2$ и $x>0$ имеет место:

$$\alpha F(-x, \alpha, \lambda)=F(x^{-\alpha}, \alpha^{-1}, \widetilde{\lambda})-(1-\alpha\widetilde{\lambda})/2.$$

2) Если $0<\alpha, \delta<1$, то

$$F(e^x, \alpha\delta, \alpha\delta)=F(e^x, \alpha, \alpha)\ast F(e^{\alpha x}, \delta, \delta).$$

Н. В. Смирнов

679. **Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. Рвачева Е. Л.,** Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1955, 29, № 6 (1), 5—44

Обобщаются основные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин на суммы независимых случайных многомерных векторов. В частности:

А) Пусть $\{P_n(M)\}$ — последовательность $s$-мерных безгранично делимых распределений и пусть $G_n(M)$ и $\Gamma_n$ — функция и вектор, соответственно определяющие, согласно теореме Леви (Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937), однозначно $P_n(M)$. Обобщая теорему Гнеденко (Гнеденко Б. В., Успехи матем. наук, 1944, 10, 115—165), автор доказывает, что для соотношения $P_n(M)\to P(M)$ необходимо и достаточно, чтобы 1) в интервалах непрерывности $I$ функции

$G(M)$ было $G_n(I) \to G(I)$, 2) $G_n(R_s) \to G(R_s)$, 3) $\Gamma_n \to \Gamma$, где $G(M)$ и $\Gamma$ определяют $P(M)$.

Б) Обобщая теорему Хинчина (Хинчин А. Я., Матем. сб., 1937, 79—120), автор доказывает, что безгранично делимые распределения и только они являются предельными для сумм $\xi_n = \Sigma_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$, где $\xi_{nk}$ — взаимно независимые, предельно постоянные многомерные случайные векторы.

В) Обобщая теорему Хинчина (Хинчин А. Я., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1938), автор находит необходимые и достаточные условия сходимости распределений сумм $I_n - A_n$ к нормальному распределению.

Г) Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных $s$-мерных векторов с общей вероятностной функцией $P(M)$. Обобщая теоремы Хинчина (Giorn. Ist. Ital. Att., 1935, 6, 371—393) и Феллера (Feller, Math. Z., 1935, 40, 521—559), а также теорему Гнеденко (Уч. зап. МГУ, 1939, 30, 61—82) и Деблина (Doeblin W., Studia math., 1940, 9, 71—96), автор находит условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $P(M)$ принадлежала области притяжения нормального закона и устойчивого распределения с показателем $\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ соответственно.

Д) Пусть $\{\xi_k\}$ определены также, как в Г) и имеют целочисленные компоненты. Пусть $P_n(z) = P(z_1, \ldots, z_n)$ — вероятностная функция вектора $\zeta_n = \Sigma_{k=1}^{n} \xi_k$. Получается обобщение теоремы Гнеденко (Гнеденко Б. В., Успехи матем. наук, 1948, 3, № 3, 187—194; Укр. матем. ж., 1949, № 4, 3—15). Для сходимости $B_n^s P_n(z)$, где $B_n$ — положительные постоянные, к плотности устойчивого распределения $\Phi(M)$ равномерно относительно $z_i$ $(i = 1, \ldots, s; -\infty < z_i < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $P(M)$ принадлежало области притяжения $\Phi(M)$, 2) распределение $\xi_k$ было однорешетчатым. M. Fisz

680. **О решении Барбье задачи Бюффона об игле.** Кламкин (On Barbier's solution of the Buffon needle problem. Klamkin Murray S.), Math. Mag., 1955, 28, № 3, 135—138 (англ.)

Если в известной задаче Бюффона жестко прикрепить к бросаемой игле любую ломаную, то математическое ожидание числа пересечений этой ломаной с нанесенными на плоскости параллельными прямыми будет равно $cL$, где $L$ — периметр ломаной, а $c$ зависит только от расстояния между параллельными прямыми. В заметке при некоторых дополнительных предположениях доказывается, что и обратно из справедливости этого свойства для любой ломаной вытекает, что иглу бросают с равномерным распределением. А. А. Юшкевич

681. **Заметка о последовательном выборе.** Банерджи (A note on successive sampling. Banerjee K. S.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1955, 6, № 21, 35—39 (англ.)

Пусть $N_0$ — исходное число шаров, из которых $N_0 p$ красных и $N_0(1-p)$ белых. Задается последовательность целых положительных чисел $N_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, определяющих объем случайной последовательной выборки на $i$-ом этапе. На каждом этапе выбор может быть как с возвращением, так и без возвращения. Изучается дисперсия числа красных шаров на $i$-ом этапе последовательного случайного выбора в различных случаях. В. С. Королюк

682. **Фундаментальное тождество Вальда для общего стохастического процесса.** Шеффер (Wald's fundamental identity for general stochastic processes. Scheffer Carel Louis), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 301—303 (англ.)

В последовательном анализе важную роль играет тождество, связывающее вероятности того, что процедура закончится при $n$-ом испытании с характеристической функцией переходных вероятностей. Автор указывает обобщение этого тождества на произвольные процессы типа наследственности. Б. В. Гнеденко

683. **Дисперсия максимума частных сумм конечного числа независимых нормальных величин.** Анис (The variance of the maximum of partial sums of a finite number of independent normal variates. Anis A. A.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 96—101 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые нормально распределенные стандартизованные случайные величины. Обозначим через $S_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ частные суммы этих величин и пусть $U_n = \mathrm{Max}_r \{S_r\}$.

Показано, что второй момент величины $U_n$ равен

$$\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2\pi} \Sigma_{r=1}^{n-2} \Sigma_{s=1}^{r} \{s(r-s+1)\}^{-1/2}.$$

Математическое ожидание величины $U_n$ было определено в работе Эйниса и Ллойда (РЖМат, 1954, 1737). Е. Л. Ющенко

684. **Некоторые вопросы теории случайных блужданий.** Ядренко М. И., Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 199—210

Рассматривается несколько задач из теории случайных блужданий на прямой в предположении, что вероятности скачков вправо или влево равны между собой; определяется распределение числа пребываний блуждающей частицы в данной точке, а также условные распределения этой величины при различных условиях.

Для решения этих задач используется метод производящих функций. Из полученных результатов следуют некоторые ранее известные результаты, например результаты В. С. Михалевича (Докл. АН СССР, 1952, 85, № 4). Теорема 1 § 5 обобщает известный результат Чжуна и Феллера (Chung K. L., Feller W., Proc. Nat. Akad. Sci., 1949, 35, 605—608). Е. Л. Ющенко

685. **Корреляционная теория процессов со случайными стационарными $n$-ми приращениями.** Яглом А. М., (平穩隨機函數導論. 雅格龍 A. M.), 數學進展. Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 2, 202—255(кит.)

См. РЖМат, 1956, 1520.

686 Д. **Понятие энтропии в теории вероятностей и его применения в теории передачи информации по каналам связи.** Розенблат-Рот М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

687. **Подобие, несмещенность, минимальность и допустимость статистических критериев.** Сверд-рун (Similarity, unbiassedness, minimaxibility and admissibility of statistical test procedures. Sverdrup Erling), Skand. aktuarietidskr., 1953, Häft. 1—2, 64—86 (англ.)

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\Omega$ и $\omega \subset \Omega$ — два множества функций распределения. Требуется по значению $X = x$ проверить, какая из альтернативных гипотез $F \in \omega$ или $F \in \Omega - \omega$ верна. Критерий для проверки этих гипотез характеризуется величиной $\delta(x)$, равной вероятности забраковать гипотезу $F \in \omega$ при условии $X = x$. Говорят, что критерий имеет уровень значимости $\alpha$, если математическое ожидание $E\delta(X) \leqslant \alpha$ для всех $F \in \omega$. Критерий называется подобным относительно подмножества $\omega_0 \subset \omega$, если

$E\delta(X) = \alpha$ для всех $F \in \omega_0$. Критерий называется несмещенным, если $E\delta(X) \geqslant \alpha$ для всех $F \in \Omega - \omega$. Критерий можно охарактеризовать также ошибкой первого рода $w_1$ (вероятность выбрать гипотезу $F \in \Omega - \omega$, когда верна гипотеза $F \in \omega$) и ошибкой второго рода $w_2$ (вероятность выбрать гипотезу $F \in \omega$, когда верна гипотеза $F \in \Omega - \omega$). Пусть $r(F, \delta) = w_1 E[1 - \delta(X)]$, если $F \in \Omega - \omega$, и равно $w_2 E\delta(X)$, если $F \in \omega$. Критерий $\delta_0$ называется минимальным, если для любого другого критерия $\delta$ имеет место $\sup_{F \in \omega} r(F, \delta_0) \leqslant \sup_{F \in \omega} r(F, \delta)$, и допустимым, если не существует равномерно более мощного критерия $\delta_1$ (т. е. такого, что $r(F, \delta_1) \leqslant r(F, \delta)$ для всех $F \in \Omega$ и $r(F, \delta_1) < r(F, \delta)$ хотя бы для одного $F \in \Omega$).

Наибольшее внимание в работе уделяется случаю, когда $\Omega$ состоит из функций распределения вида $dF(x) = f[u(x), v(x)]\, d\varphi(x)$, где $f[u(x), v(x)] = A(\tau, \rho) \exp[\Sigma_{j=1}^{s} \tau_j u_j(x) + \Sigma_{j=1}^{r} \rho_j v_j(x)]$, причем $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$ и $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$ — переменные параметры, а $u_j(x)$, $v_j(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции. Под $\omega$ понимается подмножество тех $F(x)$, для которых $\rho = 0$. Рассматривается критерий $\delta(x) = \delta_0[u(x), v(x)]$, где $0 \leqslant \delta_0(u, v) \leqslant 1$, $\delta_0(u, v) = 1$ при $f(u, v) > \Sigma c_i v_i + c$ и $\delta_0(u, v) = 0$ при $f(u, v) < \Sigma c_i v_i + c$. При некоторых общих условиях доказывается, что если указанный критерий является несмещенным, то он является наиболее мощным среди несмещенных критериев и притом наиболее мощным равномерно относительно выбора $\tau$. Любой равномерно наиболее мощный среди подобных критериев является несмещенным.

В качестве примера рассматривается схема последовательных испытаний, в каждом из которых могут произойти или не произойти события $A$ и $B$, и строятся критерии для проверки некоторых гипотез относительно вероятностей этих событий по частотам их осуществления в последовательности испытаний. Предложенные критерии являются равномерно наиболее мощными среди всех несмещенных критериев с заданным уровнем значимости. В качестве другого примера рассматривается гипотеза о равенстве нулю среднего значения нормальных величин с неизвестной дисперсией. В заключение показывается, что при некоторых общих условиях любой несмещенный критерий с уровнем значимости $w_1/(w_1 + w_2)$ является минимальным, а если существует равномерно наиболее мощный несмещенный критерий с уровнем значимости $w_1/(w_1 + w_2)$, то он является допустимым. А. С. Монин

**688. Теория перестановок в выводе устойчивых критериев и изучении отклонений от допущений. Бокс, Андерсен** (Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumptions. Box G. E. P., Andersen S. L.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, B17, № 1, 1—34 (англ.)

К статистическим критериям естественно предъявлять два требования: (1) критерии должны быть чувствительными к изменению в интересующих нас факторах (требование мощности критериев); (2) они должны быть нечувствительными к изменению в остальных факторах. Критерии, удовлетворяющие второму требованию, авторы называют устойчивыми (robust tests). При получении параметрических критериев стремятся удовлетворить первое требование, а при получении непараметрических критериев — второе. Авторы исследуют устойчивость некоторых критериев, используемых в дисперсионном анализе. Обычное в дисперсионном анализе допущение о нормальности распределения наблюдений заменяется предположением о том, что для нулевой гипотезы плотность совместного распределения наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ симметрична относительно наблюдений. Выполнение последнего требования часто можно гарантировать при помощи рандомизации. В. В. Петров

**689. Непараметрическое разбиение одномерной совокупности на 2 класса. Столлер** (Univariate two-population distribution-free discrimination. Stoller David S.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 268, 770—777 (англ.)

Пусть $\Pi$ — совокупность одномерных случайных величин, состоящая из подмножеств $\Pi_1$ и $\Pi_2$ с соответствующими функциями распределения $F_1(z)$ и $F_2(z)$, а $\theta$ и $(1 - \theta)$ — вероятности того, что случайный элемент $z \in \Pi$ входит соответственно в $\Pi_1$ или $\Pi_2$. Из совокупности $\Pi$ извлечена выборка и, пользуясь ее результатами, требуется, не зная $F_1(z)$, $F_2(z)$ и $\theta$, дать прием отнесения случайно извлеченного элемента $x \in \Pi$ в $\Pi_1$ или $\Pi_2$.

В качестве такого приема рекомендуется определить критическое число $\zeta$ и считать $x \in \Pi_1$ или $x \in \Pi_2$ в зависимости от того $x \leqslant \zeta$ или $x > \zeta$. Если обозначить через $Q(z)$ вероятность правильной классификации, пользуясь критическим числом $z$, то требуется определить $\zeta$, чтобы при $z = \zeta$ $Q(z)$ достигало максимума.

Указывается, как найти оценки $\zeta^*$ для $\zeta$ и $\hat{Q}(z)$ для $Q(z)$. Указывается, что $\hat{Q}(z)$ — несмещенная и состоятельная оценка для $Q(z)$ и что $\hat{Q}(\zeta^*)$ сходится по вероятности к $Q(\zeta)$. Б. В. Финкельштейн

**690. Заметка о видоизмененном $t$-критерии. Роде** (A note on a modified $t$-test. Råde Lennart) Skand. aktuarietidskr., 1954, № 1—2, 65—70 (англ.)

Пусть $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n = mk$, — случайная выборка из нормальной совокупности $(\xi, \sigma)$, которая разбита на $k$ групп по $m$ значений в каждой группе.

Пусть далее $R_j$ — размах $j$-й группы и $R_{m,k} = k^{-1}\Sigma_j R_j$. В случае $k = 1$, $n = m$ вместо $R_{n,1}$ употребляется символ $R_n$. При $\xi = 0$ и $\sigma = 1$ вводятся следующие обозначения:

$$ER_n = \alpha_n,\ DR_n = \beta_n,\ \gamma_n = \beta_n/\alpha_n,\ \delta_n = n\gamma_n^2,$$

$$W_{m,k} = R_{m,k}/\alpha_m.$$

Рассматривается величина

$$u = \sqrt{n}\,(\bar{x} - \xi)\sigma^{-1}/W_{m,k}\sigma^{-1},$$

являющаяся видоизменением стьюдентова отношения $t$. Распределение величины $u$ изучалось Лордом (Lord E., Biometrika, 1947, 34, 41) и имеет весьма сложный вид.

В данной статье доказывается, что величина $\lambda = u\sqrt{n/(n + u^2\delta_m)}$ распределена асимптотически нормально $(0,1)$.

Далее, пусть $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и $P(\lambda \leqslant \lambda_\theta) = \theta$.

Приводится таблица значений величины $u_0 = \lambda_\theta \sqrt{n/(n - \delta_m\lambda_\theta^2)}$ для различных $m$, $k$ и $\theta$.

В таблице эти значения сравниваются с аналогичными значениями, вычисленными Лордом с помощью числовых квадратур. Сравнение обнаруживает хорошее согласие для $k \geqslant 3$.

Изучается мощность $u$-критерия. Если нулевой гипотезой является гипотеза, что среднее $\xi$ нормальной совокупности равно $a$ при альтернативных гипотезах $\xi = a + \sigma\rho$, то функция мощности $u$-критерия асимптотически равна

$$\pi(\rho) = \Phi\left(-\lambda_\theta - \rho\sqrt{n - \delta_m\lambda_\theta^2}\right) + \Phi\left(-\lambda_\theta + \rho\sqrt{n - \delta_m\lambda_\theta^2}\right),$$

где $\Phi$ — нормальная функция распределения.

Приводится таблица для значений $\rho_\alpha\sqrt{n}$ при $\alpha =$

$= 0{,}005$ и различных $m$ и $k$, где $\rho_\alpha$ — определяется из равенства $\pi(\rho_\alpha) = 1 - \alpha$. Указывается, что критерий $u$ будет наиболее мощным при $m = 8$. С. Х. Туманян

691. **Асимптотические распределения серийных статистик и приложения к задачам непараметрического испытания гипотез.** Гхош (Asymptotic distribution of serial statistics and applications to problems of nonparametric tests of hypotheses. Ghosh M. N.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 218 — 251 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка объема $n$. Фиксируем значения выборки и рассмотрим $\Gamma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множество всех перестановок элементов выборки.

Если $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая несимметрическая статистика, то каждому элементу $\Gamma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответствует определенное значение $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждому значению $S$ приписывается вероятность $1/n!$ Получаемое таким образом распределение статистики $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\Gamma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется рандомизированным распределением.

В том случае, когда элементы выборки взаимно независимы и одинаково распределены, рандомизированное распределение называется непараметрическим.

Статистика $S$ называется серийной, если она представлена в виде

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}),$$

$$x_{n+j} = x_j.$$

Изучается асимптотика непараметрических распределений одной и нескольких серийных статистик, а также рандомизированных распределений для случая выборки, элементы которой образуют марковский процесс порядка $p$.

Получаемые предельные распределения используются для решения некоторых проблем испытания гипотез в случае марковского процесса при большом числе наблюдений.

Теорема 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ взаимно независимы и одинаково распределены с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть, далее, $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f_t(x_t, \ldots, x_{t+k-1})$ — серийная статистика.

Если выполнены условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f_t(x_1, x_2, \ldots, x_k)|^s dF(x_1) dF(x_2) \ldots dF(x_k) < C_s \qquad (A)$$

для всех $t = 1, 2, 3, \ldots$, $s = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\liminf \mu_{2,n} > 0, \qquad (B)$$

$$\mu_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{|i-j|<k} E\{f_i(x_i, \ldots, x_{i+k-1}) f_j(x_j, \ldots, x_{j+k-1}) -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{|i-j|<k} E\{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) f_j(x_{k+1}, \ldots, x_{2k})\} -$$

$$- \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k} E\{f_i(x_1, \ldots, x_k) f_j(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_k})\} +$$

$$+ k^2\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E f_t(x_1, \ldots, x_k)\right\}^2,$$

то непараметрическое распределение статистики $[S(x_1, x_2, \ldots, x_n) - M_1]/\sqrt{M_2}$, где $M_1$ — первый, $M_2$ — второй центральный моменты непараметрического распределения, сходится по вероятности к нормальному распределению со средним 0 и дисперсией 1.

Теорема (4). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность случайных величин, образующих марковский процесс, тогда при условиях $A'$, $B'$ (аналогичных $(A)$ и $(B)$ теоремы 1) рандомизированное распределение серийной статистики

$$\frac{S(z_1, z_2, \ldots, z_n) - M_1}{\sqrt{M_2}}$$

сходится по вероятности к нормальному распределению со средним 0 и дисперсией 1.

Здесь $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — случайная перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_n$. А. А. Зингер

692. **О максимальном уклонении эмпирической плотности распределения.** Туманян С. Х., Науч. тр. Ереванск. ун-та, 1955, 48, 3—48 (рез. арм.)

Подвергаются дальнейшему изучению вопросы статистической оценки плотности распределения случайной величины, исследованные в работе Н. В. Смирнова (Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1950, 16).

Пусть $\xi$ — случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. Сегмент $[a, b]$, на котором рассматриваемое приближение разбивается на $s$ равных частей $\Delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Пусть далее производится $n$ независимых наблюдений случайной величины $\xi$, и $m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ означают число наблюдений, попавших в соответственные интервалы $\Delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Эмпирическая функция распределения обозначается через

$$f_n^*(x) = m_i/nh, \quad x \in \Delta_i \ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Доказывается, например, следующая теорема: если плотность распределения $f(x)$, обладающая на $[a, b]$ ограниченной производной, удовлетворяет условию $\min f(x) = \mu > 0$, и при возрастании $n$ и $s$ выполняются соотношения

$$\frac{s(\ln s)^3}{n} \to 0, \quad \frac{n \ln s}{s^2} \to 0,$$

то

$$P\left\{\operatorname{Max}\left|\frac{f_n^*(x) - f(x)}{\sqrt{f(x)}}\right| \leqslant \frac{l_s + \lambda/l_s}{\sqrt{nh}}\right\}_{n\to\infty} \to \exp(-2e^{-\lambda}),$$

где $h = (b - a)/s$, а $l_s$ определяется уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{l_s}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{s}.$$

Далее рассматриваются вопросы оценки плотности и в случае, когда $f(x)$ может обращаться в нуль в некоторых точках сегмента $[a, b]$, а также когда сегмент $[a, b]$, на котором рассматривается приближение, неограниченно возрастает вместе с ростом объема наблюдений.

Метод доказательства теорем об оценке плотностей распределения опирается на следующую предельную теорему:

Пусть $s_n$ — число событий в $n$-й серии возрастает с ростом $n$. События $n$-й серии обозначим через $E_1^n$,

$E_2^n, \ldots, E_s^n$. Пусть далее

$$\nu_r(s_n) = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots k_r \leqslant s_n} P(E_{k_1}^n E_{k_2}^n \ldots E_{k_r}^n),$$

где $P(E_{k_1}^n \ldots E_{k_r}^n)$ обозначает вероятность совместного осуществления событий $E_{k_1}^n, \ldots, E_{k_r}^n$. Обозначим через $P_{s_n}(r)$ вероятность того, что ровно $r$ событий из числа $s_n$ в $n$-й серии осуществляется, а через $P(r, a)$ — вероятностную функцию закона Пуассона, тогда верна следующая теорема: если при возрастании $n$ для каждого фиксированного $r$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \nu_r(s_n) = a^r/r! \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

то вероятности $P_{s_n}(r)$ сходятся к вероятностям $P(r, a)$ отвечающим распределению Пуассона с параметром $a$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} P_{s_n} = \frac{a^r}{r!} e^{-a}$$

Г. М. Мания

**693. Совокупные критерии для линейных гипотез. Гхош** (Simultaneous tests of linear hypotheses. Ghosh M. N.), Biometrika, 1955, **42**, № 3—4, 441—449 (англ.)

Пусть $y_i$ — независимые нормально распределенные случайные величины с неизвестной дисперсией $\sigma^2$ и пусть

$$E(y_i) = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{im}p_m \quad (i = 1, \ldots, N),$$

где $p_1, \ldots, p_m$ — неизвестные параметры. Рассматривается задача испытания гипотез о существовании связи между параметрами $p_1, \ldots, p_m$, описываемой системой линейных однородных уравнений. Предлагаются квазинезависимые критерии для этих гипотез. Критерии для гипотез $H_1$: $\theta_1 + 0$, $H_2$: $\theta_2 = 0$, $H_3$: $\theta_3 = 0$ называются квазинезависимыми, если ошибки первого и второго типов для каждой из этих гипотез не зависят от справедливости остальных гипотез. В. В. Петров

**694. Оценки с ограниченной относительной ошибкой при подсчете частиц. Гиршик, Рубин, Ситгривс** (Estimates of bounded relative error in particle counting. Girschick M. A., Rubin H., Sitgreaves R.), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 2, 276—285 (англ.)

Частицы случайно распределены на площади (во времени, в пространстве и т. д.); распределение числа частиц, попавших в площадь размера $a$, предположено пуассоновским с неизвестным параметром $\lambda$. Требуется оценить параметр $\lambda$ таким образом, чтобы при заданных $\gamma$ и $\alpha$

$$P\{1 - \gamma \leqslant l/\lambda \leqslant 1 + \gamma\} \geqslant \alpha.$$

Здесь $l$ — оценка $\lambda$. Авторы предлагают несколько приемов для оценки $\lambda$.

1. Рассматривается $n$ непересекающихся областей площади $a_0$; $x_i$ — число попавших в них частиц $\bar{l} = (na_0)^{-1}\Sigma x_i$. По $\alpha$ и $\bar{l}$ определяются две функции $L_\mu$ и $L_\gamma$, через которые определяются $\hat{l}$ и $\hat{\gamma}$. Можно доказать, что $P\{1 - \hat{\gamma} \leqslant \hat{l}/\lambda \leqslant 1 + \hat{\gamma}\} \sim \alpha$. Указанную процедуру оценки авторы называют «оценкой при постоянной площади».

2. Оценка с фиксированным числом частиц. Задается число $M$. Рассматриваются все более широкие области, пока число частиц не окажется равным $M$. Пусть $a_M$ величина этой площади; $\lambda a_M$ имеет плотность распределения $f_M(x) = e^{-x}x^{M-1}/(M-1)!$. Пусть $l = b/a_M$, где $b$ — постоянная, тогда $\psi_\gamma(b, M) = P\{1 - \gamma \leqslant l/\lambda \leqslant 1 + \gamma\}$ достигает максимума при $b^* = M(1 - \gamma^2) \times (2\gamma)^{-1} \log(1 + \gamma)(1 - \gamma)^{-1}$. Число $M$ естественно определять из неравенства $\psi_\gamma(b^*, M) \geqslant \alpha$.

3. Рассматривается видоизмененная процедура 2; в $k$ непересекающихся областях производится описанное расширение, пока в областях $a_j$ не окажется по $m_j$ частиц, $\Sigma_{j=1}^k m_j = M$.

4. Приводятся также последовательные оценки $\lambda$.

Б. В. Гнеденко

**695. Обобщение критерия Кендалла корреляции рангов. I. Терпстра** (A generalization of Kendall's rank correlation statistic. I. Terpstra T. J.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1955, **A58**, № 5, 690—698; Indagationes math., 1955, **17**, № 5, 690—696 (англ.)

Рассматривается $m$ серий случайных величин $x_h^{(\alpha)}$ по $k$ величин в каждой серии ($h = 1, \ldots, k$; $\alpha = 1, 2, \ldots, m$); $x_{h,\xi}^{(\alpha)}$ ($\xi = 1, 2, \ldots, n_h^{(\alpha)}$), $n_h^{(\alpha)}$ независимых величин с тем же распределением, как $x_h^{(\alpha)}$. Различаются три специальных случая:

1. Предполагается, что для каждого $h$ $x_h^{(1)}, x_h^{(2)}, \ldots, x_h^{(m)}$ имеют одно и то же распределение и эти множества величин («колонны») независимы каждая от другой. Проверяется гипотеза, что величины $x_h^{(1)}, x_h^{(2)}, \ldots, x_h^{(m)}$ при каждом $h$ также независимы между собой. В качестве альтернативной гипотезы выставляется предположение о положительной корреляции между $x_h^{(\alpha)}$ и $x_h^{(\beta)}$.

2. Все $x_h^{(\alpha)}$ полностью между собой независимы. Проверяется гипотеза, что величины, отвечающие зафиксированному $\alpha$ («строки»), имеют одно и то же распределение (вообще зависящее от $\alpha$) при альтернативном допущении, что можно изменить порядок колонн так, чтобы величины каждой из строк обнаруживали «тренд» одного и того же смысла (убывание или возрастание).

3. $m = 2$, $x_h^{(1)} = h$, а $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}$ — независимы. Гипотеза утверждает, что $x_h^{(2)}$ имеют одно и то же распределение при альтернативе, утверждающей, что эти величины имеют «тренд» к возрастанию или убыванию. Для проверки гипотез 1, 2, 3 используется одна и та же характеристика $S = 2^{-1}\Sigma_\alpha\Sigma_\beta S_{\alpha,\beta}$,

$$S_{\alpha,\beta} = 2^{-1}\Sigma_h\Sigma_j (n_h^{(\alpha)}n_h^{(\beta)}n_j^{(\alpha}\, n_j^{(\beta)})^{-1}V_{h,j}^{(\alpha)}V_{h,j}^{(\beta)}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m, \; V_{h,j}^{(\alpha)} = \Sigma_\xi\Sigma_\eta \operatorname{sign}(x_{j,\eta}^{(\alpha)} - x_{h,\xi}^{(\alpha)}),$$

$$\xi = 1, 2, \ldots, n_h^{(\alpha)}, \; \eta = 1, 2, \ldots, n_j^{(\alpha)}.$$

Распределение $S$ при гипотезах 1—2 вытекает из равновероятности всех перестановок наблюденных значений величин каждой строки в отдельности. В случае 3 распределение $S$ вытекает из равновероятности всех перестановок величин $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}$. Для $m = 2$, $n_h^{(1)} = n_h^{(2)} = 1$ при $h = 1, \ldots, k$ $S$ идентично с критерием Кендалла. Автор указывает условия, при которых распределение $S$ асимптотически нормально.

Н. В. Смирнов

**696. Распределение квадратичных форм и некоторые применения. Град, Соломон** (Distribution of

quadratic forms and some applications. Grad Arthur, Solomon Herbert), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 464—477 (англ.)

При помощи формулы обращения характеристической функции устанавливается точное распределение вероятностей квадратичной формы $Q_k = \Sigma_{i=1}^{k} a_i x_i^2$, где $x_i$ — нормально распределенные нормированные случайные переменные $0 < a_i < a_{i+1}$ и $\Sigma_{i=1}^{k} a_i = 1$. (а)

Приводятся некоторые известные асимптотические представления распределений квадратичных форм, видоизмененных в соответствии с условиями (а). Вычислены таблицы вероятностей $P(Q_2 \leqslant t)$ и $P(Q_3 \leqslant t)$ для восьми и девяти значений $a_1$, $a_2$, $a_3$ и для $t = 0, 1; 0{,}2; \ldots, 0{,}9$, по точным и асимптотическим представлениям распределений.

Указывается, что найденное автором распределение имеет применение в военных операциях (в теории стрельбы). Указано использование составленных таблиц в разных задачах статистики. М. К. Камалов

**697. Следы и кумулянты квадратичных форм нормально распределенных переменных. Ланкастер** (Traces and cumulants of quadratic forms in normal variables. Lancaster H. O.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, 16, № 2, 247—254 (англ.)

Показывается, что если $\mathbf{X}$ — вектор, компонентами которого являются $n$ взаимно независимых нормально распределенных и нормированных случайных переменных, то $s$-й кумулянт $k_s$ квадратичной формы $\mathbf{X}'A\mathbf{X}$ определяется формулой

$$k_s = 2^{s-1}(s-1)!\,\mathrm{tr}A^s,$$

где $\mathrm{tr}A^s$ — след матрицы $A^s$.

При помощи следов матриц квадратичных форм даны упрощенные доказательства уже известных теорем о независимости этих форм и теорема Кочрана о $\chi^2$-распределении. Основываясь на свойствах кумулянтов нормального распределения, установлено, что только для этого распределения возможно найти неособенное линейное преобразование одной последовательности независимых переменных $x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ в другую, $y_i$, причем $E(x_i) = E(y_i) = 0$ и $D(x_i) = D(y_i) = 1$; наконец, даются производящие функции моментов и кумулянтов совместного распределения нескольких квадратичных форм.

Имеются ошибки и опечатки. М. К. Камалов

**698. Многомерное $t$-распределение, связанное с последовательностью нормально распределенных выборочных отклонений. Корниш** (The multivariate $t$-distribution associated with a set of normal sample deviates. Cornish E. A.), Austral. J. Phys., 1954, 7, № 4, 531—542 (англ.)

Если в случайных выборках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют многомерное нормальное распределение с матрицей вторых моментов $\sigma^2\mathbf{I}_n$, то $y_i = x_i - \bar{x}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и $\bar{x} = n^{-1}\Sigma_{i=1}^{n} x_i$ имеют собственное многомерное нормальное распределение с определенной матрицей (вторых моментов) $\mathbf{V}$ порядка $n \times n$. Исходя из этого и неособенного преобразования $\mathbf{t} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, где $\mathbf{t}$ и $\mathbf{y}$ — матрицы-столбцы элементов $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно, [$\mathbf{Q}$ — диагональная $(n-1)\times(n-1)$ матрица с диагональными элементами $s^{-1}\sqrt{n/(n-1)}$, $s^2$—оценка генеральной дисперсии $\sigma^2$, с $\nu$ степенями свободы], показано, что совместное распределение $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ есть

$$\frac{\Gamma((\nu+n-1)/2)\,|\mathbf{R}|^{-1/2}}{(\pi\nu)^{(n-1)/2}\Gamma(\nu/2)} \int\limits_{-\infty \leqslant t_i \leqslant T_i} \cdots \int \times (1 + t'R^{-1}t/\nu)^{-(\nu+n-1)/2}\,dt, \qquad (1)$$

причем $T_i$ — заданные числа $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $\mathbf{R}$ определяются из равенства $\mathbf{QBQ}' = \sigma^2 s^{-2}\mathbf{R}$, $\mathbf{B}$ — главная подматрица порядка $n-1 \times n-1$ матриц $\mathbf{V}$; $\mathbf{t}'$, $\mathbf{Q}'$ — транспонированные матрицы (см. также РЖМат, 1956, 6013). М. К. Камалов

**699. Об использовании распределения Неймана. Йонеда** (On the use of the Neyman's allotation. Yoneda Keizo), Yokohama Math. J., 1953, 1, № 1, 118—123 (англ.)

Имеется некоторая совокупность, состоящая из $m$ групп, и требуется рациональным образом определить выборочное среднее этой совокупности. Вводятся обозначения: $P_i$ — отношение объема $i$-й группы к объему всей совокупности, так что $\Sigma_{i=1}^{m} P_i = 1$ ($P_i$ — предполагаются известными); $\sigma_i^2$ — неизвестная дисперсия $i$-й группы совокупности; $n_i$ — размер выборки из $i$-й группы; $s_i^2$ — выборочная дисперсия $i$-й группы.

Сравниваются два метода определения выборочного среднего совокупности в случаях, когда $n_i$ распределяются пропорционально $P_i$ и когда $n_i$ распределяются пропорционально $P_i\sigma_i$ (второй способ распределения объема выборки по группам является распределением Неймана).

В первом случае дисперсия выборочного среднег значения равна

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} = N^{-1}\Sigma_{i=1}^{m} P_i\sigma_i^2,$$

где $N$ — объем всей выборки, а во втором случае дисперсия выборочного среднего значения равна

$$\sigma^2_{\bar{x}_N} = N'^{-1}(\Sigma_{i=1}^{n} P_i\sigma_i)^2, \qquad (1)$$

где $N'$ — также объем всей выборки.

Автор вместо (1) рассматривает

$$\sigma^2_{\bar{x}_N} = N'^{-1}\Sigma_{i=1}^{m} P_i\sigma_i^2 s_i^{-1}(\Sigma_{j=1}^{m} P_j s_j)$$

и находит условие, при котором $P\left\{\sigma^2_{\bar{x}_R} > \sigma^2_{\bar{x}_N}\right\} \geqslant 0{,}99$, т. е. при котором метод Неймана предпочтительнее. Это условие зависит от значений $N'/N$, $n_0 = \min(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, а также от отношения $(\Sigma_{i=1}^{m} P_i\sigma_i)/\sqrt{\Sigma_{i=1}^{m} P_i\sigma_i^2}$. С. Х. Туманян

**700. О критериях нормальности и других критериях согласия, основанных на методе расстояния. Кац, Кифер, Вольфовиц** (On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 189—211 (англ.)

Для проверки гипотезы о нормальности распределения рассматривается видоизменение $\omega^2$-критерия Крамера — Смирнова, использующее статистику

$$nw_n = n\int\left[\hat{F}\left(\frac{x-\bar{x}_n}{S_n}\right) - F(x)\right]^2 dF(x), \text{ где } \hat{F}_n(x), \bar{x}_n, S_n^2$$

— соответственно, эмпирическая функция распределения, среднее и дисперсия выборки объема $n$. Доказывается, что характеристическая функция предельного

распределения величины $nw_n\,(n\to\infty)$ имеет вид $\prod_1^\infty (1-2i\xi\lambda_j)^{-1/2}$, где $\lambda_j$ — собственные числа некоторого симметрического, положительно определенного оператора Фредгольма. Аналогичный результат для оценки расхождения между эмпирической функцией распределения и теоретической, содержащей один эмпирически определяемый параметр, был получен Дарлингом (РЖМат, 1956, 4686). Указывается метод приближенного вычисления предельного распределения величины $nw_n$ и приводится соответствующая таблица. Оценка погрешности не дается. Приведены также таблицы распределения величин $nw_n$ и $\sqrt{n}v_n =$

$$= \sqrt{n}\sup_x \left| \hat{F}_n\left(\frac{x-\bar{x}_n}{S_n}\right) - F(x)\right| \text{ для } n=25 \text{ и } n=100,$$

вычисленные по данным 400 случайных выборок в каждом случае.

Для класса $R$ равномерных распределений на интервале $(\theta-1/2, \theta+1/2)$ находится точное предельное распределение величины $\sqrt{n}\,\delta(\hat{F}_n, R) = \inf_\theta \sup_x \sqrt{n}\,|\hat{F}_n(x) - F(x,\theta)|$. Показывается, что для различения простой гипотезы $F(x)=G(x)$ и альтернативных гипотез $\gamma(F,G)\geqslant\Gamma$ или $\delta(F,G)\geqslant\Delta$, где

$$\gamma^2(F,G) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)-G(x)]^2\, d([F(x)+G(x)]/2),$$

$$\delta(F,G) = \sup_x |F(x)-G(x)|,$$

критерий А. Н. Колмогорова в обоих случаях эффективней $\chi^2$-критерия согласия, а $\omega^2$-критерий по крайней мере в первом случае. И. И. Гихман

**701. Асимптотическое поведение некоторых порядковых критериев для анализа изменчивости.** Андрюс (Asymptotic behavior of some rank test for analysis of variance. Andrews Fred C.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 4, 724—736 (англ.)

Рассматривается $c$ взаимно независимых выборок численностей $n_1, n_2, \ldots, n_c$. В каждой из выборок распределение предполагается неизменным $F_i(x)$, принадлежащим некоторому классу распределений $\Omega$, $n_i = c_i n$, где $c_i$ — целые числа. Проверяется гипотеза $H_0$, состоящая в том, что для некоторых постоянных $\theta_i$ (не все $\theta_i$ равны) имеют место равенства $F_i(x) = F(x+\theta_i/\sqrt{n})$.

В предположении, что при некотором $t$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{n}\,\{F(x+t/\sqrt{n}) - F(x)\}\,dF(x) < +\infty$$

находится асимптотическое (при $n\to\infty$) распределение величины

$$H = 12\,[N(N+1)]^{-1}\sum_{i=1}^{c} n_i\,[\bar{R}_i - (N+1)/2]^2,$$

где $N=\Sigma n_i$, $\bar{R}_i$ — среднее арифметическое порядковых номеров результатов наблюдений $i$-й выборки в общем порядочивании всех $N$ наблюдений. Найдена также асимптотическая относительная эффективность критерия по сравнению с критерием Муда (Mood A., Introduction to the theory of statistics, McGraw — Hill, 1950). Б. В. Гнеденко

**702. Серийная корреляция в регрессионном анализе. I.** Уотсон (Serial correlation in regression analysis. I. Watson G. S.), Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 327—341 (англ.)

Рассматривается процедура линейного регрессионного анализа с $k$ независимыми величинами, основанного на предположении о том, что матрица $S$ вторых моментов ошибок равна $\sigma^2\gamma$, где $\sigma^2$ — неизвестный параметр, а $\gamma$ — данная матрица, в то время как в действительности $S=\sigma^2\alpha$, $\alpha\neq\gamma$. Получена нижняя граница для эффективности оценок, вычисленных по методу наименьших квадратов, для коэффициентов регрессии. Получены также интервалы, в которых лежат границы критических областей для $t$- и $F$-критериев, используемых для проверки некоторых гипотез относительно коэффициентов регрессии. В. В. Петров

**703. Об эффективности планировок экспериментов.** Эренфельд (On the efficiency of experimental designs. Ehrenfeld Sylvain), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 247—255 (англ.)

Рассматривается основная задача метода наименьших квадратов, к которой редуцируются многие вопросы дисперсионного анализа. Величины $y_\alpha$ $(\alpha=1, 2, \ldots, N)$ — «данные наблюдения» независимы и нормально распределены с общей дисперсией $\sigma^2$ и $E(y_\alpha) = \beta_1 x_{\alpha 1} + \beta_2 x_{\alpha 2} + \cdots + \beta_p x_{\alpha p}$ или в матричном обозначении, $E(y) = X\beta$; при этом матрица $X = \|x_{\alpha i}\|$ $(\alpha=1,\ldots,N;\ i=1,\ldots,\beta)$ определяется принятой планировкой экспериментов, фиксирующей выбор ее элементов в некоторой области $T$; $\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_p\end{pmatrix}$ — вектор коэффициентов регрессии $\beta_j$ или их линейная функция $\theta = \sum_{j=1}^p t_j\beta_j$ (где $t$ — заданный вектор) подлежат оценке по данным наблюдения. Известно, что если симметрическая матрица $S = X'X$ имеет полный ранг, то существует несмещенная оценка $\hat{\theta} = \sum_{j=1}^p t_j\hat{\beta}_j$ для $\theta$, использующая оценки $\hat{\beta}_j$ по методу наименьших квадратов для $\beta_j$; эта оценка имеет минимальную дисперсию $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \sigma^2 t' S^{-1} t$. Таким образом точность оценки существенно зависит от матрицы планировки $X$; ту же зависимость обнаруживает и средняя длина доверительного интервала $L$ для $\theta$. Автор доказывает следующие неравенства:

$$a = \sigma^2(t't)/\lambda_{\max} < \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \leqslant \sigma^2(t't)/\lambda_{\min} = b, \quad (1)$$

$$Ma \leqslant (EL)^2 \leqslant Mb, \quad (2)$$

причем $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — наибольшее и наименьшее из характеристических чисел матрицы $S$, а $M$ — постоянное число. Кроме того, обозначая через $H_0$ гипотезу $\beta=0$, автор показывает, что мощность обычного критерия для проверки $H_0$ монотонно зависит от параметра $\Phi = \beta' S\beta/\sigma^2$, причем всегда

$$(\beta'\beta)\lambda_{\max}/\sigma^2 \geqslant \Phi \geqslant \lambda_{\min}(\beta'\beta)/\sigma^2. \quad (3)$$

Границы неравенств (1), (2), (3) достижимы; из (1), (2), (3) следует, что верхние грани $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$ и $(EL)^2$ убывают, а нижняя грань $\Phi$ возрастает с возрастанием $\lambda_{\min}$. Это дает основание охарактеризовать эффективность планировки опыта, т. е. выбора матрицы $X$ с помощью отношения $\lambda_{\min}/u$, где $u=\max\lambda_{\min}$ при $x_{\alpha i}$ изменяющихся в $T$. Автор находит оптимальную структуру $S$ в двух частных случаях — при фиксированных диагональных элементах в $S$ или фиксированных $r$ колоннах $r<p$ в $X$. Рассматривается ряд приложений к задачам дисперсионного анализа; в частности, доказывается, что латинский квадрат обеспечивает наибольшую эффективность в определенных условиях. Н. В. Смирнов

**704. Локально оптимальные планы для оцениваемых параметров.** Чернов (Locally optimal designs

for estimating parameters. Chernoff Herman), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 4, 586—602 (англ.)

Пусть имеется некоторое множество генеральных совокупностей, распределение вероятностей каждой из которых зависит от $k$ неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Чтобы оценить $s$ параметров ($s \leqslant k$), производят $n$ экспериментов по определенному плану. План называется оптимальным, если получаемые при его помощи оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров имеют наименьшее рассеяние.

Показано, что при некоторых условиях приближение к локально оптимальному плану при больших $n$ можно получить, осуществляя $r$ различных экспериментов ($r \leqslant k + (k-1) + \cdots + (k-s+1)$) и повторяя их в определенной пропорции. Постановка задачи и результаты иллюстрируются примерами. В. В. Петров

**705. Отношение дисперсий в одной модели компонентов дисперсии. Томпсон** (The ratio of variances in a variance components model. Thompson W. A., Jr), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 325—329 (англ.)

Рассматривается «смешанная» модель неполных блоков дисперсионного анализа: $N$ наблюдений $y_{ij}$ ($i = 1, \ldots, u$; $j = 1, \ldots, b$) представляют независимые и нормально распределенные величины с общей дисперсией $\sigma^2$ и центрами распределений, которые при данных значениях величин $t_1, t_2, \ldots, t_u$ определяются равенствами $E(y_{ij} \mid t) = n_{ij}(t_i + b_j)$, причем $n_{ij} = 1$ или 0, смотря по тому, входит ли $i$-й вариант способа обработки в $j$-й блок или не входит в него. Величины $t_i$ независимы и нормально распределены $(0, \varepsilon^2)$. Отправляясь от принципа инвариантности, автор разыскивает класс инвариантных оценок для отношения $\varepsilon^2/\sigma^2 = \lambda$; им выводится совместное распределение для совокупности этих оценок. С помощью этих результатов конструируется оптимальный критерий, максимизирующий минимум мощности относительно всех инвариантных критериев для испытания гипотезы $\lambda < \lambda_0$ при альтернативе $\lambda > \lambda_1$. Н. В. Смирнов

**706. Последовательный критерий для общей линейной гипотезы. Хол** (On a sequential test for the general linear hypothesis. Hoel Paul G.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 136—139 (англ.)

Плотность распределения случайного вектора $(x_1, \ldots, x_l)$ равна

$$f(x_1, \ldots, x_l) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-l} \times$$

$$\times \exp\left\{-(2\sigma)^{-2}\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{l} x_i^2\right]\right\}.$$

Проверяется гипотеза $\mu_1 = \cdots = \mu_p = 0$ для $p \leqslant k$. С этой целью применяется обобщенный последовательный $t$-критерий Вальда: пространство параметров $\Omega$ разбивается на три части, соответствующие приему, отбрасыванию гипотезы и неопределенности. Б. В. Гнеденко

**707. Заметка о линейных гипотезах с заданной матрицей нормальных уравнений. Максфилд, Гарднер** (Note on linear hypotheses with prescribed matrix of normal equations. Maxfield John E., Gardner Robert S.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 149—150 (англ.)

Доказывается, что симметрическая положительно-полуопределенная $n \times n$ матрица $A$ с целыми рациональными элементами всегда представима в виде $A = a^{-2}BB^T$, где $a$—целое положительное число, а $B$—$n \times 4n$ матрица также с целыми рациональными элементами; $B^T$—транспонированная матрица для $B$. Утверждается, что это предложение может быть использовано в теории планирования эксперимента при анализе системы нормальных уравнений с рациональными коэффициентами. Ф. Г. Гантмахер

**708. Добавочное замечание о максимальном числе «ограничений» одного «ортогонального строя». Сейден** (Further remark on the maximum number of constraints of an orthogonal array. Seiden Esther), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 4, 759—763 (англ.)

Решается один частный вопрос о конструкции матриц специального типа, введенных Босом и Бушем (Bose R. C., Bush K. A., Ann. Math. Statistics, 1952, 23, 508—524) и названных ими «ортогональными строями» (РЖМат, 1956, 4690). Н. В. Смирнов

**709. К некоторым основным вопросам математической статистики. Фабиан, Гаек** (K některým základním otázkám, matematické statistiky. Fabian František, Hájek Jaroslav), Časop. pěstov., mat., 1955, 80, № 4, 398—399 (чеш.)

Реферат, прочитанный на I рабочей конференции математических статистиков в Праге в июне 1954 г. Разбираются некоторые идеологические вопросы математической статистики.

**710. Значения функции распределения критерия Вилкоксона. Фикс, Ходжес** (Significance probabilities of the Wilcoxon test. Fix Evelyn, Hodges J. L., Jr), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 301—312 (англ.)

Приведены таблицы, по которым могут быть получены точные значения функции распределения Вилкоксона в случае, когда меньший размер выборки $m \leqslant 12$. Для членов порядка $m^{-2}$ приводится аппроксимация Эджеворта и исследуется ее точность. Приведенные примеры указывают на хорошую точность такой аппроксимации. Е. Л. Ющенко

**711. Новая оценка коэффициента корреляции некоторого признака с общим или групповым фактором и ее стандартное отклонение в факториальном анализе. Делапорт** (Nouvelle estimation du coefficient de corrélation d'un caractère avec le facteur général ou un facteur de groupe et son écart type, en analyse factorielle. Delaporte Pierre), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 13, 1398—1400 (франц.)

Для схемы Спирмена факториального анализа, в которой исследуемые признаки рассматриваются как суммы некоррелированных между собой воздействий факторов — общего, специфического и групповых, — находится оценка с минимальной дисперсией для коэффициента корреляции между данным признаком и общим или групповым фактором; приводится стандартное отклонение оценки и указывается, что при некоторых условиях распределение оценки приближенно нормально. Н. В. Смирнов

**712. Несколько новых критериев для изучения временных рядов. Кивелёвич, Вьялар** (Quelques nouveaux tests pour l'étude des séries chronologiques. Kivéliovitch M., Vialar J.), J. scient. météorol., 1955, 7, № 27, 259—271 (франц.; рез. англ., исп.)

Для испытания временного ряда на «случайность» предлагается критерий, основанный на подсчете числа переходов от значений, меньших некоторого фиксированного числа, к значениям, бóльшим этого числа, и переходов в обратном направлении. Доверительные границы для критерия предлагается определять (не всегда корректно), исходя из приближенной нормальности его распределения. Приложения критерия иллюстрируются большим числом примеров. Работа продолжает цикл исследований авторов по критериям «случайности» (РЖМат, 1954, 3411, 3774).

Н. В. Смирнов

713. **Непараметрические задачи статистики.** Смирнов Н. В., Гнеденко Б. В., Гихман И. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 47—48

## ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

714. **Игры Ним и их решение. Берж, Шютценбергер** (Jeux de Nim et solutions. Berge Claude, Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 13, 1672—1674 (франц.)

Игрой Ним называется игра двух лиц в обобщенной форме с полной информацией без посредника, в которой существуют такие множества позиций $K$ и $L$, что

$$K \cap L = \Lambda, \quad K \cup L = X_0 = \{x : \Gamma x = \Lambda\},$$
$$(K.1) \cup (L.2) = K_1, \quad (L.1) \cup (K.2) = K_2$$

$x.1$ — позиция, в которой очередь хода за 1 игроком; $\Gamma x.2$ — множество альтернатив $x$, $K_i$ — выигрывающие позиции $i$-го игрока). Такая игра обозначается через $(\Gamma, K, L)$. Функция $g(x)$, равная 0, когда $x \in L$, 1, когда $x \in K$, и $\min_{k=0,1,2} (k \notin \{g(y) : y \in \Gamma x\})$ во всех остальных случаях, называется функцией Гранди игры $(\Gamma, K, L)$.

Если для игры $(\Gamma, K, L)$ существует функция Гранди $g(x)$ и если игра пришла в позицию $x.2$, для которой $g(x) = 0$, то 1 игрок не проиграет.

Положим $\Gamma^+(A) = \{x : \Gamma x \neq \Lambda, \ \Gamma x \subset A\}$. Пусть игра $(\Gamma, K, L)$ такова, что $\Gamma^+\{x : g(x) \neq 0, 1\} = \Lambda$. Функция Гранди для игры $(\Gamma, L, K)$ равна 0, когда $g(x) = 1$, 1, когда $g(x) = 0$, и $g(x)$ — в остальных случаях.

Вводится понятие решения относительно $A$ игры $n$ лиц в нормальной форме ($A$ — подмножество множества следов игры), содержащее решение в смысле Неймана-Моргенстерна при $A = \Lambda$. На основе теории игры Ним формулируются утверждения о существовании и единственности таких решений. И. В. Романовский

715. **К теории кооперативных игр двух лиц. Бургер** (Zur Theorie der kooperativen Zweipersonenspiele. Burger E.), Arch. Math., 1956, 7, № 2, 143—147 (нем.)

Излагаются основы принадлежащей Нашу (РЖМат, 1955, 2338) и Райфа (РЖМат, 1956, 4717К) теории кооперативных игр двух лиц. Приводится новое доказательство существования точек равновесия игры угроз в чистых стратегиях и их эквивалентности. Опечатки: формула на стр. 145, строка 14 снизу. должна читаться: $a_2(\widetilde{X}, \widetilde{Y}^*) \leqslant a_2(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$, а на той же стр., строка 13 снизу, — $a_2(X^*, Y^*) \leqslant a_2(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$.

Н. Н. Воробьев

716. **Рассмотрение одной задачи о рекламе с точки зрения теории игр. (Вариант одной модели игры Джилмена). Бургер** (Spieltheoretische Behandlung eines Reklameproblems. (Variante eines Spielmodells von Gillman). Burger E.), Mitteilungsblatt Math. Statist., 1954, 6, 39—52 (нем.)

Автор получает точные решения для нулевой игры двух лиц, описываемой в терминах конкуренции реклам. Эта модель эквивалентна молчаливой дуэли, в которой каждый из противников имеет право произвести один выстрел. Игры этого типа рассматривались ранее Блекуеллом и Гиршиком (Paxson E. W., Econometrica, 1949, 17, 72—73) (хотя функция ставок в конкретной игре, рассматриваемой там, и отличается несколько от функции ставок в задаче из реферируемой статьи). Ссылка в заглавии относится к статье J. Amer. Statist. Assoc., 1950, 45, 541—545, в которой модель соответствует дуэли с единственным выстрелом против пулемета). L. Gillman

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, №11, 975.

717. **Обобщенный симплекс-метод для минимизации линейных форм от переменных, подчиненных линейным неравенствам. Данциг, Орден, Вулф** (The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. Dantzig George B., Orden Alex, Wolfe Philip), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 183—195 (англ.)

Сформулированная в заглавии статьи проблема относительно вещественных переменных заменяется обобщенной матричной проблемой относительно переменных векторов. Из решения последней легко получается решение первой. При соответствующем подборе обобщенной проблемы в вычислительной процедуре, определяемой симплекс-методом, возможность «вырожденности» исключается на каждом шагу. Г. Ш. Рубинштейн

718. **Равновесие по оценке и оптимум Парето. Дебрё** (Valuation equilibrium and Pareto optimum. Debreu Gerrard), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, 40, № 7, 588—592 (англ.)

Устанавливаются условия, обеспечивающие одновременное осуществление обоих указанных в заглавии состояний. Для конечномерного случая вопрос рассматривался в предыдущих работах Эрроу и автора (Arrow K. J., Proc. of the second Berkeley Symposium, 1951, p. 507; G. Debreu, Econometrica, 1951, 19, 273—292).

Рассматривается линейное пространство $L$. Потребление $i$-го потребителя ($i = 1, 2, \ldots, m$) характеризуется вектором $x_i$, который может изменяться в множестве $X_i \subset L$. В каждом $X_i$ введено упорядочение $x_i' \leqslant x_i$. $x_i^0$ — точка насыщения $X_i$, если $x_i \leqslant x_i^0$ для $x_i \in X_i$. Аналогичным образом «продукция» $j$-го производителя ($j = 1, 2, \ldots, n$) характеризуется вектором $y_j$, принадлежащим $Y_j \subset L$.

Система $(m + n)$ векторов $[(x_i), (y_j)]$ называется достижимым состоянием экономической системы, если $x_i \in X_i$, $y_j \in Y_j$ и $\sum x_i - \sum y_j = \zeta$, $\zeta$ — фиксированный вектор.

Пусть $v(z)$ оценка — некоторый вещественный линейный функционал, определенный в $L$.

А. Достижимое состояние $[(x_i^0), (y_j^0)]$ есть состояние равновесия относительно оценки $v$, если

1. Для каждого $i$ $x_i \in X_i$, $v(x_i) \leqslant v(x_i^0)$ влечет $x_i \leqslant x_i^0$ (наилучшее удовлетворение при данном ограничении бюджета).

2. Для каждого $j$ $y_j \in Y_j$ влечет $v(y_j) \leqslant v(y_j^0)$ (максимальный доход при данных технологических ограничениях).

Б. Достижимое состояние $[(x_i^0), (y_j^0)]$ называется оптимумом Парето, если нет никакого другого достижимого состояния $[(x_i), (y_j)]$, для которого было бы $x_i \geqslant x_i^0$ (при этом хоть для одного $i$ знак $>$).

В теореме 1 устанавливается, что при выпуклости $X$ и наличии упорядочения в нем, состояние равновесия если только никакое $x_i^0$ не является точкой насыщения, есть оптимум Парето. В теореме 2 при довольно жестких дополнительных предложениях устанавливается обратное предложение. Для установления наличия функционала $v$ используется теорема Гана — Банаха.

Л. В. Канторович

719. **Исследования операций. Морзе** (Operations research. Morse Philip M.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 1—12 (англ.)

Статья посвящена описанию вновь возникшей области прикладной математики — исследованию операций. Здесь областью применения математики являются не другие науки, а сама жизнь — различного рода виды (общественной) человеческой деятельности. Свиде-

тельством ее значения является создание специального журнала, посвященного ей (Journal of the Operations Research Society of America).

Автор отказывается от попытки дать точное определение содержания этой области науки, ограничиваясь указанием, что характерным для нее является совместное изучение поведения и действий некоторой системы несвязанных жестко объектов (военное соединение, группа предприятий и т. д). В основном автор характеризует ее предмет указанием некоторых наиболее разработанных математических теорий, которые должны быть включены в эту область, отмечая их значение для практики (для бизнеса). Среди них первой названа теория очередей (хвостов). Указаны практические применения ее при выборе и распределении стоянок судов и самолетов. Отмечается, наряду с аналитическими методами анализа вопросов этой теории, полезность экспериментальных (Монте-Карло). Далее рассматриваются в геометрической трактовке вопросы линейного программирования (задачи нахождения наивыгоднейшего плана, при ряде условий), в частности, их практическое применение в выборе крекинг-процессов. Указываются задачи на ограниченный оптимум, не подходящие под схему линейного программирования. В теорию операций автор включает также теорию игр, среди применений которой отмечаются военные, — в частности проблема «дуэлей» (в широком смысле), а также общий вопрос «о распределении усилий», здесь, в частности, рассматриваются, например, «проблема поиска» и вопрос о рациональном распределении работы коммивояжеров, с точки зрения интересов торговой фирмы в целом.

В заключение отмечается, что статистика является лишь одним (правда наиболее известным) средством в этой области, которая использует весьма различные математические и физические науки и отчасти психологию. Л. В. Канторович

**720. О роли перегруженности в проблеме перевозок. Прейгер** (On the role of congestion in transportation problems. Prager William), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 6/7, 264—268 (англ.; рез. нем., франц., русс.)

Проблема составления наиболее рационального плана перевозок однородного груза от нескольких пунктов производства к ряду пунктов потребления (Канторович Л. В., Гавурин М. К., статья в сб. «Проблемы повышения эффективности работы транспорта», Изд-во АН СССР, 1949, 110—138) рассматривается в предположении, что стоимость перевозки единицы груза из одного пункта в другой не является постоянной, а есть линейная функция от количества груза, перевозимого по данному направлению. Показывается, что в этом случае задача всегда имеет единственное решение. Г. Ш. Рубинштейн

**721. Введение в линейное программирование. II. Кастаньеда** (Introduccion a la programación lineal. Castañeda José), Rev. cienc. apl., 1954, 8, № 4, 321—330 (исп.)

Решение задачи составления наиболее рационального плана перевозок однородного груза от нескольких пунктов производства к ряду пунктов потребления (РЖМат, 1954, 2603) с помощью симплекс-метода Данцига, используемого автором и в первой части работы (РЖМат, 1956, 4921). Г. Ш. Рубинштейн

**722. Эквивалентные сравнения экспериментов. Блэкуэлл** (Equivalent comparisons of experiments. Blackwell David), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 2, 265—272 (англ.)

Шерман (Scherman S., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, 37, 826—831) и Штейн (Stein Charles, Univ. Chicago, 1951, mimeographed) показали, что метод, предложенный автором (Proc. of the Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, 1951, 93—102) для сравнения двух экспериментов, эквивалентен при конечном числе возможных исходов экспериментов оригинальному приему введенному Бонеблюстом, Шепли и Шерманом (не опубликовано). Дается новое доказательство этих результатов, причем ограничение конечности числа исходов снимается. Вводится класс слабых сравнений — сравнений в проблемах с $k$ решениями — в трех эквивалентных формах. Для дихотомии все методы эквивалентны и могут быть описаны в терминах ошибок первого и второго родов. Резюме автора.

**723. Последовательные процедуры, контролирующие индивидуальные вероятности выбора различных решений. Уэйсс** (Sequential procedures that control the individual probabilities of coming to the various decisions. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 4, 779—784 (англ.)

Предполагается, что одно из конечного числа окончательных решений должно быть выбрано с помощью последовательной процедуры, содержащей не более $N$ наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Для случайного вектора $X = \{X_1 X_2, \ldots, X_N\}$, компоненты $X_i$ которого, в свою очередь, могут быть векторами, имеется конечное число возможных распределений $F_j$. Для каждой последовательной процедуры $R$ строится новая процедура $R'$ такая, что вероятности выбора различных решений при всевозможных распределениях $F_j$ и использовании $R'$ не менее предпочтительны, чем при применении процедуры $R$. При этом более вероятно, что число наблюдений, необходимых для принятия окончательного решения при использовании процедуры $R'$, окажется не больше, чем при процедуре $R$. И. И. Гихман

**724. Теория игр как средство для философа нравственности; вступительная лекция, прочитанная в Кембридже 2 декабря 1954 г. Брейтуэйт** (Theory of games as a tool for the moral philosopher: an inaugural lecture delivered in Cambridge on 2 December, 1954. Braithwaite Richard Bevan, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1955, 76 pp., ill. 6 sh), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 303, 9 (англ.)

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

**725. Проблема восстановления и ее расширенная трактовка как стохастического процесса. Амметер** (Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse. Ammeter Hans), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, 55, № 2, 265—304 (нем.)

Статья содержит: 1) краткий очерк развития исследований по проблеме восстановления как в ее начальной детерминистической трактовке, так и в современной стохастической (работы Дуба, Феллера, Джуна и др.); 2) методику вычисления различных средних величин, характеризующих весь процесс; 3) разбор ряда рассчитанных примеров с определением плотностей распределения частоты выбывающих за определенный промежуток времени объектов, при различных предположениях о распределении срока службы; 4) некоторые приложения к теории риска. Н. В. Смирнов.

**726. Последовательный двухвыборочный критерий долговечности. Эпстейн** (A sequential two sample life test. Epstein Benjamin), J. Franklin Inst., 1955, 260, № 1, 25—29 (англ.)

Пусть образцы в двух партиях 1 и 2 обладают долговечностью, подчиненной экспоненциальному закону

распределения с плотностью

$$\theta_i^{-1}\exp(-x/\theta_i),\quad x>0,\quad \theta_i>0,$$

где $\theta_i$ ($i=1, 2$) — средняя продолжительность жизни образца в $i$-й партии. Для проверки гипотезы $\theta_1=\theta_2$ при конкурирующих гипотезах $\theta_1>\theta_2$ и $\theta_1<\theta_2$ предлагается следующий последовательный анализ.

Из каждой партии извлекаются выборки размера $n_0$, которые проверяются на долговечность. Негодные образцы заменяются образцами из той же партии. Пусть $x_i(t)$ — число бракованных образцов в выборке $i$ за время $t$. Испытания продолжаются до тех пор, пока $-a<x_1(t)-x_2(t)<a$. При $x_1(t)-x_2(t)=a$ испытания прекращаются и принимается гипотеза $\theta_2>\theta_1$, и при $x_1(t)-x_2(t)=-a$ испытания прекращаются и принимается гипотеза $\theta_1>\theta_2$. Здесь $a$ — целое положительное число, которое выбирается таким образом, что при $u=\max(\theta_1,\theta_2)/\min(\theta_1,\theta_2)=u_0$ вероятность $\pi_{u_0}$ сделать неверный выбор $\leqslant\alpha$. При выполнении этого условия $a$ является единственным целым числом, удовлетворяющим условию

$$\log[(1-\alpha)\alpha^{-1}]/\log u_0\leqslant a<\log[(1-\alpha)\alpha^{-1}]/\log u_0+1.$$

Вероятность принять некорректное решение $\pi_u$ равна $1/(u^x+1)$, $u\geqslant 1$, и математическое ожидание числа проверяемых образцов до принятия решения дается выражением: $E_u(n)=a(u+1)(u-1)^{-1}(1-2\pi_u)$, если $u>1$, и $E_u(n)=a^2$ при $u=1$. Е. Л. Ющенко

**727. Об одной статистической задаче, связанной с эмульсионной микроскопией. Ульсен, Вергеланн, Эверос** (On a statistical problem in emulsion microscopy. Olsen H., Wergeland H., Øverås H.), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1955, 28, № 6, 25—29 (англ.)

Рассматривается следующая задача, связанная с исследованием следов элементарных частиц в фотоэмульсиях: если провести произвольную хорду ионизационного следа в эмульсии (имеющую, скажем, длину $L$) и принять эту хорду за ось $x$-ов, то какова будет вероятность (точнее — плотность вероятности) того, что абсциссе $x$ будет отвечать ордината $y$ следа? При решении этой задачи делается следующее предположение, весьма естественное из физических соображений: след частицы представляет собой дифференцируемую кривую $y=y(x)$ такую, что $p(x)=dy/dx$ является винеровской случайной функцией с $E\{p(x_1)-p(x_2)\}^2=\overline{\vartheta^2}\,|x_1-x_2|$, где $\overline{\vartheta^2}$ — средний квадрат отклонений следа на единицу длины, который может быт связан с физическими параметрами задачи; начальное значение производной $p_0=dy(0)/dx$ имеет постоянную плотность вероятности на интервале $-\pi/2\leqslant p_0\leqslant\pi/2$. При этом предположении вычисление искомой плотности вероятности $w\{y(x)=y\,|\,y(0)=y(L)=0\}$ сводится к подсчету некоторого интеграла по мере Винера; при помощи использования представления $\delta$-функции в виде интеграла Фурье получаемый интеграл приводится к интегралу от экспоненциальной функции, содержащей в показателе степени линейный функционал от $y(x)$, после него он легко вычисляется в явном виде. Окончательно для искомой плотности вероятности получается формула

$$w\{y(x)=y\,|\,y(0)=y(L)=0\}=$$
$$=\left[\frac{3}{2\pi L\overline{\vartheta^2}}\right]^{1/2}\frac{\exp\left[-\dfrac{3}{2L\overline{\vartheta^2}}\,\dfrac{y^2}{x^2(1-x/L)^2}\right]}{x(1-x/L)},$$

откуда, в частности,

$$\overline{\vartheta^2}=\frac{3}{Lx^2(1-x/L)}\,\overline{y^2(x)},\quad \overline{y^2(x)}=E\{y^2(x)\}.$$

Частный случай последней формулы при $x=L/2$ известен в литературе (см., например, Росси Б., Частицы больших энергий, М., Гостехиздат, 1955, стр. 93).

А. М. Яглом

**728. Поведение следящих систем с определенным временем запаздывания и случайным возмущением. Палмер** (The behaviour of control systems with definite time delay and random disturbance. Palmer P. J.), Proc. Inst. Electr. Engrs, 1954, **101**, № 6, ч. 4, 27—45 (англ.)

Рассматриваются следящие системы, описываемые стохастическим дифференциально-разностным уравнением

$$\left[p^2+(\mu+\lambda p)(B+Cp)\exp(-Tp)\right]x=p^2X_i+$$
$$+(\mu+\lambda p)\eta(t),\qquad(1)$$

где $T$ — время запаздывания; $[\exp(-Tp)]x(t)=x(t-T)$; $X_i$ — «требуемое отклонение»; $x$ — «ошибка отклонения», $\eta(t)$ — стохастическая функция со средним 0 и конечным средним квадратичным, характеризующая случайные ошибки на входе или в регулирующем устройстве системы; $B$, $C$, $\mu$, $\lambda$ — параметры системы.

В первой половине работы рассматривается область устойчивости уравнения (1) в пространстве соответственно выбранных параметров и указываются конечно-разностные уравнения, приближенно описывающие ту же систему и имеющие близкую к уравнению (1) область устойчивости.

Во второй половине работы изучаются средняя ошибка $x_m$ и стохастическая ошибка $x_s$, $x_m+x_s=x$, удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\left[p^2+(\mu+\lambda p)(B+Cp)\exp(-Tp)\right]x_m=p^2X_i\qquad(2)$$

и

$$\left[p^2+(\mu+\lambda p)(B+Cp)\exp(-Tp)\right]x_s=(\mu+\lambda p)\eta(t).\qquad(3)$$

Для изучения уравнения (3) используется теория стационарных стохастических процессов и ее приложения (Джеймс, Никольс, Филлипс, Теория следящих систем, Изд-во ин. лит., М., 1953, гл. 6 и след.; там же подробная библиография).

Применяя к уравнению (3), трактуемому как уравнение бесконечного порядка, формулы, известные для стохастических дифференциальных уравнений конечного порядка, автор получает спектральную плотность для $x_s$. Многочисленные чертежи (при выполнении которых использовалось графическое интегрирование спектральной плотности) дают представление о размерах усиления средне-квадратического случайных ошибок в зависимости от параметров системы, а также о том, в какой мере стохастические конечно-разностные уравнения пригодны для приближения дифференциально-разностного уравнения (3).

В заключение на существенном для приложений примере показывается, что аналогичными способами можно изучать более сложные системы.

А. В. Драгилев

**729. Анализ размерности в выборочном испытании товаров. Дробот, Вармус** (Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise. Drobot Stefan, Warmus Mieczysław), Rozpr. mat., 1954, 5, 53 pp.) (англ.; рез. русс.)

Статья посвящена применению теории размерности к выборочному контролю качества продукции. Основными размерными величинами, образующими систему единиц, считаются объем части партии товара $N$ (штука), стоимость ее $W$ (рубль), объем части выборки $n$ (штука) и стоимость ее $w$ (рубль). С помощью этих величин опре-

деляется рассеивание стоимости штуки в выборке $s$ и в партии $S$ (размерность $[s]$ = рубль × штука$^{-1/2}$, $[S]$ = рубль × штука, расход на испытание одной штуки $k$ $[k]$ — рубль × штука$^{-1}$ и т. д.)

Авторы выводят размерные формулы для объема выборки $n$ типа $n = \alpha (Nqs/k)^{2/3}$ в предположении, что $n$ зависит от $N$, $s$, $k$ и бухгалтерского коэффициента $q$, $[q]$ = рубль × штука$^{-1}$ × рубль$^{-1}$ × штука или $n = \delta SN^{1/2}/k$, если $n$ зависит от $S$, $N$ и $k$ и т. д. Здесь $\alpha$ и $\delta$ — безразмерные коэффициенты, которые определяются с помощью опыта. В. Г. Винокуров

730. **Об одной модели однородной и изотропной турбулентности. Биркгоф, Кампе-де-Ферье** (Sur un modèle de turbulence homogène isotrope. Birkhoff Garrett, Kampé de Fériet Joseph), C. r., Acad. sci., 1954, 239, № 1, 16—18 (франц.)

Несколько уточняются результаты работы Биркгофа (РЖМат, 1956, 8207). А именно указывается, что любому абсолютно непрерывному спектральному распределению энергии отвечает однозначно определенная однородная, изотропная и несжимаемая гауссовская мера на множестве непрерывных векторных полей в трехмерном пространстве, если допустимыми считать только меры, удовлетворяющие некоторому дополнительному условию типа условия сепарабельности, введенного Дубом (РЖМат, 1953, 831 К). Эта мера будет метрически транзитивной, т. е. математическое ожидание по такой мере можно будет заменить осреднением по пространству.

Точные доказательства в работе отсутствуют. А. М. Яглом

731. **О формальном использовании комплексных вероятностей в теории стохастических процессов. Кокс** (A note on the formal use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. Cox David R.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 284—285 (англ.)

Известно, как сильно упрощаются различные задачи математической телефонии в предположении, что длительность обслуживания имеет показательное распределение. Изучен также случай, когда распределение времени обслуживания есть композиция нескольких показательных распределений, т. е. когда соответствующее преобразование Лапласа имеет вид

$$f^*(s) = \prod_{j=1}^{k} \cdot \left(1+\lambda_j^{-1} s\right)^{-1}, \quad \lambda_j > 0. \qquad (1)$$

Автор указывает, что если какая-либо плотность имеет преобразование Лапласа вида (1) с комплексными $\lambda$, то соответствующее распределение можно рассматривать как композицию трех показательных «распределений» с комплексными «плотностями». Сходное истолкование дается для случая

$$f^*(s) = \sum_{j=1}^{k} \cdot q_1 \cdots q_{j-1} P_j \prod_{l=1}^{j} \cdot \left(1+\lambda_l^{-1} s\right)^{-1}.$$

Ю. В. Прохоров

732. **Точечная оценка ординат выпуклой кверху функции. Хилдрет** (Point estimates of ordinates of concave functions. Hildreth Clifford), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 267, 598—619 (англ.)

Рассматривается задача об определении неизвестной функциональной зависимости по результатам измерений аргумента и функции. Предполагается, что результаты измерения функции искажаются случайными независимыми ошибками. Автор отмечает, что во многих случаях нет оснований считать неизвестную функцию $\varphi(z)$ совпадающей с заданной функцией $\varphi(z, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ при надлежащем выборе параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$. С другой стороны, часто известно, что искомая кривая обладает некоторыми качественными свойствами, задаваемыми, например, линейными соотношениями. Для определения ординат неизвестной кривой предлагается применять метод максимального правдоподобия с учетом ограничений, накладываемых ее качественными свойствами.

Это общее соображение автор детализирует на примере уравнения

$$y = \varphi(z) + u,$$

где $u$ — случайная нормально распределенная $(0, \sigma)$ величина, а $\varphi(z)$ — произвольная выпуклая кверху функция. Применение метода максимального правдоподобия с учетом выпуклости функции $\varphi(z)$ в этом случае может быть сведено к эквивалентной проблеме седловой точки. Приведен числовой пример, заимствованный из сельскохозяйственной практики. И. И. Гихман

733. **О субнормальной дисперсии в совокупностях случайно распределенных частиц. II. Точное решение одномерного случая. Нийбоэр** (On the subnormal variance in the counts of randomly distributed particles: II. Exact treatment of the one-dimensional case. Nijboer B. R. A.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 3, 245—250 (англ.)

Рассмотрим прямую линию, на которой случайно распределены «частицы» длины $a$ таким образом, что две частицы не могут перекрываться. Обозначим через $n(x)$ число частиц на отрезке длины $x$. $\sigma(x)$ дисперсия $n(x)$. Если обозначить через $l$ ожидаемое расстояние между соседними частицами и $f = a/(l+a)$, то

$$\sigma^2(x) = \frac{x}{l+a}\left(1-f\right)^2 + f^2\left(1-\tfrac{4}{3}f+f^2\right) + R(x),$$

где $R(x)$ убывает экспоненциально при $x \to +\infty$. Границы применения полученных результатов референту неясны из-за отсутствия точного определения «случайного распределения частиц». А. В. Скороход

734. **Размышления о критериях случайности Кивелевича и Вьялара. Вейллер** (Reflexions sur les tests du hasard de MM. Kiveliovitch et Vialar. Weiller A. R.), J. scient. météorol., 1955, 7, № 27, 295—299 (франц.)

Строится пример ряда, в котором члены, помимо случайных флуктуаций, испытывают медленный, но систематический рост, так что распределение числа фаз возрастания и убывания таково же, как в чисто случайном ряду. Исходя из этого, автор выражает сомнение в эффективности критериев «случайности» Кивелевича и Вьялара (РЖМат, 1954, 3411, 3774). Н. В. Смирнов

735. **Статистический анализ и контроль существенно положительных величин, характеризующих качество продукции. Лукомский Я. И.,** Стандартизация, 1955, № 1, 22—28

В качестве плотностей распределения, выравнивающих распределения существенно положительных величин, встречающихся в машиностроении (биения, эксцентриситеты, непараллельности, неперпендикулярности и др.), автором предлагаются плотности распределения размахов в выборках из нормальной совокупности. Приводятся примеры и без обоснования указываются рецепты для определения параметров распределения. С. Х. Сираждинов

736. **Статистический анализ и контроль существенно положительных величин, характеризующих качество продукции. Лукомский Я. И.** Стандартизация, 1955, № 2, 27—33

Продолжение предыдущей статьи (реф. 735). Проводится графическое сопоставление плотностей распределения размахов с плотностями распределения $\chi^2$-квадрат, с различными степенями свободы. Приводятся примеры и указываются рецепты вычисления и построения контрольных карт при статистическом контроле существенно положительных величин.

Примечание референта. Имеется ряд неточных утверждений, так, например, на стр. 27 утверждается, что: «при больших значениях $k$ кривые $(\varphi_k(x;\alpha))$ приближаются к нормальной кривой распределения». Это, конечно, неверно. С. Х. Сираждинов

**737. Микроструктура развитой турбулентности. Обухов А. М., Яглом А. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 91—92

**738. О спектре колебаний неупорядоченных кристаллов. Лифшиц И. М., Степанова Г. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 162—163

**739 Д. Вероятностное построение статистики нестационарных систем. Срагович В. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

**740 Д. Применение методов математической статистики к анализу производственного процесса и контролю качества продукции. Крылова Н. И.,** Автореф. дисс. канд. экон. н. Моск. гос. экон. ин-т, М., 1956

---

См. также: 13, 529, 917, 929 К, 1016

## ГЕОМЕТРИЯ

**741. Теорема Жордана в аффинной геометрии. Грёйб** (Der Jordansche Kurvensatz in der affinen Geometrie. Graeub W.), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 181, 13 S. (нем.)

Используя только аксиомы соединения и порядка, автор доказывает теорему, что замкнутый простой многоугольник разделяет плоскость на две области.

А. А. Гаршнек

**742. Прямая линия. Клайн** (The straight line. Kline Morris), Scient. Amer., 1956, 194, № 3, 105—106, 108, 110, 112, 114 (англ.)

Автор ставит себе целью в популярной форме показать, «как на вид простая задача о природе и структуре прямой линии приводит к большим современным проблемам математики». Некоторые высказывания автора рискованы, например, что геодезические линии на поверхности «подчиняются всем аксиомам евклидовой геометрии». Н. В. Наумович

**743. Преобразования подобия на плоскости. Газапина** (Le similitudini piane. Gasapina Umberto), Period. mat., 1955, 33, № 5, 276—296 (итал.)

Популярный очерк, рассматривающий преобразование подобия в трех аспектах: 1) элементарно-геометрическом (евклидова плоскость); 2) проективном (та же плоскость, дополненная несобственной прямой; проективное определение эквиформной группы); 3) конформном (та же плоскость, дополненная несобственной точкой; основная группа изоморфна группе линейных преобразований на комплексной прямой). Последней трактовке (в аналитической форме) уделено преимущественное внимание. Я. С. Дубнов

**744. Евклидова тетрагонометрия, выводимая из сферической тригонометрии. Де-Словере** (La tétragonométrie euclidienne déduite de la trigonométrie sphérique. De Sloovere H.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 10, 1130—1131 (франц.)

Из каждой вершины тетраэдра как из центра проводится сфера небольшого радиуса. Из полученных сферических треугольников выводятся основные формулы тетрагонометрии. С. И. Зетель

**745. Аксиоматика геометрии треугольника. Розенфелд** (An axiomatic triangular geometry. Rosenfeld Azriel), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 7, 52—58 (англ.)

Дается аксиоматическое обоснование треугольных (барицентрических) координат. Рассматриваются система элементов $A, B, C, \ldots$, называемых точками, и функция $\Delta(A, B, C)$, с помощью которой каждой упорядоченной тройке точек ставится в соответствие вещественное число, называемое площадью треугольника $ABC$.

Предполагается, что функция $\Delta$ удовлетворяет аксиомам:

1. Аксиома симметрии: $\Delta(\pi(A, B, C)) = (\mathrm{sg}(\pi)) \times \Delta(A, B, C)$, где $\pi$ — перестановка.

2. Аксиома тождества: Если соотношение $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \Delta(X, A_i, B_i) = \alpha_0$ ($\alpha_i$ — вещественное число) удовлетворяется точками $X_1, X_2, X_3$ при $\Delta(X_1, X_2, X_3) \neq 0$, то оно тождественно относительно любой точки $X$.

3. Аксиома существования: Если $A, B$ — различные точки, то существуют такие точки $C, D$, что $\Delta(A, B, C) \neq \Delta(A, B, D)$.

С помощью функции $\Delta$ определяется коллинеарность трех точек и вводится понятие прямой. Доказываются основные свойства коллинеарности и метрическое свойство функции $\Delta$:

$$\Delta(A, B, C) = \Delta(X, B, C) + \Delta(A, X, C) + \Delta(A, B, X).$$

Далее вводятся треугольные координаты и получаются формулы их преобразования. Дальнейшее развитие идеи иллюстрируется построением теории параллельности.

В. Ф. Рогаченко

**746. Несколько теорем о взаимном расположении некоторых геометрических объектов. Ованисян** (*Մի քանի թեորեմներ երկրաչափական որոշ օբյեկտների փոխադարձ դասավորության մասին. Հովհաննիսյան Վ. Ա.*), *Հայկական Պետական հեռակա մանկավարժական ինստիտուտ, գիտական աշխատությունների ժողովածու,* Сб. науч. тр. Армянск. гос. заоч. пед. ин-т, 1955, № 2, 85—90 (арм.)

Приводится элементарное доказательство некоторых теорем, относящихся к теории конфигураций.

Теорема 1. Если конечное множество прямых на плоскости (или в пространстве) таково, что каждые две прямые пересекаются, и через точку их пересечения проходит третья прямая, отличная от этих двух, то все прямые данного множества проходят через одну точку.

Доказываются три аналогичные теоремы для конечных множеств точек и плоскостей. Некоторые из них распространяются автором на случай, если вместо прямых и плоскостей рассматривать соответственно окружности или сферы.

Указывается, что теоремы 1 и 3 работы доказаны в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., Гостехиздат, 1954, но совершенно другим методом (см. задачи 105 и 106). С. И. Адян

**747. Проблема разрезания квадратов.** (A problem on the cutting of squares), Math. Student J., 1956, **3**, № 2, 1 (англ.)

Дискутируются проблемы древнеарабского математика Абул Вефа: Даны три конгруэнтных квадрата; каким образом разрезать и вновь склеить их, чтобы в результате получился один квадрат? Дан один квадрат; каким образом разрезать его и разрезанные части вновь склеить так, чтобы получились три конгруэнтных квадрата? Дано решение первой проблемы.

К. С. Сцилард

**748. Общий обзор задачи Лемуса — Штейнера — Терквема. Гендерсон** (The Lehmus — Steiner — Terquem problem in global survey. Henderson Archibald), Scripta math., 1955, **21**, № 2—3, 223—232 (англ.)

Статья содержит историю и обзор различных доказательств теоремы: если биссектрисы двух углов треугольника равны, то треугольник равнобедренный. Принадлежность теоремы к абсолютной геометрии не отмечается, и все приведенные доказательства существенно используют аксиому параллельности.

Ю. Г. Решетняк.

**749. Правильный семнадцатиугольник. Кавальяро** (L'ettadecagono regolare. Cavallaro Vincenzo G.), Period. mat., 1955, **33**, № 5, 309—312 (итал.)

После историко-библиографической справки приводятся приближенные равенства, выражающие длину стороны правильного 17-угольника, вписанного в круг радиуса 1, через длины сторон иных правильных многоугольников, вписанных в тот же круг, через тригонометрические функции некоторых углов, через квадратные корни из целых чисел и т. п.

А. С. Смогоржевский

**750. Новое приближенное построение числа $\pi$ по Рэслеру. Карл** (Eine neue Näherungskonstruktion von $\pi$ nach K. Räßler. Karl Herbert), Wiss. Z. Pädagog. Hochschule Potsdam, Math.-naturwiss. Reihe, 1954 — 1955, **1**, № 1, 71 (нем.)

Указывается простое построение циркулем и линейкой отрезка $R = \frac{3}{5}(3+\sqrt{5})$, длина которого превышает число $\pi$ всего на 0,000048...

В. Ф. Рогаченко

**751. Построение сферы через окружность данного радиуса касательно к заданной плоскости. Альтшулер И. С.,** Сб. науч. тр. Белорус. лесотехн. ин-та, 1956, вып. 8, 248—254

**752. Три квадрируемые луночки Гиппократа. Боттари** (Le tre lunule quadrabili di Ippocrate. Bottari Amerigo), Period. mat., 1954, **32**, № 4, 223—230 (итал.)

Подробно рассматривается третья луночка, ограниченная полуокружностью, построенной как на диаметре на большем основании трапеции определенного вида, и дугой, проходящей через концы того же основания и точку пересечения диагоналей трапеции. С. И. Зетель

**753. Об одной теореме Мажо. Мармион** (Sur un théorème de A. de Majo. Marmion A.), Mathesis, 1955, **64**, № 6—8, 242—249 (франц.)

Мажо нашел условия, при которых три сферы, построенные на диаметрах, концами которых являются точки, лежащие на противоположных ребрах тетраэдра, имеют общую окружность. В реферируемой работе доказывается теорема, эквивалентная теореме Мажо, и устанавливается ряд свойств конфигураций, связанных с этой теоремой.

Б. Н. Саморуков

**754. Об одной теореме Кадержавека. Гавел** (O jedné větě Kadeřávkově. Havel Václav), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 3, 328—330 (чеш.)

Дается аналитическое доказательство следующей теоремы: Пусть $\mu_1$, $\mu_2$ — различные сферы, вписанные в круговой конус $\varkappa$ так, что они имеют по крайней мере одну общую точку с плоскостью $\rho$, не проходящей через вершину конуса $\varkappa$. Тогда точка $X \in \rho \cap \varkappa$, если сумма или модуль разности отрезков касательных из точки $X$ к окружностям $\mu_1 \cap \rho$ и $\mu_2 \cap \rho$ постоянна, причем этой постоянной служит отрезок образующей конуса, заключенный между окружностями $\mu_1 \cap \varkappa$ и $\mu_2 \cap \varkappa$. Устанавливаются условия, при которых геометрическое место точек $X$ будет эллипсом, гиперболой или параболой. Очевидно, что если окружности $\mu_1 \cap \rho$ и $\mu_2 \cap \rho$ вырождаются в точки, то получается конструкция, с помощью которой еще в древней Греции выводились основные свойства конических сечений.

В. Ф. Рогаченко

**755. Проблема тринадцати сфер. Лич** (The problem of the thirteen spheres. Leech John), Math. Gaz., 1956, **40**, № 331, 22—23 (англ.)

Новым путем доказывается, что 13 непересекающихся равных сфер не могут касаться сферы того же радиуса. Предположив противное и попарно соединив дугами достаточно близкие из 13 точек касания, автор получает на сфере сеть из многоугольников. Исследование площадей многоугольников приводит к сети определенной топологической структуры. Она оказывается нереализуемой. Детали последней части доказательства опущены.

Ставится общий вопрос о признаках существования сети с заданными секциями, числом вершин и распределением вершин по числу сходящихся в них линий.

С. И. Залгаллер

**756. Как из одного шара составить два шара, ему конгруэнтных. Лохер-Эрнст** (Wie man aus einer Kugel zwei zu ihr kongruente Kugeln herstellen kann. Locher-Ernst L.), Elem. Math., 1956, **11**, № 2, 25—35 (нем.)

Статья примыкает к исследованию Робинсона (Fundam. math., 1947, **34**, 246—260) и ставит своей задачей дать подробное изложение результата, указанного в заголовке. Вращения шара около центра (вокруг любой оси на любой угол) называются независимыми, если любое произведение их и вращений им обратных не приводит к исходному положению, если только не сводится тождественно к единице. Приводится доказательство существования двух независимых вращений, по Хаусдорфу (Hausdorff F., Math. Ann., 1914, **75**, 428—433) и отсюда выводится существование четырех независимых вращений. Группа $G$, порожденная независимыми вращениями $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$, разбивает точки поверхности шара на классы эквивалентности. Каждый класс содержит счетное множество точек; множество всех классов несчетно. Точка называется неподвижной, если в $G$ есть вращение, оставляющее эту точку на месте. Каждый класс состоит либо только из неподвижных точек, либо только из точек, не являющихся неподвижными. Доказывается возможность однозначного представления точек класса выражениями вида $U\beta$, где $U$ какая-нибудь фиксированная точка класса, а $\beta \in G$.

Множество $S$ точек поверхности шара разбивается на сумму четырех непересекающихся подмножеств: $S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ так, чтобы имели место соотношения:

$A_1\varphi_1 = A_1 + A_2$ и вместе с тем $(A_2 + A_3 + A_4)\varphi_1 = A_3 + A_4$,

$A_2\varphi_2 = A_1 + A_2$ „ „ $(A_1 + A_3 + A_4)\varphi_2 = A_3 + A_4$,

$A_3\varphi_3 = A_3 + A_4$ „ „ $(A_1 + A_2 + A_4)\varphi_3 = A_1 + A_2$,

$A_4\varphi_4 = A_3 + A_4$ „ „ $(A_1 + A_2 + A_3)\varphi_4 = A_1 + A_2$.

Если теперь отнести к множеству $B_i$ все точки шара (за исключением центра), лежащие на радиусах, проведенных в точки поверхности, принадлежащие $A_i$,

о точки шара (без центра) оказываются разбитыми на четыре подмножества $B_i$ так, что как из $B_1$ и $B_3$, так из $B_2$ и $B_4$ путем двух вращений может быть получен исходный шар. Для включения центра выделяется одна из точек в отдельное подмножество $E$. В результате множество точек шара оказывается разделенным на 5 подмножеств $A, B, C, D, E$, обладающих тем свойством, что из $A$ и $C$ путем двух вращений и из $B, D$ и $E$ путем двух вращений и одного переноса может быть получен шар, конгруэнтный данному. А. Г. Школьник

**57. Геометрическое определение поверхностей второго порядка. Карканаг** (Une définition géométrique des quadriques. Carcanague J.), Rev. math. spéc., 1956, 66, № 8, 189—191 (франц.)

Если дана фиксированная точка $F$, фиксированная окружность или прямая $C$ и действительный или мнимый угол $\alpha$, определяемый равенством $\cos\alpha = a$, где $a$ — действительная положительная постоянная, то геометрическое место центров $M$ сфер $\mu$, проходящих через $F$ и образующих с $C$ угол $\alpha$, есть поверхность второго порядка с фокусом $F$. (Обобщение известной планиметрической теоремы: Коническое сечение есть геометрическое место центров окружностей, проходящих через фокус и образующих с соответствующей директрисой действительный или мнимый угол $\alpha$, определяемый равенством $\cos\alpha = 1/e$, где $e$ — эксцентриситет конического сечения). Справедливо и обратное предложение. Показано также, что вместо $F$ можно взять сферу Ф, причем сферы $\mu$ должны быть ортогональны к Ф. Рассмотрены частные случаи. А. С. Смогоржевский

**58. О радиусах кривизны конического сечения. Тоскано** (Sui raggi di curvatura di una conica. Toscano Letterio), Archimede, 1956, 8, № 1, 41—42 (итал.)

**59. Об образовании некоторых замечательных кривых. Ломацци** (Sulla generazione di alcune curve notevoli. Lomazzi Luigi), Period. mat., 1954, 32, № 4, 212—222 (итал.)

Лоран в заметке «Преобразование плоских кривых» (Anais fac. Ciênc. Porto, 1949, 26, № 1, № 2; 31, № 3) дал построение некоторых плоских кривых, используя центральные конические сечения. Автор показывает, что результаты Лорана могут быть получены при помощи гиперболической инволюции на прямой, без применения конических сечений.

С. И. Зетель

**60. Двойные локсодромы с пересекающимися осями. Вундерлих** (Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar. Wunderlich Walter), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, Abt., 2, 164, № 1—4, 17—34 (нем.)

Двойной локсодромой называется кривая, которая пересекает под постоянными углами $\alpha$ и $\alpha^*$ плоскости двух пучков с осями $l$ и $l^*$. В работе рассматривается дифференциальное уравнение двойных локсодром и его решения для случая пересекающихся осей $l$ и $l^*$.

С. Г. Кислицын

**61 К. Элементы векторного исчисления. Крейндлер** (Elemente de calcul vectorial. Kreindler O. Bucureşti, 1956, 75 p., il.), Bul. Bibliogr., 1956, А, № 5, 169 (рум.)

**62 К. Элементы тензорного исчисления. Петреску** (Elemente de calcul tensorial. Petrescu Stefan. Inst. constr. Bucureşti, 1955, 65, p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А5, № 1, 13 (рум.)

**63 К. Тригонометрия. Берман т А. Ф., Люстерник Л. А.,** Гостехиздат, 1956, 180 стр., илл., 3 р.

**64 К. Кинематика в плоскости. Бляшке, Мюллер** (Ebene Kinematik. Blaschke Wilhelm, Müller H. R., München, Oldenbourg, 1956, 269 S., 26.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, А, № 27, 1900 (нем.)

**765 К. Лекции по геометрии. Часть I. Элементы аналитической геометрии. Часть II. Плоские кривые. Морин** (Lezioni di geometria. 2. ed. Morin Ugo. Padova, Casa ed. dott. A. Milani. Parte I: Elementi di geometria analitica, 1953, VIII, 192 p., 1200 L., Parte 2: Curve piane, 2 ed, 1954, X, 362 p., 2500 L.), Bibliogr. ital., 1956, № 654—655, 497 (итал.)

**766 К. Лекции по геометрии с упражнениями для второго года обучения студентов — математиков, физиков и инженеров (Учебные занятия Римского университета). Мартинелли** (Lezioni di geometria con esercizi. Per il secondo anno di studi di matematica, fisica e ingegneria, 4 ed. Martinelli Enzo. (Univ. studi Roma), Roma, Ed. Libr. eredi V. Veschi, 1955, 551 p., ill.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 650, 284 (итал.)

**767 К. Введение в аналитическую геометрию. Быджовский** (Úvod do analytické geometrie. 3. přeprac. vyd. Bydžovský Bohumil. Praha, ČSAV, 1956, 491, (2) s., il., 34, 30 Kčs), Bibliogr katalog ČSR. České knihy, 1956, № 6, 126 (чеш.)

**768 К. Учебник аналитической геометрии плоскости для машиностроительных техникумов. Карл, Георги** (Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene für die Fachschulen des Maschinenbaus. Carl J., Georgi H., Leipzig, Fachbuchverl., 1955, 137 S., ill.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, А, № 1, 37 (нем.)

**769 К. Аналитическая геометрия. Дюге** (Géométrie analytique. Dugué Daniel. Paris, C. Hermant, 1955, 78 p., ill.), Bibliogr. France, 145, № 8, 174 (франц.)

**770 К. Аналитическая геометрия. Привалов** (Аналитик һәндәсә. Али техники мәктәбәр учун. Привалов И. И., Он сәккизинчи нәшриндән тәрчумә әдилмишдир. Бакы, Азәрнәшр., 1955, 414 сәһ., 7 м. 35 г.) (азерб.)

**771 К. Аналитическая геометрия. 2-е изд. Лея** (Geometria analyityczna. Wyd. 2. popr. Leja Franciszek. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk, 1956, 288 s., il., 22.50 zł), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 23, 337 (польск.)

**772 К. Конические сечения. Лебег** (Les coniques. Lebesgue Henri. Paris, Gauthier-Villars, 1955, VIII, 191 p., ill., 900 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 17, 392 (франц.)

**773 К. Упражнения и задачи по курсу аналитической геометрии для высших технических училищ. Мургулеску, Цино, Бэнэреску** (Exerciţii şi probleme pentvu cursul de geometric analitică in şcolile tehnice superioare. Part 4-a. Murgulescu Elena, Ţino Ovidiu, Bănărescu Valeriu. Inst. căi ferate «Gheorghe Gheorghiu-Dej», Bucureşti, 1955, 130 p., il.—Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 6, 208 (рум.)

**774 К. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.** [Для втузов]. Изд. 20-е стереотип. **Цубербиллер О. Н.,** М., Гостехиздат, 1956, 356 стр., илл., 8 р. 5 к.

**775 К. Сборник задач по аналитической геометрии** (Culegere de probleme de geometrie analitică. Inst. pedag. Timişoara, 1955, 291 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1955, А4, № 14, 7 (рум.)

**776 К. Упражнения по аналитической геометрии для студентов математических факультетов. Обер, Папелье** (Exercices de géométrie analytique, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Tome 2. 6 éd. Aubert Paul, Papelier Georges. Paris, Vuibert, 1955, 423 p., ill., 720 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 19, 438 (франц.)

**777 К. Дифференциальная геометрия. 1. Теория плоских и пространственных кривых. Штрубеккер** (Differentialgeometrie. 1. Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Strubecker Karl. Berlin, de Gruyter, 1955, 150 S., 4. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 17, 1234 (нем.)

## ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

**778. Конечные вращения твердого тела. Кестельман** (Finite rotations of a rigid body. Kestelman H.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 330, 278—279 (англ.)

Доказываются две геометрические теоремы о вращениях твердого тела вокруг неподвижной точки. Первая теорема является обобщением предложения, что всякое вращение вокруг неподвижной точки можно заменить поворотами вокруг (трех) взаимно перпендикулярных осей. Через точку $O$ проводятся 3 некомпланарные оси $OA$, $OB$, $OC$. Доказывается, что для того чтобы любое вращение трехмерного пространства можно было осуществить путем поворотов вокруг осей $OA$, $OB$, $OC$ (в заданной последовательности), необходимо и достаточно, чтобы $OB$ было перпендикулярно $OA$ и $OC$.

Вторая теорема утверждает, что группа вращений вокруг точки $O$ порождается вращениями вокруг осей $OA$ и $OC$ (угол между $OA$ и $OC$ меньше $\pi/2$). Л. Р. Волевич

**779. Геометрическое обоснование лучевого способа построения кривых поверхностей. Хомутов К. М.** Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1955, **32**, 23—31

Для ускорения работы по изготовлению кривых поверхностей предложены разные способы построения сечений. Основу их составляют «прогрессические» способы, современное развитие которых составляет так называемый лучевой способ построения кривых поверхностей: основные сечения проектируются не на обычные три плоскости проекций, а на одну плоскость в виде прямых лучей, отображающих соответствующие кривые.

Автор дает обоснование геометрической теории лучевых построений методом прямоугольного проектирования и показывает, что лучевой чертеж представляет собой вертикальную проекцию некоторой кривой линейчатой поверхности, в которую топологически преобразуется данная кривая поверхность.

В результате предлагаемого преобразования сложной кривой поверхности в какую-либо более простую линейчатую поверхность выявляется возможность простого получения всех данных для построения комплекса сечений кривых поверхностей. В. С. Люкшин

**780 К. Векторное исчисление и механика. Энкен** (Calcul vectoriel et mécanique. Hennequin Aimé. Paris, Tournier et Constans, 1955, 299 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 20, 464 (франц.).

## ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**781. Лобачевский и его геометрия. Лю Чун Хо** (로바첩쓰끼와 그의 기하학), 류충호 과학과 기술, Квахак ка Кисуль (Хвахакпхен), 1956, № 5, 58—61 (кор.)

**782. Развитие геометрических идей Лобачевского в работах кафедры математической физики. Смогоржевский А. С.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954, **15**, 149—164

Подводятся итоги исследований по геометрии, проводившихся кафедрой математической физики Киевского политехнического института за последние 15 лет.

Наиболее интенсивной была работа в области теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. Изложению этих результатов посвящена бо́льшая часть статьи. Кратко излагаются результаты, полученные по другим вопросам геометрии Лобачевского, а также по аксиоматическому построению евклидовой геометрии. Наконец, отмечается работа популяризационно-методического характера, проведенная кафедрой в области геометрии. В. Ф. Рогаченко

**783. Неевклидова геометрия и аксиоматические определения. Адамар** (La géométrie non euclidienne et les définitions axiomatiques. Hadamard Jacques), Pensée, 1954, № 58, 74—82 (франц.)

Статья напечатана также в Acta math. Acad. sci. hung. (РЖМат, 1956, 8239).

**784. Интерпретации геометрии Лобачевского. Розенфельд Б. А.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 169—208

Как известно, Лобачевский в первых работах обосновывал непротиворечивость своей геометрии тем, что основные формулы, выражающие зависимости между сторонами и углами треугольника, позволяют вывести, если воспользоваться еще предложениями абсолютной геометрии, его теорию параллелей и в то же время эти формулы могут быть получены чисто аналитически из формул сферической геометрии путем деления сторон треугольника на $i$. Автор развивает мысль С. А. Яновской (Передовые идеи Н. И. Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике, М.—Л., 1950, стр. 36, 60), что эти соображения по существу равносильны построению некоторой интерпретации. А именно, он показывает, что точки плоскости Лобачевского могут быть реализованы на сфере радиуса $i$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_0^2 = -1$$

в комплексном евклидовом пространстве теми точками, две первых декартовых координаты $X_1$ и $X_2$ которых вещественны, а третья $X_0$ — чисто мнима. Далее дан сжатый обзор еще восьми интерпретаций в их взаимных связях, сопровождаемый краткими историческими сведениями: двух интерпретаций Е. Бельтрами, интерпретации А. Кели — Ф. Клейна, двух интерпретаций А. Пуанкаре, интерпретаций Г. Дарбу, А. П. Котельникова (Э. Штуди) и В. Ф. Кагана. Попутно бегло рассмотрены интерпретации И. Вельштейна, Д. Гильберта, О. Гессе, Ю. Плюккера, Г. Фубини и советских геометров И. М. Яглома, В. Р. Эйгеса, З. А. Скопеца и Е. Д. Губы. Б. Л. Лаптев

**785. Группа Лагерра на плоскости Лобачевского и связанные с нею твердые преобразования в проективном пространстве. Скопец З. А.,** Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, **115**, № 10, 17—18

Работа представляет тезисы доклада на юбилейной сессии и содержит следующие утверждения. Если в вещественном трехмерном пространстве взяты гиперболоид $F_2$ и пересекающая его плоскость $\pi$, то каждой точке пространства однозначно соответствует линия пересечения плоскости $\pi$ с касательным конусом $k_2$ гиперболоида $F_2$, имеющим вершину в этой точке. Эти линии в гиперболической метрике, определяемой на плоскости $\pi$ кривой ее пересечения с $F_2$, являются циклами. Обратное отображение является двузначным, введение ориентаций циклов делает его однозначным. После этого псевдогиперболическое расстояние между точками пространства становится равным касательному расстоянию между соответствующими им ориентированными циклами в плоскости $\pi$. Отсюда следует изоморфизм группы псевдогиперболических движений трехмерного проективного пространства группе Лагерра на плоскости Лобачевского. Е. Г. Гонин

**786. Инвариантность внутреннего расположения при проективных преобразованиях треугольника Максвелла. Вышецкий** (Invariance of insidedness in

projective transformations of the Maxwell triangle. Wyszecki G.), J. Opt. Soc. America, 1954, 44, № 7, 524—529 (англ.)

Пусть коллинеация

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

($|a_{ik}| \neq 0$) преобразует точки $X$ (1; 0), $Y$ (0; 1), $Z$ (0; 0) соответственно в $X_1$, $Y_1$, $Z_1$. При этом область внутри треугольника Максвелла» $XYZ$ преобразуется в область внутри треугольника $X_1Y_1Z_1$ тогда и только тогда, когда те из чисел $a_{33}$, $a_{31} + a_{33}$, $a_{32} + a_{33}$, которые отличны от нуля, имеют один и тот же знак. Этот вывод иллюстрируется примером из области оптики. Статья может представить интерес для физика.

А. С. Смогоржевский

**787. Евклидова геометрия на сфере. Ди-Ной** (Geometria euclidea sulla sfera. Di Noi Salvatore), Archimede, 1955, 7, № 1, 10—14 (итал.)

Пусть $\pi$ — сфера и $\omega$ — касательная к ней в точке $O$ плоскость. На сфере $\pi$, проколотой в точке $O$, устанавливается евклидова геометрия плоскости $\alpha \parallel \omega$ путем проектирования $\alpha$ на $\pi$ из $O$. При этом роль геодезических сферы $\pi$ (без точки $O$) играют сечения ее плоскостями, проходящими через $O$. Угол между прямыми плоскости $\alpha$, очевидно, равен (в евклидовом смысле) углу между соответствующими геодезическими сферы. Два отрезка геодезических на $\pi$ считаются равными, если равны (в евклидовом смысле) их прообразы на $\alpha$ в указанном проектировании. Абсолют такой метрики образован точкой $O$ и изотропными прямыми плоскости $\omega$, проходящими через $O$. Движения на $\pi$ суть гомографии, переводящие в себя $\pi$, $O$, $\omega$. Дается аналитическое выражение движений I и II рода на сфере $\pi$.

В. Т. Базылев

**788. Многомерные аналоги гиперболоида. Гордевский Д. З.,** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 129—133

Работа содержит пять теорем. Первые три из них не являются новыми, так как, объединенные вместе, они представляют собой содержание известной теоремы: Если в пространстве $mk + m + k$-го измерения задано $m + 2k$-мерных пространств $k_1, k_2, \ldots, k_{m+2}$, из которых любые $m + 1$ независимы, то через каждую точку одного из пространств, например через точку $O_1$ пространства $k_1$, проходит одно и только одно пространство $S$ $m$-го измерения, которое имеет по одной общей точке с каждым из заданных пространств (Bertini, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, in Wien, 1924, 15; Segre C., Enzyklop. Math. Wiss., III, C 7, 829).

Называя пространство $Sm$-трансверсалью, а точки пересечения $S$ с $k_2, k_3, \ldots, k_{m+2}$ точками, соответствующими точке $O_1$, автор формулирует теорему 4 следующим образом: Если точка $O_1$ в пространстве $k_1$ описывает прямую, то соответственные точки в пространствах $k_2, k_3, \ldots, k_{m+2}$ также описывают прямые, а $m$-трансверсаль описывает пространство $2m + 1$-го измерения. Эта теорема неверна, так как трансверсаль $S$ описывает не пространство $2m + 1$-го измерения, а известное многообразие $V_{m+1}^{m+1}$, принадлежащее пространству $2m+1$-го измерения. Например, луч, пересекающий три попарно независимые прямые трехмерного пространства, описывает не трехмерное пространство, как это утверждается в теореме 4 (при $m = k = 1$), а гиперболоид, принадлежащий трехмерному пространству. Из неправильности теоремы 4 непосредственно вытекает неправильность теоремы 5, или теоремы перенесения, как называет ее автор.

А. А. Глаголев

**789. Некоторые свойства системы конических сечений пространства, дважды пересекающих некоторое фиксированное коническое сечение. Гуляева Л. А.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 20, № 3, 145—172

Работа обобщает построенную А. А. Глаголевым (см. его диссертацию: Применение теории инволюций высших порядков к решению задач линейной геометрии, М., 1945, стр. 94—100) коллинеацию $(PC)$ на пространство $S_4$, где $P$ — полярное соответствие в $S_4$ относительно невыродившейся гиперквадрики $\Sigma_3^2$, $C$ — стереографическая проекция из произвольной точки $M$ гиперквадрики $\Sigma_3^2$, на гиперплоскость $S_3$, не проходящую через точку $M$. Рассматривается взаимнооднозначное соответствие, устанавливаемое $(PC)$.

Выясняется связь между совокупностью прямых, проходящих через одну точку $S_4$, связной прямых $S_4$, пучком прямых $S_4$, прямыми плоскости $S_4$ и коническими сечениями, которые соответствуют прямым $S_4$ в коллинеации $(PC)$ и образуют систему $[y^2]$. Вводится понятие сопряженности поверхностей II порядка относительно совокупности конусов $\overline{\Sigma}_3^2$, соответствующих в $(PC)$ точкам гиперквадрики $\Sigma_3^2$, сопряженности конических сечений поверхностям II порядка относительно $\overline{\Sigma}_3^2$, сопряженности двух конических сечений системы $[y^2]$ относительно $\overline{\Sigma}_3^2$. По аналогии с пространством $S_4$ даются определения сопряженности и взаимной сопряженности конических сечений, конических сечений и пар точек гиперплоскости $S_3$ относительно $\overline{\Sigma}_3^2$.

Выделяются совокупности конических сечений системы $[y^2]$ 1) соответствующих прямым трехмерного пространства; 2) сопряженных одной и той же поверхности II порядка.

Рассматривается ассоциированная пятерка конических сечений системы $[y^2]$. При помощи коллинеации $(PC)$ построения, полученные для ассоциированной пятерки прямых $S_4$, переносятся на конические сечения системы $[y^2]$. Рассматривается конгруэнция конических сечений $\lambda^2$, сопряженных независимым коническим сечениям $\alpha_i^2$ $(i = 1,2,3,4)$. Рассматривается конфигурация $(K)$ из 15 конических сечений системы $[y^2]$, которая определяется при построении конического сечения ассоциированного четырем данным независимым коническим сечениям. Все результаты переносятся на геометрию сфер и кругов трехмерного пространства, где сопряженные относительно $\overline{\Sigma}_3^2$ сферы, сферы и круги являются перпендикулярными.

В. А. Маневич

**790. К вопросу о решении геометрических задач третьей и четвертой степени. Никулин Н. А.,** Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 195—199

Рассматриваются геометрические задачи третьей и четвертой степени на плоскости, выполняемые с помощью трех постоянных прямых, не проходящих через одну точку. Считая дозволенными определенные операции, автор приходит к выводу:

1. Всякая геометрическая задача 3-й и 4-й степени разрешима с помощью одного произвольного треугольника.

2. Каждая геометрическая задача 3-й и 4-й степени разрешима с помощью произвольного (в частности, прямого) угла и двубортной линейки.

Примечание референта. Если имеются три произвольно начерченные подвижные прямые, не проходящие через одну точку, тогда указанное

автором требование наличия циркуля и линейки является излишним. Н. В. Наумович

**791. Об одной теореме Д. Д. Мордухай-Болтовского. Кирищиев Р. И.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 207—208

Доказывается, что всякая конструктивная задача второй степени в плоскости Лобачевского может быть решена при помощи линейки и циркуля постоянного раскрытия. При этом под последним инструментом, помимо циркуля, понимается гиперциркуль и орициркуль. Опечатка: На стр. 208, строка 11 св. напечатано 367. Следует читать: 376. Б. Н. Саморуков

**792. О разрешимости конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского при помощи орициркуля. Мокрищев** (Про розв'язність конструктивних задач другого степеня в площині Лобачевського за допомогою орициркуля. Мокрищев К. К., Доповіді АН УРСР, 1955, № 6, 515—519 (укр.; рез. русс.)

Доказывается, что при помощи одного только орициркуля можно решить любую конструктивную задачу второй степени в плоскости Лобачевского. Для доказательства дается решение указанным инструментом восьми элементарных штейнеровских задач, одиннадцати вспомогательных и трех главных задач: о построении точки пересечения двух прямых, прямой и окружности, и двух окружностей. При решении главных задач существенную роль играет построение взаимно инверсных образов относительно орицикла и относительно окружности. В. Ф. Рогаченко

**793. Геометрические построения с помощью линейки. Боттема** (On geometrical constructions with the ruler. Bottema O.), Nieuw arch. wiskunde, 1955, 3, № 1, 1—5 (англ.)

Доказывается, что всякая конструктивная задача второй степени в евклидовой плоскости может быть решена с помощью линейки, если одновременно заданы либо а) центральное коническое сечение с центром и одним из фокусов или со своими двумя фокусами, либо б) парабола с фокусом и направлением оси.

Примечание референта. Возможность решения указанной задачи с помощью произвольной дуги конического сечения с заданными центром и одним из фокусов была показана Н. В. Наумович в 1936 г. (Наумович Н. В,. «Математическое просвещение», 1936, вып. 5). Г. С. Бархин

**794. Решение некоторых задач начертательной геометрии методом подобия. Токарев В. М.,** Тр. Казанск. хим.-технол. ин-та, 1955, вып. 19—20, 325—337

**795. Решение двух основных метрических задач в ортогональной аксонометрии без использования вращений и совмещений. Юстиниянович** (Die Lösung zweier metrischen Fundamentalaufgaben in der orthogonalen Axonometrie ohne Umlegungen. Justinijanović Juraj), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, 10, № 1—2, 41—46 (нем.; рез. хорв.)

Перпендикуляр из данной точки к данной прямой и расстояние между двумя точками отыскиваются посредством подходящим образом назначаемой инволюции. А. А. Гаршнек

**796. Геометрические преобразования пространства и их применения в начертательной геометрии. Джапаридзе И. С.,** В сб.: «Методы начертательной геометрии и ее приложения». М., Гостехиздат, 1955, 54—82

Перспективно-аффинное (родственное) преобразование пространства рассматривается как метод решения задач начертательной геометрии. Если плоскость родства выбрать перпендикулярной к плоскости проекций, то родственное преобразование пространства можно свести к родству точечных полей на плоскости проекций. Автор применяет этот прием к решению некоторых задач на комплексном чертеже. Многие задачи на поверхности второго порядка могут быть сведены к тому частному случаю, когда поверхность второго порядка является поверхностью вращения, благодаря чему достигаются некоторые упрощения. Указывается на возможность применения гомологического преобразования пространства в начертательной геометрии. Н. Ф. Четверухин

**797. Построение линий пересечения кривых поверхностей в аксонометрии при помощи геометрических преобразований. Халдеев И. М.,** В сб.: «Методы начертательной геометрии и ее приложения» М., Гостехиздат, 1955, 112—140

Рассматриваются задачи на построение линии пересечения поверхностей, изображенных в аксонометрических проекциях. В гл. I с этой целью применяются проективные и аффинные преобразования, позволяющие добиться некоторых упрощений при графическом решении задачи.

В гл. II автор пользуется топологическими преобразованиями более сложных поверхностей в простые (например, поверхности вращения общего вида, поверхности второго порядка — в конические и цилиндрические поверхности). После выполнения такого преобразования построение линии пересечения поверхностей значительно упрощается. Даны технические применения методов, предложенных автором. Н. Ф. Четверухин

**798. Обобщение проекций Е. С. Федорова. Пряншникова З. И.** В сб. «Методы начертательной геометрии и ее приложения». М., Гостехиздат, 1955, 156—176

Федоровские проекции $A_1$ и $A_2$ точки $A$ трехмерного пространства $\Pi^3$ на плоскости изображений $\Pi^2$ являются концами отрезка $A_1A_2$. Такие проекционные отрезки для всех точек пространства параллельны между собой. Точки четырехмерного пространства $\Pi^4$ отображаются по Федорову на плоскости изображений векторами. Таким образом, в этом случае способ Федорова не сохраняет параллельности изображающих отрезков, что осложняет его практическое применение.

В реферируемой статье изображение точек $\Pi^4$ на плоскости $\Pi^2$ основано на обобщении федоровских проекций для точек $\Pi^3$. Проектирование точки пространства $\Pi^4$ на плоскость $\Pi^2$ производится из трех «центральных». несобственных прямых, лежащих в одной несобственной плоскости. Тогда три проекции точки будут расположены на одной прямой, называемой линией связи. Все линии связи на плоскости проекций параллельны. В этом и заключается практическое значение способа проектирования, предложенного автором.

В работе показано решение основных позиционных задач в $\Pi^4$, а также некоторые другие приложения указанного способа (решение систем линейных уравнений, применения к физико-химическому анализу). Н. Ф. Четверухин

**799 К. Курс оснований геометрии. Некулче** (Curs de bazele geometriel. Neculce Mihail Univ. «C. I. Parhon», Bucureşti, 1955, 41 p., il.—Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А5, № 1, 12 (рум.)

**800 К. Симметрия. Эксперименты. Указания к способу как увидеть предметы в действительных пропорциях и представить их так, чтобы их изображение имело смысл. Вольф, Вольф** (Symmetrie. Versuche. Anweisung zu gestalthaftem Sehen u. sinnvollem Gestalten systemat. dargest. u. an zahlr. Beisp. erl. Textbd und Tafelbd. Wolf K. Lothar, Wolff Robert. Münster-Köln, Böhlau, 1956, VIII, 139 S., VI, 192 S., 60.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, А, № 12, 857 (нем.)

**801 К. Перспектива без точки схода. Бориссавлиевич** (Perspective sans point de fuite. Boris-

savliévitch Miloutine. Paris, 1956, 23 p., ill., 500 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 17, 390 (франц.)

02. К. **Начертательная геометрия. Георгиу** (Geometria descriptivă. Gheorghiu A. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 450 p., il. 54 lei.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 6, 206 (рум.)

03 К. **Начертательная геометрия. Том 1-й. Основные понятия. Ортогональная проекция на две плоскости. Аксонометрия. Рёйттер** (Darstellende Geometrie. Bd. 1. Grundbegriffe. Orthogonale Zweitafelprojektion. Axonometrie. 4. verb. und erw. Aufl. Reutter Fritz. Karlsruhe, Braun, 1955, 203 S., ill.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, А, № 12, 857 (нем.)

04 К. **Начертательная геометрия. 1. Наиболее важные методы изображения. Горизонтальные и боковые проекции тел, ограниченных плоскостями. 2. Тела, ограниченные криволинейными поверхностями. Топографические проекции. Хак** (Darstellende Geometrie. Haack Wolfgang, Berlin, de Gruyter, 1954. 1. Die wichtigsten Darstellungsmethoden. Grund- u. Aufriß ebenflächiger Körper. 110 S., ill.; 2. Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kotierte Projektionen, 129 S., ill. Je 2.40 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, А, № 37, 2087 (нем.)

05 К. **Курс начертательной геометрии.** (Для машиностроит. и механ.-технол. специальностей втузов). Изд. 10-е, стереотип. **Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А.,** М., Гостехиздат, 1956, 404 стр., илл., 9 р. 10 к.

06 К. **Задачник по начертательной геометрии для заочников строительных и электротехнических институтов. Ялувка, Магель** (Cvičení z deskriptivní geometrie pro dálkové studium strojního a elektro-, technického inženýrství. 1. díl. Jalúvka Vlad. Mahel Vlad. Praha, SNTL, 1955, 205 s., il., 15,40 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 19, 472 (чеш.)

07 Д. **Фундаментальная задача аксонометрии в центральной проекции. Рюнк О. Я.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Таллинск. политехн. ин-т, Таллин, 1956

08 Д. **Топологическая классификация коллинеаций проективной плоскости. Алексеева Г. П.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1956

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

09. **Сети кривых второго порядка с распадающейся кривою Кэли. Фава** (Le reti di coniche dotate di cayleyana riducibile. Fava Franco), Atti Accad. sci. Torino Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 46—54 (итал.)

Определены все сети кривых второго порядка с распадающейся кривою Кэли (Pascal E., Repertorium der höheren Mathematik,Geometrie II, I-er Teil S., 262—267; Bertini, Einführung in die projektive Geometrie. mehrdimensionaler Rüume Wien, 1924, 385) и указаны 11 сетей, проективно различных типов таких сетей.
А. А. Гаршнек

10. **О некоторых замечательных кривых третьего и четвертого порядков. Колесников О. Н.,** Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 135—155

В основу своего исследования автор кладет так называемое диссоидальное преобразование. В этом преобразовании двум точкам, лежащим на одном и том же полярном луче, с радиусами-векторами $\rho'$ и $\rho''$ ставится в соответствие третья точка на том же полярном луче с радиусом-вектором $\rho$ так, что $\rho=\rho''-\rho'$. Паре кривых ставится в соответствие кривая, называемая диссоидалью.

Рассматриваются способы образования некоторых кривых третьего и четвертого порядков посредством указанного преобразования. Б. Н. Саморуков

811. **Аналагматические кривые пятого порядка. Брутганс** (Analagmatické kvintiky. Brutthans Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 3, 274—283 (чеш.)

Аналагматическими кривыми называются кривые, переходящие в себя при некоторой квадратичной инверсии.

Рассматриваются три типа инверсии, когда центр инверсии лежит: 1) вне основного нераспадающегося конического сечения (тип $A$), 2) вне основного конического сечения, распадающегося на две прямые (тип $B$), 3) или на основном нераспадающемся коническом сечении (тип $C$). Доказывается общая теорема о том, что нераспадающаяся аналагматическая кривая 5-го порядка имеет в центре инверсии либо обыкновенную, либо тройную точку. Устанавливаются необходимые и достаточные признаки того, что кривая с тройной точкой переходит в себя с помощью соответствующих типов инверсии $A$, $B$, $C$. Доказываются несколько теорем, характеризующих свойства аналагматических кривых 5-го порядка с обыкновенной и тройной точкой в центре инверсии.

В конце работы указаны случаи кривых 5-го порядка, переходящих в себя при помощи некоторых групп алгебраических преобразований. В. Ф. Рогаченко

812. **О фокальных свойствах бициркулярных кривых и некоторых циклидах четвертого порядка. Ниче** (Sur les propriétés focales des courbes bicirculaires et de certaines cyclides du $4^e$ ordre. Ničе V.), Bull. internat. Acad. yougosl. sci. et beaux-arts, 1954, № 12, 99—102 (франц.)

Бициркулярная кривая четвертого порядка рода нуль определяется как педальная кривая конического сечения $k$, отличного от параболы. Полюс $S$ и циклические точки являются двойными точками этой кривой.

Задавшись на произвольной прямой гиперболической инволюцией, можно получить аналогичным образом кривые четвертого порядка рода нуль с тремя действительными двойными точками.

Ту же бициркулярную кривую можно также получить как огибающую окружностей, проходящих через точку $S$, у которых центры расположены на кривой второго порядка $l$, гомотетичной с $k$, с центром гомотетии $S$ и коэффициентом 1/2.

Доказывается теорема: фокусы бициркулярной кривой четвертого порядка рода нуль совпадают с фокусами кривой $l$.

Далее рассматриваются специальные циклиды как педальные поверхности относительно поверхностей вращения второго порядка. Изучаются два случая: полюс $P$ лежит на оси вращения поверхности и полюс $P$ не лежит на этой оси, причем поверхность второго порядка является либо вытянутым эллипсоидом вращения, либо двуполостным гиперболоидом вращения с вещественными фокусами на оси вращения. Точка $P$ является двойной точкой циклиды, а мнимый шаровой круг — двойной кривой. Если плоскость проходит через точку $P$, то она пересекает циклиду по бициркулярной кривой рода нуль; в противном случае род сечения равен единице. Изучаются фокальные свойства этих сечений.

Изложение синтетическое, доказательства не приводятся. З. А. Скопец.

813. **Об одной теореме, относящейся к рациональным преобразованиям. Никулин Н. А.,** Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 189—193

Рассматривается преобразование, определяемое формами

$$\sum_{i=1}^{3} x_i' \varphi_i^k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i' \varphi_i^m = 0, \qquad (1)$$

где $\varphi_i^k$ и $\varphi_i^m$ — формы соответственно $k$-й и $m$-й степени от $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, а под $x_i$ и $x_i'$ понимаются однородные проективные координаты двух точек $X$ и $X'$, первая из которых лежит в плоскости $\omega$, а вторая в плоскости $\omega'$. Каждой точке плоскости $\omega$ будет соответствовать одна точка на плоскости $\omega'$, а каждой точке последней будут соответствовать $\mu$ точек на первой. Такое преобразование называется $\mu$-однозначным преобразованием.

Из уравнений (1) можно найти $\rho x_i' = f_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где $f_i$ — формы степени $\nu$ от $x_1, x_2, x_3$. Число $\nu$ называется порядком преобразования (1).

Автор приходит к предложению: Всякое $\mu$-однозначное преобразование, порядок которого $\nu > \mu + 1$, разложимо. В частности, всякое бирациональное преобразование есть произведение конечного числа квадратичных преобразований. Н. В. Наумович

**814. О некоторых кривых на кратной поверхности. Годо** (Sur certaines courbes tracées sur une surface multiple. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 6—9, 201—208 (франц.)

В двух предыдущих работах (РЖМат, 1956, 6085, 6086) автор исследовал кривые на алгебраической циклической кратной поверхности порядка, равного простому числу $\neq 2$, имеющей конечное число точек дирамации.

Пусть $\Phi$ — поверхность, изображающая циклическую инволюцию на алгебраической поверхности $F$. Существует вообще $p-1$ линейных систем $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ кривых на $\Phi$ того же порядка, как и поверхность $\Phi$, проходящих через точки дирамации. В какой-либо точке дирамации касательный конус поверхности $\Phi$ распадается на четыре рациональных конуса $(\sigma_\alpha)$, $(\tau_\alpha)$, $(\tau_\beta)$, $(\sigma_\beta)$. Между системами $|\Gamma_i|$ существует одна система такая, линии которой однократно проходят через точку дирамации и касательная в этой точке принадлежит конусу $(\sigma_\alpha)$, и другая система аналогичного поведения, где лишь конус $\sigma_\alpha$ заменен конусом $\sigma_\beta$. В данной работе автор показывает, что существует третья линейная система кривых $|\Gamma_i|$, линии которой однократно проходят через точку дирамации и касательная в этой точке принадлежит конусу $(\tau_\alpha)$ и, конечно, аналогичная четвертая система, для которой конус $(\tau_\alpha)$ заменен конусом $(\tau_\beta)$. С. С. Бюшгенс

**815. О бирациональном преобразовании бидуального пространства $S_3$. Бальсимелли** (Su una trasformazione birazionale dell'$S_3$ biduale. Balsimelli Pio), Giorn. mat. Battaglini, 1955, **83**, № 1, 77—81 (итал.)

Под бидуальным пространством автор разумеет пространство, координаты точек которого изображаются комплексами с двумя единицами $u = 1$ и $\varepsilon$, причем для второй $\varepsilon^2 = 0$, и с коэффициентами из обычного комплексного поля. Исходным пунктом берется квадратичное бидуальное преобразование $S_3$ в однородных координатах

$$\gamma_1' = \gamma_1\gamma_4, \ \gamma_2' = -\gamma_2\gamma_4, \ \gamma_3' = -\gamma_3\gamma_4, \ \gamma_4' = \gamma_1^2. \qquad (1)$$

Полагая в этих соотношениях $\gamma_i = x_i u + y_i \varepsilon$, $\gamma_i' = x_i' u + y_i' \varepsilon$ и сравнивая коэффициенты при $u$ и $\varepsilon$ слева и справа, получим бирациональное преобразование комплексного пространства $S_7$:

$$x_1' = x_1x_4, \ y_1' = x_1y_4 + x_4y_1, \ x_2' = -x_2x_4, \ y_2' = -x_2y_4 - x_4y_2,$$
$$x_3' = -x_3x_4, \ y_3' = -x_3y_4 - x_4y_3, \ x_4' = x_1^2, \ y_4' = 2x_1y_1 \qquad (3)$$

и обратное ему преобразование (4). Бидуальная точка из $S_3$ представляется прямой $\bar{r}$ пространства $S_7$ и преобразование (3) переводит прямую в $S_7$ в прямую. Далее определяются полуфундаментальные и фундаментальные точки (по терминологии Спампинато, РЖМат, 1956, 8269) преобразования (3) и указываются некоторые свойства преобразуемых конгруенций прямых в $S_7$. С. С. Бюшгенс

**816. О кратном нелинейном многообразии: обобщение теоремы Энриквеса о существовании кратных плоскостей. Маркьонна** (Sulle varietà multiple non lineari: estensioni del teorema d'Enriques relativo all'esistenza dei piani multipli. Marchionna Ermanno), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 38, 321—338 (итал.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная кривая $D^*$, лежащая на алгебраической поверхности $F(x, y, z) = 0$, была бы кривой дирамации некоторой алгебраической функции $u(x, y, z)$ точек поверхности $F$. В случае, когда $F$ — плоскость, задача решена Энриквэсом; Зариский дал другую форму этим условиям (опять для $F$ — плоскости), введя группу Пуанкаре относительно $F - D^*$. Обобщение теоремы существования Энриквэса и соображений Зариского для линейных кратных многообразий установлено Севери. Проблема оставалась не решенной для поверхности и нелинейных кратных многообразий, она и рассматривается в этой статье.

Ход рассуждений автора таков. Уравнение $F = 0$ определяет функцию $z = z(x, y)$ ($m$-значную), эта функция на плоскости $xy$ имеет определенную кривую дирамации $\Phi$. Пусть $u = u(x, y, z)$ — алгебраическая $\mu$-значная функция точек поверхности $F$, имеющая кривую дирамации $D^*$ на $F$; тогда $w = u(x, y, z(x, y))$ будет $\mu m$-значная функция от $x$ и $y$. Функция $w$ есть так называемая «кратная плоскость», присоединенная к $u$; она имеет на плоскости $x, y$ кривую дирамации $\Psi = \Phi + D$, состоящую из $\mu$ раз считаемой кривой $\Phi$ и из проекции $D$ кривой $D^*$ из несобственной точки $Z_\infty$ оси $z$; группа монодромии функции $w$ будет импримитивной. Обратно, если существует функция $w(x, y)$ с $\mu m$ значениями и с импримитивной группой монодромии, притом кривая $\Psi = \Phi + D$ указанным способом будет ее кривой дирамации, то существует $\mu$-значная функция точек поверхности $F$, для которой $D^*$ на $F$ будет кривой дирамации. Дело сводится к установлению необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять кривая $\Psi$, чтобы существовала функция $w$, а следовательно, и $u$. Найденные условия являются естественным обобщением условий Энриквэса. Особенностью этой новой задачи является то, что кривая дирамации $\Psi$ содержит $\mu$-кратную составляющую $\Phi$. Автор дает эти условия в двух эквивалентных формах. Первая форма позволяет развить соображения, аналогичные упомянутым выше соображениям Зариского; вторая позволяет получить результат, аналогичный результату Энриквэса для кратных плоскостей: если одна кривая $D^*$ непрерывной системы $\{D^*\}$, имеющей $\delta$ узлов и $k$ точек возврата и располагающейся на данной поверхности $F$, будет кривой дирамации для некоторой $\mu$-значной функции точки $F$, то же будет и для других кривых $D^*$.

Поблема существования кратного многообразия дирамации приводится к разобранной проблеме. Пусть $F$ — алгебраическая гиперповерхность в пространстве $r$ измерений и $D^*$ — простое алгебраическое многообразие $n-2$ измерений и пусть $\widetilde{F}$ и $\widetilde{D}^*$ — поверхность и кривая, являющиеся соответственно сечениями $F$ и $D^*$ про-

странством $S_3$, общим, но фиксированным. Если $D^*$ есть кривая дирамации для некоторой $\mu$-значной функции точек $\widetilde{F}$, тогда многообразием $D^*$ будет многообразием дирамации для $\mu$-значной функции точек гиперповерхности $F$. Автор дает доказательство теоремы для случая $n=4$, считая переход к любому $r$ не имеющим трудности. С. С. Бюшгенс

**3317 К. Изучение плоской алгебраической рациональной кривой 3-го порядка. Для подготовки к письменным экзаменам на конкурсе по замещению должности преподавателя математики в средней школе. Манджо, Ферри** (Studio di una curva piana algebrica razionale del 3 ordine. Per la preparazione all'esame scritto nei concorsi a cattedre di matematica nelle scuole medie № 12. Mangiò S., Ferri C. Messina, Tip. La Sicilia, 1955, vi, 109—132 p., 300 L.), Bibliogr., ital., 1955, **89**, № 656, 603 (итал.)

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**3318. Исследование по дифференциальной геометрии: производные точки. Гурматай** (Étude de géométrie infinitésimale: les points dérivés. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1955, **64**, № 6—8, (suppl.) 1—10 (франц.)

Статья представляет продолжение двух статей автора, помещенных в «Mathesis» в 1929 и 1953 гг., и обобщает ранее полученные результаты.

Пусть $P$ — точка, определяемая координатами $x$, $y$, когда за оси координат приняты касательная и нормаль в переменной точке $M$ кривой $(M)$, а $x$ и $y$— данные функции угла смежности $\varphi$ кривой $(M)$ в точке $M$. Для определения нормали и центра кривизны кривой $(P)$ вводится точка $P'$, координаты которой относительно касательной и нормали развертки кривой $(M)$ в точке, соответствующей точке $M$, равны $\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}$. Аналогично вводится точка $P''$ (первоначальной кривой является развертка данной кривой $(M)$) с координатами $\frac{d^2x}{d\varphi^2}$ и $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$.

Применение «производных точек» дает возможность получить простые и изящные построения центра кривизны, радиуса кривизны кривой $(M)$, катающейся без скольжения по произвольной кривой $(C)$, а также построения геометрических мест, связанных с развертками кривых и построения кривой Маннгейма для данной кривой. С. И. Зетель

**3319. Новые модели поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Вундерлих** (Nuovi Modelli delle superficie a curvatura costante negativa. Wunderlich Walter), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 130—140 (итал.)

Построение этих моделей основано на предельном переходе от аппроксимирующих поверхность сетей, составленных из пространственных равносторонних четырехугольников. Эти сети в пределе переходят в чебышевскую сеть предельной поверхности. В. А. Ефремович

**3320. О кривизне некоторых квадратичных форм. Винченсини** (Sur la courbure de certaines formes quadratiques. Vincensini Paul), Ann. Fac. sci. Marseille, 1955, **24**, 19—25 (франц.)

Кривизна конгруэнции сфер определяется как кривизна квадратичной дифференциальной формы $d\varphi^2 = (ds^2 - dR^2)/R^2$, где $ds^2$ — метрическая форма геометрического места $S$ центров сфер конгруэнции, а $R(u, v)$ — радиус сферы с центром в точке $(u, v)$ на $S$.

Доказывается, что множество конгруэнций сфер, сохраняющих свою кривизну при изменении радиусов ее сфер в произвольном постоянном отношении и сохранении $S$, состоит из двух семейств: 1) когда $S$ — невырождающаяся поверхность, тогда кривизна конгруэнции равна нулю; 2) когда $S$ — кривая линия, тогда кривизна конгруэнции равна единице.

В первом случае метрическая форма поверхности $S$ в симметрических координатах Дарбу имеет вид $ds^2 = 2e_z^z du dv$ и поверхность $\sigma$, изображаемая в системе декартовых координат $(Ouvz)$ уравнением $z = z(u, v)$ — развертывающаяся.

Дается выражение кривизны конгруэнции сфер через полную кривизну поверхности $\sigma$ и компоненты единичного вектора ее нормали в том случае, когда $\sigma$ — произвольная поверхность; отсюда, как частный случай, получается основной результат 1). К. К. Мокрищев

**3321. Об одном способе нормирования тензора сети на поверхности. Шуликовский В. И.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, **115**, кн. 14, 53—59

Под тензором сети на двумерной поверхности автор разумеет тензор $a_{ik}$ из дифференциального уравнения $a_{ik}du^i du^k = 0$, учитывая, что этот тензор определяется заданием сети и параметризации $(u^1, u^2)$ лишь с точностью до множителя (функционального). Задача состоит в разыскании такого множителя $e^{2\lambda}$, чтобы форма $e^{2\lambda}a_{ik}du^i du^k$ получила нулевую кривизну (гауссову); это нормирование автор называет евклидовым, а тензор $e^{2\lambda}a_{ik}$ — $E$-тензором сети. Пользуясь ранее известными результатами, в большой мере — собственными (Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, **112**, кн. 10), автор в метрическом случае приводит задачу к уравнению с частными производными 2-го порядка (как можно было предвидеть из сопоставления с теорией конформного отображения поверхности на плоскость. *Реф.*). Знание одного решения позволяет найти конечные уравнения сети квадратурами. Полученные результаты применяются к важным классам сетей, каковы: чебышевская, геодезическая риччиева, двоякопараллельная (каждое из двух семейств состоит из геодезически-параллельных кривых), эквиареальная, асимптотическая, сеть линий кривизны. Я. С. Дубнов

**3322. О поверхностях, несущих сопряженные сети, у которых кривые обоих семейств соответственно плоские и геодезические. Борель** (Sur les surfaces portant des réseaux conjugués dont les courbes des deux familles sont respectivement planes et géodésiques. Borel F.), Ann. Fac. sci. Marseille, 1955, **24**, 83—103 (франц.)

Автор называет сетью $R$ сопряженную сеть, у которой кривые одного семейства плоские, а второго — геодезические.

Параллелизм Петерсона — точечное соответствие между двумя поверхностями, которое преобразует кривые некоторой сети в кривые с касательными, параллельными касательным первой сети, — преобразует сеть $R$ в такую же.

Доказывается, что с помощью параллелизма Петерсона можно свести общую задачу отыскания поверхностей, несущих сети $R$, к случаю, когда плоскости одного семейства кривых сети проходят через неподвижную точку. Если найдены эти последние поверхности, то отыскание первых требует квадратуры. Среди частных случаев содержатся геликоиды и спиральные поверхности. Я. П. Бланк

**3323. Точечное взаимнооднозначное соответствие двух поверхностей с заданным свойством соприкасающихся квадрик С. Ли. Малаховский В. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 140

824. **О теореме Дюбурдьё. Арф** (Über den Satz von Dubourdieu. Arf C.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **20**, № 1—2, 112—114 (нем.)

Дается доказательство теоремы, которое предполагает только существование полного дифференциала, в отличие от известных ранее доказательств, предполагающих существование частных производных третьего (по Бляшке — второго) порядка. Л. Я. Березина

825. **Гиперлинии Дарбу на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Прванович** (Hyper-Darboux lines on a surface in three-dimensional Euclidean space. Prvanovitch Mileva), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, № 1, 55—60 (англ.)

Гипер-линии Дарбу определяются, как кривые на поверхности $S$ в $E_3$, касательный вектор к которым вместе с вектором $R_1 n^i + R_2 \frac{dR_1}{dS} b^i$ в каждой точке определяет плоскость, которая содержит касательную к линии заданной конгруэнции $G$, проходящей через эту точку; здесь $n^i$ и $b^i$ суть компоненты единичных векторов главной нормали и бинормали кривой конгруэнции $G$, а $R_1$ и $R_2$ — радиусы кривизны и кручения этой кривой.

Уравнения гипер-линий Дарбу на поверхности $x^i = x^i(u, {}^1u^2)$ имеют вид

$$\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{d^3x^i}{ds^3} \left( l^\beta g_{\beta\gamma} \frac{du^\gamma}{ds} \frac{du^\alpha}{ds} - l^\alpha \right) = L \sum_i X^i \frac{d^3x^i}{ds^3},$$

где $g_{\alpha\beta}$ суть коэффициенты первой квадратичной формы, $l^\alpha$ и $L$ — контравариантные координаты единичного вектора касательной к кривой конгруэнции $G$ относительно базиса, образованного векторами $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ и единичным вектором нормали к поверхности $X^i$.

Если конгруэнция нормальна к поверхности, а также если векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ и $\frac{d^3x^i}{ds^3}$ ортогональны, то уравнения определяют линии Дарбу на поверхности $x^i = x^i)\ u, {}^1u^2)$. коэффициенты в уравнениях гипер-линий Дарбу выражаются через коэффициенты квадратичных форм поверхности и через их частные производные. А. М. Березман

826. **О квадриках Ли конгруэнции $W$. Годо** (Sur les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence $W$. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 10, 1101—1103 (франц.)

Даются уравнения квадрик Ли в произвольной точке первой фокальной поверхности конгруэнции $W$ относительно тетраэдра Картана, присоединенного в соответствующей точке второй фокальной поверхности.

Л. Я. Березина

827. **О четырех последовательностях Лапласа, ассоциированных с конгруэнцией $W$. Годо** (Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence $W$. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 9, 880—885 (франц.)

Пусть $(j)$ — конгруэнция $W$, $(x)$ $(\bar{x})$ — ее фокальные поверхности С конгруэнцией $(j)$ ассоциированы четыре последовательности Лапласа в пространстве $S_5$: $L$ — содержащая изображение на гиперквадрику пространства $S_5$ асимптотических касательных поверхности $(x)$; $L$ — определяемая аналогично для поверхности $(\bar{x})$; $M$ — содержащая точку $J$ — изображения луча $j$; $P$ — последовательность, полярная $M$ относительно гиперквадрики. $M$ вписана в $L$, $\bar{L}$; $P$ описана около них.

Рассматривается случай, когда последовательности $L$, $\bar{L}$ обрываются в точках $U_n$, $\bar{U}_{n+1}$. Тогда они обрываются также в другом направлении в точках $V_{n+2}$, $\bar{V}_{n+3}$. Последовательность $M$ обрывается в точке $J_{n+1} \equiv \equiv \bar{U}_{n+1}$ и в точке $J_{-(n+3)} \equiv V_{n+2}$. Доказывается, что последовательность $P$ обрывается в точке $P_{-(n+1)} \equiv U_n$ и в точке $P_{n+3} \equiv \bar{V}_{n+3}$. Я. П. Бланк

828. **О конгруэнциях, образованных директрисами Вильчинского поверхности. Годо** (Sur les congruences engendrées par les directrices de Wilczynski d'une surface. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 3, 209—218 (франц.)

Пусть $w_1$ — первая директриса Вильчинского, проходящая через точку $x$ поверхности, а $w_2$ — вторая,— расположенная в ее касательной плоскости.

Пусть фокальные плоскости конгруэнции, образованной лучами $w_1$, проходят через фокусы луча $W_2$. Это возможно в двух случаях: 1) когда квадрики Ли поверхности $(x)$ имеют лишь две характеристические точки. Этот случай изучался автором ранее (Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1928, 158—186, 345—348); 2) последовательность Лапласа $L'$, определяемая фокусами прямой $w_2$, вписана в последовательность, $L$, определяемую фокусами прямой $w_1$, в том смысле, что две соседние точки последовательности $L'$ находятся в двух плоскостях, определяемых каждая тремя соседними точками последовательности $L$.

Наконец, если одновременно выполнены условия 1) и 2), прямые $w_1$ проходят через фиксированную точку, а прямые $w_2$ лежат в фиксированной плоскости, причем точка и плоскость служат полюсом и полярной для всех лиевых квадрик поверхности. Я. П. Бланк

829. **О конфигурациях $T$, принадлежащих квадратичному комплексу. Кунле** (Über $T$-Figuren in einem quadratischen Komplex. Kunle Heinz), Math. Z., 1956, **64**, № 3, 270—285 (нем.)

Метод полуинвариантного дифференцирования, развитый в ряде работ Г. Боля, применяется к разысканию таких конфигураций $T$, все 4 конгруэнции которых принадлежат одному и тому же квадратичному комплексу $F$.

В наиболее общем случае комплекс $F$ является невырождающимся комплексом рода 46 (по классификации, данной в Enzykl. der Math Wiss., III, 2C). Конфигурация $T$ определяется тогда с произволом в одну функцию одного переменного и является сопряженной четверкой конгруэнций $R$ (пары противоположных конгруэнций расслояемы, на расслояющих поверхностях фокальным сетям конгруэнции соответствуют сопряженные сети; диагональные конгруэнции также образуют расслояемые пары). Все 4 фокальные поверхности — линейчатые и принадлежат одной и той же линейной конгруэнции. В пространстве прямых они образуют четыре кривых, соответствующие точки которых лежат на одном и том же коническом сечении, а соответствующие касательные сходятся в одной точке, геометрическое место которых есть плоская кривая $\hat{c}$. Следовательно, в пространстве прямых возникает центральное движение в смысле проективной кинематики Барнера. Построив естественным образом репер в пространстве прямых, автор получает простые уравнения квадратичного комплекса и кривой $\hat{c}$ и простые геометрические способы построения искомой конфигурации.

Например, для построения $\infty^1$ конфигураций $T$, принадлежащих квадратичному комплексу, достаточно задать произвольный «направляющий образ», т. е. демиквадрику с двумя пересекающими все образующие

прямыми (они станут директрисами упомянутой линейной конгруэнции) и произвольную плоскую кривую (она станет кривой $\hat{c}$).

Другое решение получается, когда комплекс $F$ распадается на 2 линейных комплекса; в этом случае диагональные конгруэнции конфигурации $T$ также принадлежат комплексу. Наконец, если комплекс $F$ является совокупностью касательных поверхности 2-го порядка $F_2$, то конфигурация определяется уже с произволом в одну функцию двух переменных, причем две фокальные поверхности конфигурации принадлежат $F_2$. Р. Н. Щербаков

**830. Расслояемая пара поверхностей. Лактанова Н. В.,** Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 109—157

Понятие расслояемой пары поверхностей, введенное автором, является обобщением понятия расслояемой пары конгруэнций, данного Фубини.

Две поверхности образуют расслояемую пару, если между касательными плоскостями их установлено взаимно однозначное соответствие так, что существует трехпараметрическая система $S$ конгруэнций $W$, сходственные фокусы которых лежат соответственно в касательных плоскостях первой или второй поверхности. При этом фокусы устанавливают коррелятивное соответствие плоскостей так, что фиксированному фокусу в одной плоскости отвечает целая прямая сходственных ей фокусов в другой плоскости. Расслояемая пара поверхностей существует с произволом одной функции двух аргументов. Если расслояемая пара поверхностей задана, то связанная с ней трехапараметрическая система $S$ конгруэнций $W$ определяется единственным образом. Если задана одна из поверхностей расслояемой пары, то вторая определяется с произволом шести функций одного аргумента. На всех фокальных поверхностях системы конгруэнций $W$ и на расслояемых поверхностях асимптотические линии соответствуют.

Обобщением понятия пары $T$ конгруэнций С. П. Фиников является введенное автором понятие пары $T'$ поверхностей $(A_1)$ и $(A_2)$, для которых конгруэнция прямых $(A_1A_2)$, соединяющих соответствующие точки, и конгруэнция линий пересечения соответствующих касательных плоскостей образуют одностороннюю пару $T$ конгруэнций, т. е. фокусы $A_3$ и $A_4$ конгруэнции $(A_3A_4)$ лежат в фокальных плоскостях конгруэнции $(A_1A_2)$.

Пара $T'$ поверхностей определяется с произволом двух функций двух аргументов. Расслояемая пара поверхностей обязана быть парой $T'$ поверхностей.

Если конгруэнции $(A_1A_2)$ и $(A_3A_4)$ образуют двустороннюю пару $T$, то расслояемая пара поверхностей определяется с произволом восьми функций одного аргумента. Н. Н. Глаголева

**831. Параболические семейства прямых в биаксиальной геометрии. Петканчин** (Parabolische Regelscharen in der zweiachsigen Geometrie. Petkantschin B.), Докл. Болгар. АН, 1955, **8**, № 1,1—4 (нем.; рез. русс.)

Аналогично предыдущей работе о гиперболических семействах прямых (Jahrb. Univ. Sofia, phys.-math. Fak., Bd 48, 1. Buch, S 33—65) автор строит основной дифференциально-геометрический аппарат для параболических однопараметрических систем прямых в биаксиальной геометрии гиперболического типа, абсолютом которой являются две скрещивающиеся действительные прямые.

Примечание референта. Ранее кривые и линейчатые поверхности гиперболического биаксиального пространства были исследованы О. Майером (Mayer O., Ann. sci. Univ. Jassy, 1 Section, XXVII, 1941, 327—410). Г. С. Бархин

**832. Безинтегральное представление некоторых специальных классов комплексов. Кованцов Н. И.,** Матем. сб., 1956, **38**, № 1, 107—128

Отправляясь от проективной классификации комплексов прямых, данной Мантрэ (Mentré, C. r. Acad. Sci., 1922, **175**, 941—943), автор рассматривает комплексы, характеризующиеся тем или иным совпадением инфлексионных центров лучей.

Изучаются комплексы, каждый луч которых имеет: 1) один двойной инфлексионный центр, 2) два двойных инфлексионных центра, 3) трехкратный и четырехкратный инфлексионные центры. В каждом из этих случаев дается геометрическая характеристика и конструкция соответствующего типа комплексов. Так, например, показывается, что произвольный комплекс, имеющий один двойной инфлексионный центр, может быть рассмотрен, как двупараметрическое семейство пучков прямых, совокупностью центров которых является одна фокальная поверхность некоторой произвольной конгруэнции, а плоскости которых касаются второй фокальной поверхности этой конгруэнции. Аналогичные конструкции—«безинтегральные представления», по терминологии автора, — даются и для других рассматриваемых случаев.

Работа выполнена методом подвижного репера. В каждом из рассматриваемых случаев строится каноническое семейство реперов, связанное наиболее тесно с изучаемыми образами, позволяющее дать указанные выше характеристики. М. А. Акивис

**833. Отзыв о работе Ф. Баккеса: Исследования по аналагматической геометрии. Годо, Лепаж** (Rapport sur le mémoire, «Recherches de géométrie anallagmatique» par F. Backes. Godeaux Lucien, Lepage T.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 11, 1222 (франц.)

**834 К. Курс дифференциальной геометрии. 2-е изд. 5-й вып. Часть 2-я. Теория поверхностей (Курс лекций Политехнической школы). Жюлиа** (Cours de l'école polytechnique. Cours de géométrie infinitésimale. 2 éd., 5$^{e}$fasc. Géométrie infinitésimale. 2 part. Théorie des surfaces. Julia Gaston. Paris, Gauthier-Villars, 1955, 147 p., ill., 2400 fr.), Bibliogr. France, 1955, **144**, № 51, 1138 (франц.)

**835 К. Лекции по интегральной геометрии. Бляшке** (Vorlesungen über Integralgeometrie. 3. Aufl. Blaschke Wilhelm. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1955, VIII, 130 S., ill., 13.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 11, 765 (нем.)

**836 К. Элементы теории конгруэнций прямых. Кахан** (Elemente din teoria congruenţelor de drepte. Kahane Arno. Bucureşti, 1956, 148 p., il.), Bul. bibliogr., 1956, **A**, № 5, 168 (рум.)

**837 Д. Поверхности с пересекающимися трехгранниками. Шленев М. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск.-н/Д. ун-т, Ростов-на-Дону, 1956

**838 Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей в пространстве Лобачевского. Рябчикова Н. Я.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1956

**839 Д. Поверхности второго порядка бипланарного пространства. Изотов Г. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем., н., Казанск. ун-т, Казань, 1956

**840 Д. К геометрии векторных полей с семейством нормальных поверхностей. Миллер** (Zur Geometrie flächennormaler Vektorfelder. Miller Walter. Diss. Techn. Hochsch., Wien, 1955, 25 Bl.— Maschinenschr.), Oesterr. Bibliogr., 1956, № 1, 9 (нем.)

## ГЕОМЕТРИЯ $n$-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**841. О сферической симметрии тензора ранга 2. Берте** (Sur la symétrie sphérique d'un tenseur de rang 2. Berthé Guy), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 12, 1313—1314 (франц.)

Новых результатов нет. Ряд элементарных ошибок в формулах. П. К. Рашевский

**842. О частичных продолжениях системы Пфаффа II рода. Хаймович** (Despre prelungirile parţiale ale unui sistem Pfaff de genul II. Haimovici M.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Fil. Iaşi, 1955, Ser. 1, **6**, № 1—2, 91—104 (рум.; рез. русс., франц.)

Имея систему $\theta_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, s$) II рода в переменных $x_1, \ldots, x_n$ с характерами $s_1$, $s_2$, где $s + s_1 + s_2 + 2 = n$, автор рассматривает систему $\theta_\alpha = 0$, $\psi_{\alpha'} = 0$ ($\alpha' = s+1, \ldots, s'$) в переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_{n+1}, \ldots, y_{n'}$ предполагая, что: 1) система $\theta_\alpha = 0$ $\psi_{\alpha'} = 0$ II рода; 2) между интегралами $V_2$ и $V_2'$ этих двух систем имеется такое взаимно однозначное соответствие, при котором интеграл $V_2'$ второй системы содержит соответствующий интеграл $V_2$ исходной системы.

Тогда вторая система является продолжением первой. Получены необходимые и достаточные условия, при которых вторая система является продолжением первой при условии, что переменные $y$ входят в конечном виде. В конце статьи рассматривается продолжение в случае, если вторая система содержит дифференциалы новых переменных $y$. Л. Е. Евтушик

**843. Некоторые вопросы геометрии поля единичных векторов. Мирон** (Cîteva probleme din geometria unui cîmp de vectori unitari. Miron R.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Fil. Iaşi, 1955, Ser. 1, **6**, № 1—2, 173—183 (рум.; рез. русс., франц.)

Автор исходит из работ С. Бюшгенса и Г. Георгиева, посвященных геометрии векторного поля, и пользуется методом подвижного репера и теорией внешних дифференциальных форм. Приведя исходные формулы С. Бюшгенса, автор дополняет его результаты, вычислив для кривой, ортогональной векторам поля ($I_3$), геодезическую кривизну и кручение.

Г. Георгиев перенес на векторное поле понятие параллельного переноса в смысле Леви-Чивита. С этой точки зрения автор дает геометрическое истолкование инвариантов $i_1 = p_1 + q_2$, $i_3 = p_1 q_2 - p_2 q_1$, указанных С. Бюшгенсом. Далее определяются экстремальные значения для геодезического кручения кривой, ортогональной векторам поля и по аналогии с экстремальными нормальными кривизнами вводятся понятия о среднем и полном кручении; рассматриваются их частные значения, дается аналог формулы Бонне. Рассматриваются направления экстремальной нормальной кривизны (вообще отличные от линий кривизны) и используются для построения аналога формулы Эйлера; далее дается выражение для геодезического кручения и нормальной кривизны по направлениям экстремальных геодезических кручений, в частности находится нормальная кривизна для минимальной поверхности. С. С. Бюшгенс

**844. К теории псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей многомерного гиперболического пространства и конгруэнций сфер многомерного конформного пространства. Гейдельман Р. М.,** Матем. сб., 1955, **36**, № 2, 209—232

Работа посвящена теории псевдоконгруэнций и конгруэнций ($n+1$)-мерного гиперболического пространства и конгруэнций сфер $n$-мерного конформного пространства, по терминологии В. В. Вагнера (Матем. сб., 1942, **10**, 165—209) и Б. А. Розенфельда (Матем. сб., 1948, **22**, 457—493).

В первом параграфе рассматривается теория $k$-параметрических псевдоконгруэнций плоскостей в $(n+1)$-мерном гиперболическом пространстве, т. е. в проективном пространстве с абсолютом $Q_n$. Ее важнейшие геометрические характеристики зависят в общем случае от размерности пространства. В дальнейшем автор рассматривает лишь такие типы псевдоконгруэнций, которые имеют геометрическую структуру, одинаковую в пространствах любого числа измерений. Вводится понятие развертывающейся поверхности. Рассматриваются псевдоконгруэнции с одной и с $k$ системами развертывающихся поверхностей. Далее рассматривается задача расслоения псевдоконгруэнции $R$, т. е. псевдоконгруэнции с $k$ системами развертывающихся поверхностей, фокусы которых полярно сопряжены относительно абсолюта $Q_n$.

Отдельный параграф посвящен двупараметрическим семействам прямых в многомерном гиперболическом пространстве и рассмотрению вопроса о соответствии геометрических образов $(n+1)$-мерного гиперболического пространства и $n$-мерного конформного пространства. Под конец автор, основываясь на эквивалентности геометрии гиперболического и конформного пространства, дает конформную теорию важнейших классов конгруэнций $(n-k)$-мерных сфер, существующих при всяких $n$. Д. Г. Лаптева

**845. Квази-лапласовы преобразования $p$-мерных поверхностей $n$-мерного проективного пространства. Базылев В. Т.,** Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 261—322

Рассматриваются $p$-мерные поверхности $n$-мерного проективного пространства, несущие на себе сети сопряженных линий, однако не являющиеся при этом $p$-сопряженными системами в смысле Картана (Cartan, Bull. Soc math. France, 1919, **47**, 125—160). Сети сопряженных линий этих поверхностей не являются голономными.

Преобразования таких поверхностей при помощи фокальных конгруэнций прямых, касательных к одному из семейств сопряженных линий сети, автор называет квази-лапласовыми в отличие от преобразований Лапласа $p$-сопряженных систем, которые были рассмотрены ранее в работах Козьминой (Докл. АН СССР, 1947, **55**, № 3), Чжэня (Chern, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1944, **30**) и Смирнова (Докл. АН СССР, 1950, **71**, № 3). При квази-лапласовом преобразовании поверхность, несущая сопряженную сеть, переводится в поверхность того же типа, но, в отличие от преобразования Лапласа, не все сопряженные направления первой поверхности соответствуют сопряженным направлениям второй поверхности.

Автор в основном ограничивается рассмотрением $p$-мерных поверхностей в $P_n$, имеющих в каждой точке только две линейно независимые асимптотические формы, которые определяют в общем случае единственную сопряженную сеть на поверхности.

Наиболее подробно изучен случай, когда размерность пространства на две единицы больше числа измерений поверхности и, в частности, — случай трехмерной поверхности в $P_5$. Кроме общего случая, здесь рассматриваются также многообразия, пучок асимптотических конусов которых частично вырождается (содержит сдвоенную плоскость). Такое многообразие расслаивается на однопараметрическое семейство двумерных поверхностей, каждая из которых лежит в своем трехмерном пространстве. Изучены все типы квази-лапласовых преобразований поверхностей этого вида.

Далее рассматриваются $p$-мерные поверхности в $P_n$, соприкасающиеся плоскости которых имеют в каждой

точке размерность $p+2$. Такие поверхности имеют две независимые асимптотические формы и несут, вообще говоря, единственную сопряженную сеть. Рассматриваются все возможные геометрические структуры таких поверхностей и их квазилапласовы преобразования.

В качестве примера поверхности, имеющей в каждой точке более двух независимых асимптотических форм, автор рассматривает трехмерную поверхность общего типа в $P_6$. Такая поверхность несет двумерную сопряженную сеть с одним семейством фокальных касательных к линиям сети. Поверхности, несущие сети с двумя фокальными семействами касательных, также существуют, но произвол их существования меньше, чем у предыдущих.

Работа выполнена методом внешних форм и содержит доказательства существования в области аналитических функций всех рассматриваемых многообразий и определение их произвола.

Примечание референта. Трехмерные поверхности в $P_5$, их сопряженные сети и преобразования при помощи фокальных конгруэнций касательных к сопряженным направлениям рассматривались ранее Акивисом (Докл. АН СССР, 1949, 65, № 4, 429—432; Матем. сб., 1950, 27, № 3, 351—378) в связи с изучением пар $T$ комплексов. М. А. Акивис

846. **Изометрическое погружение гиперболического пространства $n$ измерений с конечным расстоянием его точек от одной точки гильбертова пространства.** Блануша (Plongement isométrique de l'espace hyperbolique à $n$ dimensions à distance finie d'un point dans l'espace de Hilbert. Blanuša Danilo), Bull. internat. Acad. yougosl. sci. et beaux-arts, 1954, № 12, 25—30 (франц.)

Дается зависящее от $n$ параметров представление поверхности в гильбертовом пространстве. Элемент дуги этой поверхности имеет указанную Бельтрами форму, характерную для многообразия постоянной отрицательной кривизны. Следует заметить, что найденная таким образом модель $n$-мерной гиперболической геометрии отличается от той, которая была дана в одной из предыдущих работ (РЖМат, 1954, 4159). Доказано, что эта $n$-мерная поверхность не имеет особых точек и все ее точки обладают конечным расстоянием от начала. Топологическую структуру многообразия можно охарактеризовать следующим образом: $(n-1)$-параметрические многообразия, которые получаются при закреплении некоторых параметров, являются $(n-1)$-мерными парасферами со связностью тора. O. Varga

847. **$C^1$-изометричные вложения. I.** Кёйпер (On $C^1$-isometric imbedidoings. I. Kuiper Nicolaas H.), Proc. Koninkl. nederl., akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 545—556; Indagationes math., 1955, 17, № 4, 545—556 (англ.)

Дается развернутое доказательство результата Наша (РЖМат, 1956, 2439) о $C^1$-изометричных вложениях (реализация метрики без самопересечений) в целом $n$-мерных компактных римановых многообразий (замкнутых или с границей) с гладкой метрикой в евклидово пространство $E^N$ $(N \geqslant n+1)$. Именно, если компактное один раз непрерывно дифференцируемое $n$-мерное риманово многообразие (замкнутое или с границей) может быть топологически вложено в $E^N$, то это многообразие может быть также и изометрично вложено в $E^N$ для $N=2n$ возможность топологического вложения всегда осуществима). Локальное применение указанной теоремы дает решение проблемы класса римановой метрики — в классе $C^1$-изометричных реализаций любая риманова метрика размерности $n$ имеет класс, равный единице.

Идея доказательства заключается в следующем. Строится последовательность $f_t(X)$, $t=1,2,\ldots$, таких бесконечно дифференцируемых топологических вложений многообразия $X$ в $E^{n+1}$, что метрики $ds_t^2$, индуцированные на этих вложениях, сходятся к метрике $ds^2$, заданной на $X$. Показывается, что последовательность вложений равномерно сходится к некоторому вложению и касательные гиперплоскости к вложениям также сходятся равномерно. Этим доказывается, что предельное вложение является $C^1$-изометричным вложением многообразия $X$ в $E^{n+1}$. Переход от вложения $f_t(X)$ к вложению $f_{t+1}(X)$ осуществляется посредством конечного числа специальных деформаций — гофрировок (steps) вложения $f_t(X)$. Метрики $ds_t^2$ вложения $f_t(X)$ и $ds_{t+1}^2$ вложения $f_{t+1}(X)$, полученного в результате гофрировок, удовлетворяют неравенствам

$$1-2t^{-1/2} < \frac{ds^2-ds_{t+1}^2}{ds^2-ds_t^2} < 1-t^{-1/2}/2,$$

которые доказывают сходимость метрик $ds_t^2$ к метрике $ds^2$. Для проведения гофрировок многообразие $X$ (а следовательно, и $f_t(X)$) покрывают конечным числом окрестностей, в пределах каждой из которых метрика отличается от евклидовой на заранее данную величину. В каждой окрестности специальным образом выбирается конечное число направлений. Каждому направлению отвечает определенная фактическая гофрировка окрестности, производимая в этом направлении (здесь термин гофрировка в точности соответствует своему смыслу). В результате гофрировки окрестности метрика в ней изменяется на заранее данную величину.

Э. Г. Позняк

848. **$C^1$-изометричные вложения. II.** Кейпер (On $C^1$-isometric imbeddings. II. Kuiper Nicolaas H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 5, 683—689; Indagationes math., 1955, 17, № 5, 683—689 (англ.)

Рассматривается вопрос о $C^1$-изометричных вложениях в целом некомпактных $n$-мерных римановых многообразий $X$ в евклидово пространство $E^N$. Статья является продолжением предыдущей работы автора (реф. 847). Пусть $f(X)$ — топологическое вложение $X$ в $E^N$ и пусть $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ — расходящаяся в смысле метрики, заданной на $X$, последовательность точек на $X$. Если образы $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots f(x_n), \ldots$ сходятся к точке $u$, то $u$ называется предельной точкой вложения. Совокупность предельных точек образует предельное множество вложения $f(X)$. Автор доказывает предложения:

1. Если открытое $n$-мерное риманово многообразие $X$ с бесконечно дифференцируемой метрикой может быть топологически вложено в $E^N$, $N \geqslant n$, таким образом, что вложение не пересекает своего предельного множества (в случае $N=2n+1$ это всегда возможно), то оно может быть вложено $C^1$-изометрично в $E^{N+1}$, причем это вложение также не будет пересекать предельного множества.

2. Гиперболическое пространство $H^n$ (например, гиперболическая плоскость $H^2$) может быть $C^1$-изометрично вложено в $E^{n+1}$, причем вложение является замкнутым множеством (предельное множество пустое).

Э. Г. Позняк

849. **Теория однородных пространств.** Рашевский П. К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 64

**850. О линейных представлениях однородных пространств. Рашевский П. К.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 142

**851. О некоторых симметрических пространствах. Телеман** (Asupra unor spaţii simetrice. Teleman C.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 4, 977—1002 (рум.; рез. русс., франц.)

Изучаются симметрические римановы пространства, допускающие группу движений $G_r$, зависящую от $r = 2p^2 + 5p + 3$ параметров. Доказывается двумя способами (один из которых использует кватернионы), что это пространства, рассмотренные Э. Картаном в Ann. École Norm. super., 1927, 44, 348 и обозначаемые $V^*_{4p}$. Находятся кватернионное и действительное выражение метрики пространства $V^*_{4p}$, уравнения геодезических линий и расстояние между двумя точками.

Г. И. Кручкович

**852. Максимально подвижные римановы пространства $V_4$ непостоянной кривизны. Егоров И. П.,** Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 1, 9—12

Определены все $V_4$, обладающие группой движений $G_8$ при условии $ds^2 > 0$ (группа $G_9$ для $V_4$ невозможна, а $G_{11}$ дает $V_4$ постоянной кривизны). С точностью до подобия существует лишь 2 таких пространства с метрикой

$$ds^2 = \varepsilon \frac{(\varepsilon + \Sigma y^{i^2})(\Sigma dy^{i^2}) - (\Sigma y^i dy^i)^2 - \ldots \rightarrow}{(\varepsilon + \Sigma y^{i^2})^2}$$

$$\ldots \rightarrow \frac{(y^1 dy^2 - y^2 dy^1 + y^3 dy^4 - y^4 dy^3)^2}{(\varepsilon + \Sigma y^{i^2})^2},$$

где все суммы берутся по $i = 1, \ldots, 4$ и $\varepsilon = \pm 1$. Метрика $ds^2$ эйнштейнова. Группа $G_8$ транзитивна, компактна при $\varepsilon = 1$ и некомпактна при $\varepsilon = -1$.

Полученные $V_4$ можно реализовать в пространстве 0-пар (точка + прямая) комплексной проективной плоскости, если выделить в нем подпространства 0-пар, подчиненных условию автополярности относительно эрмитовой квадрики

$$\varepsilon + x^1\bar{x}^1 + x^2\bar{x}^2 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Автор отмечает, что $V_4$ с $G_8$ были пропущены Фубини в его классификации $V_4$ по группам движений (Ann. mat. pura ed appl., 1904, сер. 3, **9**, 33—90).

П. К. Рашевский

**853. Об $n$-мерных римановых пространствах, допускающих группу движений порядка менее $n(n-1)/2$ Вакакува** (On $n$-dimensional Riemannian spaces admitting some groups of motions of order less than $n(n-1)/2$. Wakakuwa Hidekiyo), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 2—3, 121—134 (англ.)

Известно, что распределение порядков групп движений римановых пространств (собственно римановых или псевдоримановых) $V_n$ носит лакунарный характер (Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1949, **64**, № 5). В реферируемой работе рассматриваются собственно римановы пространства $V_n$ ($ds^2 > 0$), допускающие группы движений $G_r$, причем $r \leqslant n(n-1)/2$. Показывается, что римановo $V_n$ ($n \neq 5$) не допускает интранзитивной группы движений $G_r$ порядка $r$, удовлетворяющего неравенствам

$$3 + (n-1)(n-2)/2 < r < n(n-1)/2; \qquad (1)$$

$V_n$ не допускает также транзитивных групп движений указанного порядка (1), если $n > 248 + 1$; выясняется транзитивность групп движений $G_n$ порядка $r = 3 + (n-1)(n-2)/2$ и $r = 2 + (n-1)(n-2)/2$. Далее показывается, следуя рассуждениям Э. Картана: (Cartan E., Leçons our la géométrie des espacco de Ricmann, II-id, Paris,1946; Яно, РЖМат,1953,1379) приводимость риманова пространства $V_n = V_p \times V_{n-p}$, если оно допускает транзитивную группу движений $G_r$ и линейная группа изотропии приводима: $G_{(p)} \times G_{(n-p)}$ ($p \neq 1$, $n-1$), где $G_{(p)}$, $G_{(n-p)}$ суть группы вращений соответственно $p$ и $(n-p)$-мерных евклидовых пространств. Группа движений $G_r$ является прямым произведением транзитивных групп движений $V_p$ и $V_{n-p}$.

В заключение рассматриваются $V_n$, допускающие группу движений $G_r$ порядка $r = n(n-1)/2$ или интранзитивную группу $G_r$ порядков $r = (n-1)(n-2)/2$ и $r = 1 + (n-1)(n-2)/2$ (о существовании второй лакуны (1) и собственно римановых пространствах второй лакунарности см. Егоров И. П., Успехи матем. наук, 1953, 8, вып. 4 (56), 182—183). И. П. Егоров

**854. Тензорные связности для смешанных тензоров 2-й валентности. Коссу** (Connessioni tensoriali per tensori doppi misti. Cossu Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955 (1956), **19**, № 6, 421—427 (итал.)

Вслед за Бомпиани (Bompiani E., Rend. Accad. Lincei, 1946, ser. VIII, 1, fasc. 5), предложившим применять для абсолютного дифференцирования ковариантных и контравариантных тензоров 2-й валентности «тензорные связности» особого рода, автор делает то же для смешанного тензора 2-й валентности. С этой целью строится дифференциально-геометрический объект $E^{is}_{rkt}$ 2-го класса («тензорная связность для $\xi^i_k$»), после чего «тензорный дифференциал» определяется формулой $D\xi^i_k = d\xi^i_k + E^{is}_{rkt}\xi^r_s dx^t$; объект $E^{is}_{rkt}$ подчинен такому закону преобразования, в силу которого $D\xi^i_k$ также есть смешанный тензор 2-й валентности. Обычная линейная связность, определяемая трехиндексным объектом $\Gamma^i_{jk}$ (здесь она называется «векторной», так как применяется для параллельного переноса векторов), порождает специальную тензорную связность типа $E^{is}_{rkt}$, из которой общая получается прибавлением произвольного тензора $Q^{\ldots is}_{rkt\ldots}$. Приведено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данная тензорная связность порождалась некоторой векторной. Сопоставляя тензору $\xi^i_k$ поле линейного оператора, действующего в каждой точке на векторы касательного центроаффинного пространства, можно истолковать $D\xi^i_k = 0$ как условие эквиполентности операторов, соответствующих смежным точкам $x$ и $x + dx$. Альтернирование двукратного тензорного дифференциала $D_2D_1\xi^i_k$ приводит к тензору 6-й валентности (аналог риманова тензора), обращением которого в нуль характеризуется интегрируемая тензорная связность (результат эквиполентного переноса оператора не зависит от пути). Рассматривается также связность для псевдотензоров $\lambda\xi^i_k$ ($\lambda$ — произвольный множитель, функция точки), определяющих в каждой точке преобразование направлений, индуцируемое преобразованием (с помощью $\xi^i_k$) векторов. Опечатка: в формуле (4.5) пропущен множитель $\delta^i_r\delta^s_k$ во втором члене правой части.

Я. С. Дубнов

**855. О связностях в пространствах высших порядков. Иде** (On the connections in higher order spaces. Ide Saburo), Tensor (N. S.), 1954, **3**, 84—90 (англ.)

В. Виртингер ввел перенесение для таких многообразий $X_n$, в каждой точке которых пучку контравариантных векторов $\eta^\alpha$ сопоставлен пучок ковариантных векторов $v_\alpha$, удовлетворяющий условию $\sum \eta^\alpha v_\alpha = 0$. Это перенесение определяется требованием, чтобы для вариации $\delta_\xi$ точки $x^\alpha$ для $\eta^\alpha dv_\alpha$ выполнялись условия преобразования прикосновения. Автор дает прямое обобщение этого перенесения Виртингера для пространств Кавагути линейных элементов высшего порядка. Обобщение состоит в том, что теперь вариация зависит не от точки, а от линейного элемента высшего порядка. Полученное таким путем перенесение видоизменяется затем для случая, когда ранее произвольный вектор $v_\alpha$ зависит от $x^\alpha$ и $\eta^\alpha$. Автор изучает связь с введенными Кавагути перенесениями в некоторых специальных пространствах Кавагути.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 989. O. Varga

**856. О пространствах проективной связности. В р э н ч а н у** (Sur les espaces à connexion projective. V r ă n c e a n u G e o r g e s), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 1, 61—63 (франц.)

Пространство проективной связности $P_n(x^1, \ldots, x^n)$ определяется заданием $n^3 + n^2$ функций $\Gamma^i_{jk}$, $\Gamma^0_{jk}$ от координат $x^1, \ldots, x^n$, которые преобразованием переменных $x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$, $x'^0 = x^0 + \alpha(x^1, \ldots, x^n)$, (1) где $x^0$ — вспомогательная переменная, преобразуется по формулам:

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial \alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r},$$
$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^0_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \frac{\partial \alpha}{\partial x^k}\frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial \alpha}{\partial x^r} - \Gamma^0_{jk}. \quad (2)$$

Каждому пространству $P_n$ можно сопоставить систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} + \Gamma^0_{ik} z = 0 \quad (3)$$

и обратно, так как при всяком преобразовании $z, x^1, \ldots, x^n$: $z' = ze^{-\alpha}$, $x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$ коэффициенты системы (3) преобразуются по формулам (2). Свойства $P_n$ заключаются в системе (3).

Если система (3) вполне интегрируема, то ей сопоставляется некоторое пространство проективной связности. Если $P_n$ дается с помощью множества окрестностей, определяемых системой (3), и $P_n$ — локально евклидово в каждой окрестности, то можно выбрать в такой окрестности систему проективных координат $y^i = z^i / z^0$, $z^1, \ldots, z^n$, $z^0$ — $(n+1)$ независимых интегралов системы (3). Если $V(y^1, \ldots, y^n)$ и $V'(y'^1, \ldots, y'^n)$ — две окрестности, отнесенные к проективным координатам, то в общих точках $V$ и $V'$ имеется проективное соответствие $y^i$ и $y'^i$. Если это соответствие аффинное и $y'^i = y^i$, то $V$ и $V'$ принадлежат к одной и той же евклидовой окрестности $E_n(y^1, \ldots, y^n)$. Имеется возможность найти условия, при которых локально евклидово $P_n$ эквивалентно в целом проективному пространству.

Для случая, в котором $P_n$ — пространство аффинной связности $A_n$ ($\Gamma^0_{jk} = 0$), формулируется теорема: Если $A_n$ локально евклидово и односвязное, то каждой точке из $A_n$ соответствует единственная точка из $E_n$.

Дается классификация пространств аффинной связности.

Если система (3) не является вполне интегрируемой, то в общем случае решения нет. Если система обладает одним решением, то, сделав его постоянным, все $\Gamma^0_{jk} = 0$; в этом случае можно сопоставить пространству $P_n$ пространство аффинной связности $A_n$, коэффициенты связности которого суть $\Gamma^i_{jk}$. Если система (3) обладает независимыми решениями $z^1, \ldots, z^m$ $(m < n)$, то, сделав $z^i = x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$, получается $\Gamma^i_{jk} = 0$ $(i \leqslant m)$ и пространство будет $m-1$ раз проективное (пространство Кагана), которое может быть рассматриваемо как произведение проективного $P_m$ и пространства аффинной связности $A_{n-m}$.

В. С. Люкшин

**857. Некоторые замечания о тензорных связностях. К о с с у** (Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali. C o s s u A l d o), Rend. mat. e applic., 1955, 13, № 3—4, 373—390 (итал.)

Рассмотрены геометрические понятия, относящиеся к тензорной связности, введенной Бомпьяни (Bompiani E., Rend. Accad Lincei, 1946, ser. 8, 1, fasc. 5) для дважды контравариантных или ковариантных тензоров. Объект тензорной связности характеризуется следующим законом преобразования компонент:

$$L^{i'k'}_{r's't'} = L^{ik}_{rst}A^{i'}_i A^{k'}_k A^r_{r'}A^s_{s'}A^t_{t'} - \delta^{i'}_{r'}A^{k'}_{st}A^s_{s'}A^t_{t'} - \delta^{k'}_{s'}A^{i'}_{rt}A^r_{r'}A^t_{t'},$$

где

$$A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad A^{i'}_{rt} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^r dx^t}, \quad \delta^{i'}_{r'} \text{ — символ Кронекера.}$$

Тогда ковариантный дифференциал от тензора $\xi^{ik}$

$$D\xi^{jk} = d\xi^{ik} + L^{ik}_{rst}\xi^{rs}dx^t$$

является тоже тензором.

Если $L^k_{st}$ — объект какой-либо обычной (векторной) аффинной связности, то разность $L^{ik}_{rst} - (\delta^i_r L^k_{st} + \delta^k_s L^i_{rt})$ является некоторым тензором $R^{\ldots it}_{rst\ldots}$. Тензорный ковариантный дифференциал совпадает с ковариантным дифференциалом в некоторой векторной связности тогда и только тогда, когда

$$R^{\ldots ik}_{rst\ldots} = \delta^i_r T^{\ldots k}_{st.} + \delta^k_s T^{\ldots i}_{rt.},$$

где $T^{\ldots k}_{st.}$ — тензор.

Автор получает с помощью контрактирования, исходя из тензорной связности, векторные связности и находит для них внутреннюю характеристику.

Рассматриваются тензорные связности с ковариантным дифференциалом, совпадающим в случае антисимметричного контравариантного (соответственно ковариантного) тензора с ковариантным дифференциалом в некоторой векторной связности. Оказывается, что простой бивектор при тензорном параллельном переносе остается простым лишь для связностей вышеуказанного рода. Найдены изменения связности, при которых параллельное перенесение соответствия, устанавливаемого с помощью тензора $\xi^{ik}$ (заданного с точностью до скалярного множителя) между $(n-1)$-мерным пучком направлений $\eta_k$ и направлением $\xi^i$,

$$\xi^i = \rho\xi^{ik}\eta_k,$$

будет сохраняться (обобщение изменений связности сохраняющих перенесение направлений).

Далее, с помощью тензора $L^{ik}_{[rst]}$, являющегося аналогом тензора кручения, введены понятия сопряженной и ассоциированной тензорных связностей и истолкована геометрическая роль этого тензора. Тензорное параллельное обнесение тензора $\xi^{ik}$ по контуру бесконечно малого параллелограмма приводит к аналогу тензора кривизны, для которого получены обобщенные тождества Бьянки. Б. Л. Лаптев

858. **Метрические пространства $n$ измерений, основанные на понятии площади $m$-мерных поверхностей. Ауссем М. В.** Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 77—94

Рассматриваемая работа является распространением работы Э. Картана «Метрические пространства, основанные на понятии площади» (Париж, 1933) на случай $n$-мерных метрических пространств, зависящих от площади поверхностей, размерность которых меньше, чем $n$—1.

Пространство строится по заданному элементу площади

$$d\sigma = F(x,p)\ [dx^1, \ldots, dx^m],$$

где $x$—координаты точки, а $p$—координаты касательной плоскости $m$-мерной поверхности.

Образующим элементом пространства взят плоский элемент $(x, p)$, к которому присоединяется в качестве локального пространства евклидово пространство $E(x,p)$. Естественные ограничения, накладываемые на связность, позволяют определить ее так, чтобы расстояния между бесконечно близкими элементами сохранялись при отображениях. Л. Е. Евтушик

859. **К геометрическому обоснованию параллельного перенесения в финслеровых пространствах. Лаугвиц** (Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. Laugwitz Detlef), Arch. Math., 1955, **6**, № 6, 448—453 (нем.)

Пусть финслерово пространство задано основной метрической функцией $F(x, dx)$, приводящей к фундаментальному тензору $g_{ij}(x, dx)$. Пусть задана кривая $z^i(s)$, касающаяся векторного поля $\xi^i(x)$, заданного в некотором открытом множестве. Таким образом определяется соприкасающееся вдоль этой кривой риманово пространство с метрикой $g_{ij}(x) = g_{ij}(x; \xi(x))$.

Геометрическое обоснование параллельного перенесения в финслеровом пространстве состоит в том, что с помощью параллелизма Леви-Чивита в соприкасающемся римановом пространстве определяется параллельное перенесение в финслеровом пространстве. Л. Е. Евтушик

860. **Полные пространства с картановой связностью. Кобаяси** (Espaces à connexion de Cartan complets. Kobayashi Shoshichi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 709—710 (франц.)

Рассматривается многообразие $B$, к каждой точке $x$ которого привязано по экземпляру однородного пространства $F_x$ с группой $G$ и стационарной подгруппой $G'$. Размерности $F_x$ и $B$ одинаковы, и каждая точка $x \in B$ с касательным векторным пространством в ней отождествлена с некоторой точкой $\sigma(x) \in F_x$ с касательным векторным пространством в ней. Предполагается установленной картанова связность, которая при переходе из $x \in B$ в бесконечно близкую точку $x' \in B$ отображает $F_x$ на $F_{x'}$ бесконечно малым преобразованием группы $G$. Всю конструкцию можно рассматривать как «волокнистое (расслоенное) пространство» $E$ с базисом $B$ и слоем $F_x$, подчиненное описанным условиям.

Пространство $E$ называется полным, если всякий путь в $F_{x_0}$ (где $x_0 \in B$), исходящий из точки $\sigma(x_0)$, можно рассматривать (в целом) как развертку посредством картановой связности некоторого пути в $B$, исходящего из $x_0$.

Рассмотрим многообразие реперов группы $G$ в $F_x$, привязанных к точке $\sigma(x)$ (т. е. получающихся друг из друга преобразованиями ее стационарной подгруппы $G'$); обозначим через $H'$ совокупность таких реперов для всех $x \in B$. Переход от одного из этих реперов в точке $x$ к бесконечно близкому реперу в точке $x'$ характеризуется — в силу картановой связности — определенным бесконечно малым преобразованием группы $G$ (и обратно).

Теорема. Для полноты $E$ необходимо и достаточно, чтобы в многообразии $H'$ каждое бесконечно малое преобразование группы $G$ порождало одномерную группу преобразований в целом. П. К. Рашевский

861. **О компактных римановых многообразиях с нулевой кривизной Риччи. Уилмор** (On compact Riemannian manifolds with zero Ricci curvature. Willmore T. J.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, **10**, № 3, 131—133 (англ.)

Доказывается теорема: компактное ориентируемое риманово многообразие $M_n$ с положительно определенной метрикой и нулевым тензором Риччи является плоским, если первое число Бетти $R_1$ превосходит $n-4$.

При этом предполагается $n \geqslant 4$; при $n < 4$ результат справедлив уже в локальном смысле и при произвольной сигнатуре метрического тензора. Доказательство опирается на подсчет числа независимых параллельных полей на многообразии и известную лемму Бохнера. В. В. Рыжков

862. **Кривизна и тензорные поля на эрмитовых многообразиях с кручением. Голдберг** (Tensorfields and curvature in Hermitian manifolds with torsion. Goldberg S. I.), Ann. Math., 1956, **63**, № 1, 64—76 (англ.)

Рассматривается эрмитово многообразие $V_{2n}$ с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, \ldots, n, \ \bar{\beta} = \bar{1}, \ldots, \bar{n}$). Относительно кручения метрической связности $S^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\bar{\delta}} \times \left(\frac{\partial g_{\bar{\delta}\beta}}{\partial z^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\bar{\delta}\gamma}}{\partial z^{\beta}}\right)/2$ — вводятся два предположения: 1) $S^{\alpha}_{\beta\alpha} = 0$, 2) $\frac{\partial S^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{z}^{\delta}} = 0$. При последнем условии тензор кривизны этой связности удовлетворяет тем же тождествам, что и тензор кривизны келерова пространства. Автор отмечает, что не известно примеров многообразий, удовлетворяющих этим условиям.

Поле ковариантного вектора $\xi_i$ ($i = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$) называется псевдогармоническим, если $\xi_{i|j} = \xi_{j|i}$, $g^{ij}\xi_{i|j} = 0$, где черта означает ковариантное дифференцирование относительно эрмитовой связности. Псевдогармоническое векторное поле гармонично тогда и только тогда, когда $\xi_{\rho} S^{\rho}_{\alpha\beta} = \xi_{\bar{\rho}} S^{\bar{\rho}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$ и $\xi^{\beta} S^{\alpha}_{\beta\alpha} = \xi^{\bar{\beta}} S^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} = 0$. Доказано при условиях 1) и 2), что вектор с компонентами $(\xi_{\alpha}, 0)$ псевдогармоничен тогда и только тогда, когда $\xi_{\alpha}$ — аналитические функции от $z^{\alpha}$, а вектор с компонентами $(0, \xi_{\bar{\alpha}})$ псевдогармоничен тогда и только тогда, когда $\xi_{\bar{\alpha}}$ — аналитические функции от $\bar{z}^{\alpha}$. Если при условиях

1) и 2) форма $g^{\gamma\bar{\delta}} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \xi^{\alpha}\xi^{\bar{\beta}}$ положительно определена, и многообразие компактно, то не существует псевдогармонических векторных полей с компонентами $(\xi_{\alpha}\xi_{\bar{\alpha}})$. Если многообразие компактно, удовлетворяет условию 1) и комплексно параллелизуемо (РЖМат, 1956, 2061), то существует в точности $n$ линейно независимых псевдогармонических векторных полей.

Сформулирована теорема для псевдогармонических тензоров, обобщающая первую из приведенных выше.

Поле вектора $\xi_i$ называется псевдокиллинговым, если $\xi_{i|j} + \xi_{j|i} = 0$, $g^{ij}\xi_{i|j} = 0$. Условие 1) необходимо и достаточно, чтобы это определение давало киллинговы поля векторов. Сформулированы для псевдокиллинговых векторов и тензоров теоремы, аналогичные теоремам для псевдогармонических векторов и тензоров.

Д. В. Беклемишев

**863. О квазипаракомплексных многообразиях. Либерман** (Sur les variétés presque paracomplexes. Libermann Paulette), Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, № 5, 10 pp. La Bibliothèque Nationale et Universitaire de Srasbourg, 1953 (франц.)

Подробно излагаются анонсированные ранее результаты (C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 2517—2519) и сообщаются некоторые дополнительные факты, как, например, следующий: аффинная связность, соответствующая квазипараэрмитову строению, тогда и только тогда интегрируема, когда ее кривизна и кручение равны нулю.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 744. H. Samelson

**864 К. О проблеме эквивалентности некоторых инфинитезимальных структур. Либерман** (Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. Libermann Paulette. Bologna, Dott. Cesare Zuffi, Editore, 1955, 97 p.) (франц.)

Изучаются инфинитезимальные структуры 1-го порядка в смысле Эресмана (далее они именуются просто структурами) (Ehresmann, C. r. Acad. sci, Paris, 1951, **233**, 598, 777, 1081; там же, 1952, **234**, 587).

Под структурой понимается многообразие $V_n$, в каждой точке $x$ которого задано в центроаффинном касательном пространстве $T_x$ семейство центроаффинных реперов, причем связанные с ними координатные системы переводятся друг в друга преобразованиями какой-либо фиксированной линейной группы $G$, в случае римановой геометрии посредством ортогональной группы. Предполагается, что семейство реперов меняется достаточно гладко при перемещении точки $x$ по $V_n$.

Фактически рассматриваются следующие 7 структур:

1. Почти комплексные структуры в многообразии $V_{2n}$. Они характеризуются заданием в каждом касательном пространстве $T_x$ автоморфизма $I$ такого, что $I^2 = -1$. Берется семейство реперов, в которых $I$ имеет вид $x^s \to -y^s$, $y^s \to x^s$ $(s = 1, \ldots, n)$, где $x^s$, $y^s$ — центроаффинные координаты в данном репере. В комплексных координатах $z^s = x^s + iy^s$ автоморфизм $I$ принимает вид $z^s \to iz^s$, а группа $G$ состоит из всевозможных комплексных линейных преобразований.

2. Почти паракомплексные структуры. Производится аналогичное построение для автоморфизма $J$ со свойством $J^2 = 1$ при условии, что в $T_x$ имеются две взаимно дополнительные $n$-мерные плоскости $X_n$, $X'_n$, причем векторы $\in X_n$ не меняются под действием $J$, а векторы $\in X'_n$ умножаются на $-1$. Берется семейство реперов, в которых $J$ имеет вид $x^s \to y^s$, $y^s \to x^s$. В «паракомплексных» координатах $x^s + jy^s$ $(j^2 = 1)$ $J$ и группа $G$ записываются аналогично случаю 1).

3. Почти кватернионные структуры. Производится аналогичное построение, но на основе двух автоморфизмов $I$ и $J$ в $T_x$, причем требуется $I^2 = J^2 = -1$, $IJ = -JI$. Тогда автоморфизмы $I$, $J$, $K = IJ$ обладают свойствами кватернионных единиц.

4. Почти кватернионные структуры 2-го рода. То же, что в случае 3), но теперь $I^2 = -1$, $J^2 = 1$ (тогда $K^2 = 1$).

5. Почти симплектические структуры. В каждой точке многообразия $V_{2n}$ в касательном пространстве $T_x$ задана косая билинейная форма $\Omega$ ранга $2n$. Группа $G$ симплектическая.

6. Почти эрмитовы структуры. Отличаются от случая 1) тем, что группа $G$ сужается до унитарной группы.

7. Почти параэрмитовы структуры. Аналогичное сужение группы $G$ случая 2) до «параунитарной группы».

Изучается дифференциальная геометрия перечисленных типов структур; в пространствах $V_{2n}$ вводится аффинная связность (для случаев 1), 2), 5) — со значительной неопределенностью, в остальных случаях — инвариантно), тензоры кривизны и кручения и некоторые другие дифференциальные инварианты и коварианты. Рассматриваются также различные частные случаи структур и их формальные признаки.

Вопреки названию работы проблема эквивалентности занимает в ней небольшое место. Дается лишь общая схема исследования (§§ 7, 8), и, кроме того, подробно исследуется случай $V_4$ со структурой почти комплексной и почти кватернионной (§§ 26—28). П. К. Рашевский

**865 К. Аналитическая геометрия. Кары-Ниязов Т. Н.** (Аналитик геометрия. Педагогика институтлари учун. Кайтадан ишланган 3-нчи нашри. Кори-Ниёзий Т. Н.), Тошкент, Укувпедгиз, 1955, 446 бет., 10 с. 50 т. (узб.)

Книга, по замыслу автора, должна пополнить острый недостаток в учебниках аналитической геометрии на узбекском языке и является третьим исправленным и дополненным изданием. Исправления коснулись только немногих мест. Книга содержит много неточностей и прямых ошибок. Нет четкого разграничения между необходимыми и достаточными условиями, нет последовательности изложения. Многие простые факты доказываются ненужно сложно. Спутано понятие скаляра и вектора. Так, на странице 297 напечатано: «диагональ прямоугольного параллелепипеда будет сам вектор $a$». Из определения проекции вектора следует, что проекция всегда положительна. Нет указаний о применении теории кривых второго порядка, в частности нигде не сказано, что планеты движутся по эллипсам, что эллипс — проекция окружности. Спутано правило знаков миноров определителя. Методическое качество учебника плохое, а его теоретический уровень крайне низок.

Н. П. Романов.

**866 Д. О группах голономии римановых многообразий и аффинных многообразий без кручения. Бержe** (Sur des groupes d'holonomies des variétés riemanniennes et des variétés affines sans torsion. Thèse. Berger Marcel. Paris, Gauthier-Villars, 1955, 56 p.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 14, 318 (франц.)

## МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

**867. Избранные проблемы комбинаторной геометрии на плоскости. Хадвигер, Дебруннер** (Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene. Hadwiger H., Debrunner H.), Enseign. math., 1955, 1, № 1—3, 56—89 (нем.)

Статья представляет собой собрание 37 избранных теорем комбинаторной геометрии. В первой части содержатся формулировки этих предложений вместе с комментариями и указаниями источников; во второй части даны краткие доказательства, в основном требующие лишь элементарного аппарата. Приводится часть теорем.

1. Если на прямой, соединяющей любые две точки конечного точечного множества, находится по крайней мере еще одна точка множества, то все точки множества лежат на прямой. 3. Если на окружности, проходящей через любые три точки конечного множества, лежит по крайней мере четвертая его точка, то все множество точек лежит на окружности (теоремы 1 и 3 неверны для бесконечного множества). 4. Если ограниченное замкнутое точечное множество обладает тем свойством, что ось симметрии любых его двух точек является осью симметрии всего множества, то все его точки лежат на окружности. 5. Единственным правильным $n$-угольником, вершинами которого служат точки единичной решетки, является квадрат (стороны его не обязательно лежат на прямых, образующих решетку). 9. Если бесконечное множество точек обладает тем свойством, что любые его две точки находятся на целочисленном расстоянии, то все оно лежит на прямой. 14. Если каждые три овала некоторого множества овалов имеют общую точку, то все овалы множества имеют общую точку. (Для овалов специального типа — параллельно ориентированных прямоугольников и для отрезков на прямой вместо трех достаточно двух прямоугольников, соответственно — отрезков). 23. Если каждые два овала некоторого множества овалов имеют общую точку, то через любую точку плоскости можно провести прямую, пересекающую все овалы множества. 27. Если каждые три овала вполне сепарабельной системы овалов пересекаются прямой, то найдется прямая, пересекающая все овалы системы (система овалов вполне сепарабельна, если плоскость можно разбить на параллельные полосы, содержащие по одному овалу системы; система будет вполне сепарабельна, если из любой точки плоскости не более чем один овал виден под углом $\geqslant \frac{\pi}{3}$). 29. Если каждые три точки ограниченного точечного множества могут быть покрыты кругом радиуса $R$, то и все множество может быть покрыто кругом этого радиуса. 31. Точечное множество диаметра 1 имеет радиус покрытия $\leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$. 36. Во множестве диаметра 1, состоящем из $n$ точек, не более $n$ пар точек могут находиться на расстоянии, равном 1. 37. Если каждые два круга некоторого множества кругов радиуса 1 имеют общую точку, то найдется такой равносторонний треугольник со стороной 1, что каждый из кругов множества будет содержать хотя бы одну из вершин треугольника. А. Г. Школьник

868. **О ячеечном строении октавной проективной плоскости** П. Й о к о т а (On the cell structure of the octanion projective plane. П. Y o k o t a I c h i r o), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1955, A6, № 1, 31—37 (англ.)

Рассматривается проективная плоскость П над октавами («октанионами»), точки которой определяются октавными матрицами 3-го порядка или, за исключением точек одной прямой, парами октав $x$, $y$ (см. стр. 679 и 681 работы книги рецензента РЖМат, 1956, 8247 К). В качестве группы автоморфизмов плоскости П рассматривается компактная группа $F_4$ (являющаяся группой движений неевклидовой геометрии на плоскости П, т. е. по существу рассматривается не проективная, а неевклидова плоскость над октавами). Дается геометрическая интерпретация отображения Гопфа 15-мерной сферы на 8-мерную: первая представляется эрмитовой окружностью $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$, вторая — прямой $y = 1$ (в неевклидовой метрике они соответственно изометричны), отображение производится путем проектирования из точки (0, 0). Показывается, что плоскость П есть $CW$-комплекс в смысле Уайтхеда (Whitehead J. H. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 213—245), причем вся плоскость, ее прямые и точки являются соответственно 16-мерной, 8-мерными и 0-мерными ячейками. Находятся гомологические и когомологические группы с целыми коэффициентами (группы $H_0$ (П), $H^0$ (П), $H_8$ (П), $H^8$ (П), $H_{16}$ (П), $H^{16}$ (П) — бесконечные циклические группы, остальные группы $H_i$ (П) и $H^i$ (П) $= 0$) и гомотопические группы. Показывается, что аналогичное определение точек с помощью матриц и вся излагаемая теория применимы и для проективных (по существу неевклидовых) плоскостей $P$, $M$ и $Q$ над вещественными и комплексными числами и кватернионами. В последних случаях показывается, каким образом движения («автоморфизмы») этих плоскостей выражаются с помощью матриц, однако вопрос об аналогичном представлении движений плоскости П даже не ставится. Б. А. Розенфельд

869. **Об одном новом классе автоморфных функций и одной точечно-решетчатой проблеме в гиперболической плоскости.** I. Х у б е р (Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. I. H u b e r H e i n z), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 1, 20—62 (нем.)

Рассматривается группа Г переносов $T$ в гиперболической плоскости $\mathfrak{H}$ постоянной кривизны — 1. Группа Г предполагается прерывной, т. е. множество $\{T(z)/T \in \Gamma\}$ ни при каком $z$ не имеет точек сгущения. Если $T = P^r$, где $P$ — примитивный элемент Г ($P \neq R^m$, $R \in \Gamma$, если $|m| \neq 1$), то число $\nu(T) = |r|$, не зависящее от выбора примитивного элемента, есть кратность переноса $T$. В гиперболической плоскости рассеяние $\rho(z, Tz)$ зависит от $z$; положительное число $\mu(T) = \inf \rho(z, Tz)$, $z \in \mathfrak{H}$, называется длиной сдвига переноса $T$. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс сопряженных с $T$ элементов группы Г. Кратность и длина сдвига являются общими свойствами всех элементов класса: $\nu(\mathfrak{K}) = \nu(T)$, $\mu(\mathfrak{K}) = \mu(T)$. Ставится задача нахождения асимптотического выражения (при $t \to \infty$) числа $N_{\mathfrak{K}}(z, t)$ точек решетки $T(z)$, лежащих внутри гиперболического круга радиуса $t$ с центром в точке $z$, когда $T$ принимает все значения из $\mathfrak{K}$. Для этой цели вводится в рассмотрение ряд Дирихле:

$$G_{\mathfrak{K}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{K}} [\cos \rho(z, Tz) - 1]^{-s}.$$

$G_{\mathfrak{K}}(z, s)$ при каждом фиксированном $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, является непрерывной функцией от $z$ во всей плоскости $\mathfrak{H}$, обладающей непрерывными частными производными первого и второго порядка по координатам точки $z$, а при любом фиксированном значении $z$ имеет абциссу сходимости $\sigma_k = 1/2$ и при $\sigma > 1/2$ представляет регулярную аналитическую функцию от $s$, которая может быть продолжена на всю $s$-плоскость. Автоморфная относительно Г функция $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$ рассматривается как однозначная на замкнутом многообразии $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ — римановом многообразии постоянной кривизны — 1, получаемом отождествлением точек $\mathfrak{H}$, конгруэнтных относительно Г. Ориентированное, двумерное многообразие $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ предполагается компактным и имеющим топологический род $p$. $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям $\varphi_n(z)$ уравнения

$$\Delta\varphi(z) + \lambda\varphi(z) = 0,$$

в котором $\Delta\varphi(z) = y^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]$; $\Delta$ — дифференциальный оператор Бельтрами второго порядка. В полученном разложении

$$G_{\mathfrak{K}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)\,\varphi_n(\Gamma),\quad F_n(s) = \iint\limits_{\mathfrak{S}\,\mathrm{mod}\,t} G_{\mathfrak{K}}(z,s)\varphi_n(z)\,d\omega$$

для коэффициентов Фурье $F_n(s)$ с помощью функционального уравнения, которому удовлетворяет $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$, находятся явные выражения, позволяющие получить для функции $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$ такое представление, из которого с помощью одной тауберовой теоремы выводится следующее решение поставленной выше задачи о точечной решетке:

$$N_{\mathfrak{K}}(z, t) \sim \frac{1}{4\pi(p-1)}\,\frac{1}{\nu(\mathfrak{K})}\,\frac{\mu(\mathfrak{K})}{\sin\dfrac{\mu(\mathfrak{K})}{2}}\,e^{t/2}.$$

А. Г. Школьник

**870. Структурные теоремы для многообразий-групп.** Барсотти (Structure theorems for group-varieties. Barsotti Iacopo), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **38**, 77—119 (англ.)

Приводится исследование структуры неособенных многообразий в проективном пространстве над алгебраически замкнутым полем $k$, являющихся группами (многообразие-группа: м.-г.), т. е. многообразий, на которых всюду, за исключением некоторого подмногообразия, называемого местом вырождения (например, для векторной группы местом вырождения будет бесконечно удаленное подпространство), определен закон композиции, превращающий многообразие в группу. Обычная терминология и понятия теории групп переносится на м.-г., в частности, на них переносятся три основные теоремы о гомоморфизмах, однако полная аналогия с группами в некоторых случаях нарушается. В случае гомоморфизмов она нарушается существованием так называемых несепарабельных гомоморфизмов и теорема об однозначном соответствии между инвариантными подмногообразиями-группами и гомоморфизмами оказывается справедливой лишь для класса сепарабельных гомоморфизмов.

Ядро работы — исследование структуры коммутативных (квазиабелевых, по терминологии Севери) м.-г. Каждое такое м.-г. оказывается бирационально эквивалентным комбинации абелева м. и своего максимального рационального подмногообразия-группы, связанных между собой особым способом, названным автором скрещенным произведением ($A$ называется скрещенным произведением м.-г. $G$ и $G'$, если существуют 1) сепарабельный гомоморфизм $\alpha$ м.-г. $A$ на $G$, ядро которого изоморфно $G'$ и 2) рациональное отображение $\lambda$ м.-г. $G$ в м.-г. $A$, такое что $\alpha\lambda P = P$ для производящей точки $P \in G$, причем образ единицы $G$ не лежит на месте вырождения $A$). Если назвать векторным м.-г. прямое произведение конечного числа прямых с аддитивным законом композиции, логарифмическим м.-г. — прямое произведение конечного числа прямых с мультипликативным законом композиции и периодическим м.-г.— м.-г., для каждой точки $P$ которого выполняется равенство $P^f = E$ при некотором фиксированном $f$ (наименьшее $f$ называется периодом), то структура рационального м.-г. определяется тем, что оно изоморфно прямому произведению логарифмического и векторного м.-г. при $p = 0$ и логарифмического и периодического м.-г. при $p \neq 0$ ($p$ — характеристика поля $k$). Периодическое м.-г. составлено из векторных м.-г., но более сложным образом, чем прямое произведение: период такого м.-г. равен $p^e$ и если $G_i$ — его подмногообразие, составленное из точек с периодами $\leqslant p^i$ ($i = 1, \ldots, e$), то $G_i$ — м.-г. и $G_i / G_{i-1}$ — векторное м.-г.

В изучении структуры некоммутативных м.-г. важную роль играют многообразия линейных групп, названные автором м. Вессье (Vessiot); если $C$ — центр м.-г. $G$, то существует гомоморфизм $G$ в м. Вессье $B$ с ядром $C$, при этом, если $p = 0$, то даже $B \cong G / C$. Имеет место такой результат: Если $C$ — компонента единицы в центре $G$ и $B$ — максимальное рациональное м.-г. в $G$, то $G$ содержит инвариантное неприводимое м.-г. $H$ такое, что $G / H$ — абелево и существует гомоморфизм $H$ в м. Вессье, ядро которого лежит в центре $G$ и компонентой единицы его является $B$. Автор считает вероятным, что это $H$ будет само м. Вессье.

Следует отметить замечание автора о том, что примененный им при исследовании некоммутативной м.-г. метод тесно связан с методом алгебр Ли, но применение его к случаю ненулевой характеристики поля вызывает появление ряда трудностей, и только часть их удалось преодолеть. В. В. Морозов

**871 К. Определение площади плоских областей при помощи параллелограммных сетей.** Вармус (O obliczaniu pól obszarów płaskich siatkami równoległobocznymi. Warmus Mieczysław), Prace Wrocławsk. towarz. nauk, 1955, Ser. B, № 27, 58 str. (польск.)

В плоскости имеется параллелограммная сеть, площадь очка которой равна 1, а расстояние двух ближайших узлов равно $m$. В плоскости этой сети дана область, площади $a$ и диаметра $b \geqslant m$, внутри которой содержится $w$ узлов сети. Граница области является суммой $q$ непересекающихся замкнутых кривых, среди которых точно $q_0$ ($1 \leqslant q_0 \leqslant q$) имеет диаметр не меньший, чем $m$. Общая длина границы равна $l$. Пусть $\varphi$ — единственный корень уравнения

$$m^2(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - 2\sin^2\varphi = 0,$$

с условием $0 < \varphi \leqslant \pi/2$ и пусть $c = (2\varphi + \sin 2\varphi)^{-1/2}$. Тогда $-cl + q_0 - 2 < a - w \leqslant cl + q - 2$. Величина $c$ достигает минимума для сети ромбов, очко которой состоит из двух равносторонних треугольников. Тогда $\varphi \approx 70°54'$, $c \approx 0{,}569$. Для квадратной сети $\min e$ больше почти на 2,5%.

Равенство $a - w = cl + q - 2$ имеет место для этой сети ромбов, когда, например, область так называемая основная, т. е. односвязна ($q = 1$), состоит из одного очка сети ($w = 0$) и четырех одинаковых круговых сегментов (расположенных вне очка), хорда которых равна стороне очка и радиус равен $c$ (угол, вписанный в дугу сегмента, равен $\varphi$). Тогда площадь соответствующего кругового сектора равна половине площади очка, уменьшенной на площадь равнобедренного треугольника со сторонами $c$ и углом $2\varphi$.

Подробное доказательство, элементарное но не простое, основано на нескольких леммах и более десятка вспомогательных предложений.

Идея доказательства неравенства

$$a - w \leqslant cl + q - 2 \qquad (1)$$

следующая. Данную область автор заменяет соответствующим множеством так называемых элементарных областей. Элементарной называется такая односвязная область (содержащаяся в основной), что ее части, «выступающие» вне очка сети, являются круговыми сегментами радиуса $c$. Если для каждой из этих элементарных областей справедливо неравенство

$$a_i \leqslant cl_i - \alpha_i, \qquad (1')$$

где $\alpha_i$ — постоянное число, независимое ни от площади $a_i$, ни от длины $l_i$ границы $i$-й элементарной области, то для первоначальной области справедливо (1). Автор строит элементарную область, ограниченную исключительно круговыми дугами радиуса $c$, для которой справедливо неравенство вида (1′), затем на основе изопериметрической теоремы доказывает (1′), а отсюда получает (1).

Наглядная идея доказательства неравенства

$$-cl+q_0-2<a-w \qquad (2)$$

следующая. Данную область $A$ автор «погружает» в такую область $Q$, площади $a_q$, длины границы $l_q$, содержащую $w_q$ узлов сети, чтобы было: $a_q-w_q=cl_q+\alpha$, где $\alpha$ — постоянное, независимое от $a_q$, $w_q$ и $l_q$. На основе первой части доказательства, для $q$-связной области $Q-A$ (содержащей не больше чем $w_q-w$ узлов сети) справедливо неравенство $(a-w)-(a_q-w_q)\geqslant cl-cl_q-\bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ — некоторое постоянное. Суммированием таких неравенств, полученных для области $Q$ и $Q-A$, получается (2). Доказывается, что в (2) нельзя поставить знака равенства. S. Drobot

## ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

**872. Некоторые свойства правильного овала. Ли Сэнь-линь** (正則卵形線的一些性質. 李森林), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1956, **2**, № 1, 153—160 (кит.; рез. англ.)

Дается связь между кривизной и углом касательной с хордой дуги регулярного овала. Из этого соотношения можем легко получить результат Джексона (Jackson S. B., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 564—576) и свойство $\Omega$ кривой Граустейна (Graustein W. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **41**, 9—23), а также следующие свойства правильного овала:

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие регулярности дуги овала состоит в существовании окружности касающейся дуги в двух различных точках.

Теорема 2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ — вершины регулярного овала, где $A_1, A_3, \ldots A_{2n-1}$ соответствуют минимумам кривизны, а $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ — максимумам. Тогда углы вписанного многоугольника $A_1, A_2 \ldots A_{2n}$ обладают свойством

$$\angle A_1+\angle A_3+\ldots+\angle A_{2n-1}>\angle A_2+\angle A_4+\ldots+\angle A_{2n}.$$

Теорема 3. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ — вершины регулярного овала, где $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$ соответствуют минимумам кривизны и $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ — максимумам кривизны. Касательные в вершинах образуют $2n$-сторонний многоугольник $B_1 B_2 \ldots B_{2n}$, где $B_i$ — точка пересечения касательных в $A_i$ и $A_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$; $A_{2n+1}=A_1$, и $B_i$ с дугой $A_i \frown A_{i+1}$ находятся по одну и ту же сторону линии $A_i A_{i+1}$. Тогда

$$B_{2n}B_1+B_2B_3+\ldots+B_{2n-2}B_{2n-1}>B_1B_2+B_3B_4+\ldots+B_{2n-1}B_{2n}.$$

Теорема 4. Вершины овала (не круга) не все расположены на одном и том же круге. Резюме автора

**873. О выпуклых кривых. Плейель** (Om konvexa kurvor. Pleijel Arne), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 1—2, 57—63 (швед.)

Пусть $L$ — длина замкнутой выпуклой кривой, $F$ — ограниченная ею площадь, $D$ — наибольшее и $d$ — наименьшее расстояние между параллельными опорными прямыми, $\rho$ — радиус кривизны, который имеет только конечное число точек разрыва и удовлетворяет условиям $r\leqslant\rho\leqslant R$. Доказывается, что при $r=0$ и заданных $L$ и $R$ 1) максимум для $D$, 2) минимум для $d$, 3) минимум для $F$ достигается в случае симметричной линзы. Исходя из этого, просто решаются соответствующие задачи также для $r>0$. Кроме того, доказывается, что

$$L^2-4\pi F\leqslant\pi(4-\pi)(R-r)^2.$$

Постоянная $\pi(4-\pi)$ здесь является точной. Этим усиленно неравенство, известное ранее (Bottema O., Proc. Akad. wetensch. Amsterdam, 1933, **36**, 422—446). Г. К. Энгелис

**874. К теореме о четырех вершинах. Сабан** (Sul teorema dei quattro vertici. Saban Giacomo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1955, **19**, № 5, 251—258 (итал.)

Автор доказывает теорему: Всякая овальная кривая, расположенная на сфере, имеет по крайней мере четыре точки со стационарной соприкасающейся плоскостью. Овальная кривая определяется как жорданова замкнутая линия без кратных точек с непрерывно меняющейся соприкасающейся плоскостью и пересекающаяся каждой прямой, соответственно плоскостью, не более, чем в двух, соответственно четырех, точках. Это более слабый результат по сравнению с теоремой Сегре (Segre B. R. Accad. d'Italia «Mem. Cl Sci fis. mat. e natur 1936, **7**, 365—397), обобщающей на пространственные кривые известную теорему о четырех вершинах плоской овальной кривой и утверждающей наличие точно четырех точек со стационарной соприкасающейся плоскостью на любой овальной линии. Однако автор в отличие от Сегре использует только дифференциально-геометрические построения, избегая топологических методов.

Доказывается также для одного частного класса не сферических кривых наличие по крайней мере четырех точек со стационарной соприкасающейся спиралью (т. е. круговой спиралью, имеющей общие с кривой сопровождающий трехгранник, кривизну и кручение в данной точке). Приводится механическая интерпретация полученных результатов. Г. И. Кручкович

**875. Обращение теоремы Хелли о выпуклых множествах. Дворецкий** (A converse of Helly's theorem on convex sets. Dvoretzky Aryeh), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 3, 345—350 (англ.)

Свойством $\mathcal{H}$ называется следующее свойство семейства множеств из $n$-мерного евклидова пространства $E^n$: Если каждые $n+1$ множеств семейства имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем множествам семейства.

Семейство множеств $K_\alpha$ из $E^n$ имеет свойство $\mathcal{AH}$, если каждое семейство $\{K'_\alpha\}$, где $K'_\alpha=T_\alpha K_\alpha$ есть аффинное преобразование множества $K_\alpha$, имеет свойство $\mathcal{H}$.

Доказывается теорема: Пусть $\{K_\alpha\}$ есть семейство более чем $n+1$ компактных множеств из $E^n$, каждое из которых имеет линейную размерность $n$. Если семейство имеет свойство $\mathcal{AH}$, то все множества $K_\alpha$ выпуклые.

Рассматривается необходимость различных условий теоремы. З. Л. Лейбензон

**876. Замечание к теореме Хелли. Рабин** (A note on Helly's theorem. Rabin Michael), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 3, 363—366 (англ.)

Доказывается известная теорема Хелли о выпуклых телах. Из нее выводится теорема Каратеодори о том, что выпуклая оболочка множества $F$ из $E^n$ есть сумма выпуклых оболочек всех подмножеств множества $F$, содержащих не более $n+1$ точки.

З. Л. Лейбензон

877. **Неравенства между интегралами по сечениям ограниченных точечных множеств. III. Оман** (Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punktmengen. III. Ohmann D.), Math. Ann., 1956, **130**, № 5, 386—393 (нем.)

В двух ранее опубликованных, под тем же названием, работах (РЖМат, 1956, 1656) автор доказал справедливость неравенств:

$$W_p^n \geqslant V_n^p \; W_0^{n-p} \quad (0 < p < n) \qquad (1)$$

и неравенств

$$W_p^{n-r} \geqslant V_n^{p-r} W_r^{n-p} \quad (r < p < n) \quad \text{при } p = n-1 \qquad (2)$$

(относительно обозначений см. упомянутый реферат).

В реферируемой работе доказываются теоремы:
1. Случай равенства в формуле (1) имеет место тогда и только тогда, когда рассматриваемое множество $A$ с точностью до множества нулевой внутренней меры содержится в сфере с такими же как у $A$ $W_0$ и $W_p$.
2. Если неравенства (2) верны при всех значениях $p$, $r = 0,1,\ldots, n-1; p>r$, то всякое неравенство между интегралами по сечениям, справедливое для всех замкнутых множеств, является следствием неравенств (2).

Г. И. Дринфельд

878. **Обзор некоторых результатов по качественным вопросам теории поверхностей. Ефимов Н. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 60

879. **Теорема о поверхностях с замкнутой границей. Сюн Чжуань-чжи** (A theorem on surfaces with a closed boundary. Hsiung Chuan-Chih), Math. Z., 1956, 64, № 1, 41—46 (англ.)

Пусть $S$ и $S^*$ — две ориентируемые поверхности класса $C^3$ в трехмерном евклидовом пространстве $E^3$, гаусова кривизна которых положительна, с замкнутыми границами $C$ и $C^*$. Предположим, что между точками этих поверхностей установлено гемеоморфное соответствие, так что в соответствующих точках $S$ и $S^*$ имеют равные нормальные векторы и одинаковые суммы главных радиусов кривизны, а в соответствующих точках границ $C$ и $C^*$ касательные векторы и линейные элементы равны. Тогда поверхности $S$ и $S^*$ конгруэнтны или симметричны. Эта теорема для замкнутых поверхностей ранее была доказана Кристоффелем. Для доказательства автор получает интегральную формулу, аналогичную формуле Герглотца. Именно, если $b_{\alpha\beta}$ и $b^*_{\alpha\beta}$ — компоненты тензоров второй основной формы для $S$ и $S^*$, а $f$ — дискриминант третьей формы, то имеет место соотношение

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{f}}\left[\left(b_{11}-b^*_{11}\right)\left(b_{22}-b^*_{22}\right)-\left(b_{12}-b^*_{12}\right)^2\right] du^1 du^2 = 0,$$

откуда следует равенство $b_{\alpha\beta} = b^*_{\alpha\beta}$. После этого нетрудно установить равенство метрических тензоров в соответствующих точках $S$ и $S^*$, а следовательно, и справедливость теоремы.

Э. Г. Позняк

880 Д. **Проективное обобщение выпуклости. Шеппи** (A projective generalization of convexity. Schwepe Earl Justin). Doct. diss., Univ. Illinois, 1955. Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 10, 1867 (англ.)

Главная задача диссертации автора — дать чисто проективное определение выпуклости. Автор доказывает несколько теорем, которые позволяют ему обосновать ряд необходимых построений и наметить способ аксиоматического образования квазивыпуклого множества точек.

Автор критически анализирует результаты исследований Кнезера, Моуфанга и Стоуна; эти исследования, в основном относящиеся к плоским конфигурациям и использующие методы координатной геометрии, не позволяют дать проективное определение понятия о выпуклости, которое и дает впервые автор.

В реферируемом резюме диссертации доказательства теорем не приводятся.

М. П. Черняев

---

**См. также:** 7, 8, 25, 26, 31, 32, 35, 36, 38, 45, 112, 115 **К**, 253, 476

## ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

881. **Обобщение метода Штёрмера на дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений высших порядков. Крыжановский С. Е.,** Науч. зап. Мелитопольск. ин-та механиз. и электрифик. с. х., 1955, вып. 2, 183—210

Интегрированием интерполяционной формулы Ньютона автор получает формулы для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений от первого до пятого порядка включительно вида $y^{(m)} = f(x, y)$ с начальными условиями.

Указанный метод (метод Штёрмера) распространяется на системы любого порядка вида $d^n x_i/dt^n = f_i(t, x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Приводятся простые примеры.

Я. И. Алихашкин

882. **Метод трапеций для приближенного решения дифференциальных уравнений. Хаммер, Холлингсуэрт** (Trapezoidal methods of approximating solutions of differential equations. Hammer Preston C., Hollingsworth Jack W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 51 92—96 (англ.)

Авторы дают новую трактовку метода трапеций для численного решения уравнения $y' = f(x, y)$, как приближение решения с помощью квадратической функции. С помощью этой трактовки выводятся две новые формулы численного интегрирования. Первая из них выглядит как $y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(3y'_{1/3} + y'_0)$, где $y_1 = y(x_0 + h)$, $y_{1/3} = y\left(x_0 + \frac{2}{3}h\right)$, $y'_{1/3} = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_{1/3}\right)$, причем для нахождения $y_{1/3}$ решается итерационным методом уравнение $y_{1/3} = y_0 + \frac{h}{3}(y'_{1/3} + y'_0)$. Этот метод дает ошибку порядка $h^4$. Вторая формула имеет вид $y = y_0 + \frac{h}{2}(y'_p + y'_q)$, где $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ (корни полинома Лежандра второго порядка). $y_p$ и $y_q$ находятся при решении итерационным методом следую-

щей системы уравнений:

$$y_p = y_0 + \frac{ph}{2(q-p)}[(2q-p)y'_p - py'_q],$$

$$y_q = y_0 + \frac{qh}{2(p-q)}[(2p-q)y'_q - qy'_p].$$

Ошибка этой формулы порядка $h^5$. Последний метод был апробирован авторами и является, по их мнению, наиболее экономным при применении счетных машин.

Л. М. Голубева

**883. О погрешности при применении разностного метода к одномерным краевым задачам. Фудзита** (On the error of the finite difference method in 1-dimensional boundary value problems. Fujita Hiroshi), J. Phys. Soc. Japan, 1956, **11**, № 2, 160—169 (англ.)

Рассматривается уравнение $-y'' + qy = f$ $(q(x) \geqslant 0)$ с граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$, которое приближенно решается разностным методом (с заменой $y''$ на $\Delta^2 u_{n-1}/h^2$). Получены оценки погрешности разностного метода, в которые не входит решение $y(x)$. Обозначим через $\bar{y}(x)$ решение той же задачи с заменой $f(x)$ на $\bar{f}(x)$, $q(x)$ на $\bar{q}(x)$, где $\bar{f}(x)$ и $\bar{q}(x)$—полигональные аппроксимации $f(x)$ и $q(x)$, совпадающие с $f(x)$ и $q(x)$ в точках $x_k = k/n$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда $R_1 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y(x) - \bar{y}(x)| \leqslant (1 + \check{q})[(\check{q}\|f\| + 8a + (\check{f}/4)]$, где $\check{q} = \int_0^1 |q(x) - \bar{q}(x)|\,dx$, $\check{f} = \int_0^1 |f(x) - \bar{f}(x)|\,dx$, $\|\ \|^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx$, $a = [\pi^2 + \inf^2 q(x)]^{1/2}$. Получена также оценка для $R_2 = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} |\bar{y}(x_k) - u_k|$, где $u_k$ — значение в $k$-ом узле решения разностного аналога краевой задачи: $R_2 \leqslant h^2\left[\frac{1}{12}\|Df\| + \frac{1}{24}\|Dqu\| + \frac{1}{12}\|Dq\|\|Du\| + \frac{1}{4}\|D^2u\|\|q\| + \frac{1}{9}\|q\|^2\|Du\|\right]$, где $\|z\|^2 = h\Sigma_{k=0}^n z_k$ (для $Dz$, $D^2z$ соответственно $\Sigma_{k=0}^{h-1}$, $\Sigma_{k=0}^{n-2}$), $h = 1/n$, $Du_k = \Delta u_k/h$, $D^2u = \Delta^2 u_k/h^2$. Максимальная погрешность решения разностной задачи в узлах $R \leqslant R_1 + R_2$. В частности, если $q'(x)$ кусочно-непрерывна, то $R = O(h)$, а если $q(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $q''(x)$ кусочно-непрерывна, то $R = O(h^2)$. Оценки получены методом функционального анализа.

М. Л. Бродский

**884. К оценке ошибки при численном интегрировании дифференциальных уравнений экстраполяционным методом Адамса. Бахвалов Н. С.,** Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 5, 683—686

Пусть: 1) $y(x)$ — точечное решение уравнения $y' = f(x, y)$ (при начальном условии $y(x_0) = y_0$, а приближенное решение находится при помощи формулы

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + h\Sigma_{\lambda=0}^k v_\lambda f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) + \beta_{m+1}$$

($\beta_{m+1}$ — ошибка округления); 2) $\bar{y}_m(x)$ — точное решение данного уравнения при начальном условии $\bar{y}_m(x_m) = \bar{y}_m$ и $\Delta_m(x) = \bar{y}_m(x) = \bar{y}_{m-1}(x)$; 3) «принципиальная ошибка метода» определяется формулой

$$\rho_{m+1} = \bar{y}_m + h\sum_{\lambda=0}^k v_\lambda f(x_{m-\lambda}, \bar{y}(x_{m-\lambda})) - \bar{y}_m(x_{m+1}).$$

Если в некоторой окрестности точного решения имеем $f'_y(x, y) \leqslant A(x)$, то можно просто оценить величину $\Delta_m(x_n)/\Delta_m(x_m)$, доказать, что $\Delta_m(x_m) - \rho_m - \beta_m \to 0$ при $h \to 0$, и, используя тождество

$$R_n = \bar{y}_n - y(x_n) = \bar{y}_k(x_n) - y(x_n) + \sum_{m=k+1}^n \Delta_m(x_m)[\Delta_m(x_n)/\Delta_m(x_m)],$$

получить оценку

$$|R_n| \leqslant |R_k| \exp\int_{x_k}^{x_n} A(x)\,dx + \sum_{m=k+1}^n |\rho_m + \beta_m + \alpha h| \exp\int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx$$

(для $\alpha$ тоже дается оценка).

Опечатка: в средних частях неравенств (4) пропущен знак $|\ |$.

Г. К. Энгелис

**885. Замечание к методу Рунге-Кутта. Кунцман** (Remarques sur la méthode de Runge-Kutta. Kuntzmann Jean), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 18, 2221—2223 (франц.)

Автор вводит понятие нормального метода ранга $n$ для численного интегрирования дифференциального уравнения $y' = Y(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ и рассматривает с точки зрения этого понятия известные методы численного интегрирования (метод касательной, Эйлера, Рунге—Кутта). Доказательства отсутствуют.

Н. А. Ронзина

**886. Об ошибках в решениях (дифференциальных уравнений), допускаемых дифференциальным анализатором. Ватанабэ** (微分解析機による解の誤差について. 渡. 邊勝), 生產研究, Сэйсан кэнкю, 1956, **8**, № 5, 17 (япон.)

Рассматривается поведение погрешностей при решении системы уравнений $y'_k = f_k(y_1, \ldots, y_n, x)$ $k = 1, 2, \ldots, n$, на дифференциальном анализаторе. Пусть $\varepsilon_k = \bar{y}_k - y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\bar{y}_k$ — приближенное решение. В окрестности $x$ $\varepsilon_k$ удовлетворяют $\varepsilon'_k = \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\varepsilon_1 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial y_n}\varepsilon_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Если $\varepsilon_k = a_k e^{\lambda x}$, то уравнение для $\lambda$ имеет вид: $\left|\lambda E - \left\|\frac{\partial f_k}{\partial y_j}\right\|\right| = 0$, где $E$ — единичная матрица. Погрешности увеличиваются, уменьшаются или не меняются в зависимости от того, положительны, отрицательны или равны нулю действительные части корней уравнения для $\lambda$.

Юань Чжао-дин

**887. Об одном способе вычисления собственных значений краевых задач для дифференциальных уравнений порядка $2n$. Рома** (Su un procedimento per il calcolo degli autovalori di problemi al contorno per equazioni differenziali di ordine $2n$. Roma Maria Sofia), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 365—369 (итал.)

Пусть $D_q$ — область, полученная из $D$ (в плоскости $x, y$) преобразованием $\xi = x$, $\eta = qy$ $(0 < q < 1)$.

Рассматривается в $D_q$ задача о собственных значениях

$$E(u) - (-1)^n \lambda u = 0. \quad (1)$$

при условиях

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\ i = 0, 1, \ldots, k), \quad (2)$$

где $E(u) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^k \partial y^{2n-k}}$, $a_k = \sum_{i+j=k} a_{ij}$, $\sum_{i,j} a_{ij}\rho_i\rho_j$ — положительно определенная форма.

Теорема. Пусть $\rho$ — положительная константа,

$$[\nu_q(u)]^2 = \frac{\iint_{(D_q)} [E(u)]^2\,dxdy}{\iint_{(D_q)} u^2 dxdy};$$

$$\mu_q(u) = \frac{\iint_{(D_q)} uE(u)\,dxdy}{\iint_{(D_q)} u^2 dxdy}.$$

Если $\lambda_n(q) \leqslant \mu_q(u) + \rho \leqslant \lambda_{n+1}(q)$, где $\lambda_n(q)$ — собственные числа задачи (1), (2) для области $D_q$, то

$$\lambda_n(q) \geqslant \mu_q(u) - \frac{(\nu_q(u))^2 - (\mu_q(u))^2}{\rho}.$$

Если известен спектр для области $D_1$ $(q=1)$, то эта теорема может быть использована для приближенного определения собственных значений для $D_q$. Приводится пример. В. П. Ильин

888. **Численное решение одномерной задачи теплопроводности в случаях, когда коэффициент теплопроводности есть функция температуры и расстояния. Нисимура** (A numerical solution of one-dimensional heat conduction problems, thermal conductivity being function of temperature and situation. Nishimura Toru), Mem. Fac. Engng Nagoya Univ., 1954, 6, № 1, 30—35 (англ.)

Предлагаются обобщенные конечноразностные схемы для уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Погрешность аппроксимации производных оценивается. Приведены числовые примеры. Л. М. Голубева

889. **О разностном методе для одновременной оценки сверху и снизу жесткости и емкости. Херш, Пфлугер, Шопф** (Über ein simultanes Differenzenverfahren zur Abschätzung der Torsionssteifigkeit und der Kapazität nach beiden Seiten. Hersch Joseph, Pfluger Albert, Schopf Andreas), Z. angew. Math. und Phys., 1956, 7, № 2, 89—113 (нем.; рез. англ.)

Жесткость тела цилиндрической формы (по отношению к кручению), как известно, определяется величиной $P = 2\iint_Q u\,dxdy$, где $Q$ — прямое сечение цилиндра, $u(x,y)$ — решение уравнения $\Delta u = -2$ (1) при граничном условии $u\big|_\Gamma = 0$. (2). $\Gamma$ — граница $Q$. Известны экстремальные свойства функции $u$ (вариационные принципы Дирихле и Томсона), которые дают возможность, имея любую функцию, удовлетворяющую только условию (2) (или только условию (1)), получить оценку для $P$ снизу $P^-$ (соответственно оценку сверху $P^+$). В качестве таких «пробных» функций берутся кусочно-билинейные непрерывные функции, определяющиеся значениями в узлах некоторой сетки, причем эти значения выгодно подбирать таким образом, чтобы $P^-$ была максимальна (соответственно $P^+$ минимальна). Это приводит к системам линейных алгебраических уравнений, представляющим собой разностный аналог первоначальной задачи, но позволяющим не только приблизиться к величине $P$, но и оценить ее сверху и снизу. Метод для $P^-$ был указан Пойа (Pólya G., C. r. Acad. Sci, 1952, 235, 995—997), авторами введены метод для $P^+$ и единый метод для получения одновременно оценок сверху и снизу. При $h \to 0$ ($h$—шаг квадратной сетки) оценки сверху и снизу стремятся к $P$; определяется порядок сходимости. Аналогично решается трехмерная задача о емкости конденсатора произвольной формы. М. Л. Бродский.

890. **Численное решение задач теории потенциала при помощи ортонормированных функций. Дейвис, Рабинович** (Numerical experiments in potential theory using orthonormal functions. Davis P., Rabinowitz P.), J. Wash. Acad. Sci., 1956, 46, № 1, 12—17 (англ.)

Излагается применительно к использованию быстродействующей электронной вычислительной машины процесс вычисления системы ортонормированных на границе полиномов (метод ортогонализации Шмидта) для «бобовидной» области и квадрата, а также решение задачи Дирихле для «бобовидной» области методом ортонормированных функций. Счет с точностью до двух десятичных знаков требует двух часов рабочего времени машины СЕАК. При этом используется около 15 аппроксимирующих функций, каждая из которых определяется ее значениями почти в 50 точках. Н. А. Гречина

891. **Метод сеток в применении к одной задаче об устойчивости кольцевых пластинок. Фельдман А. А.** В сб.: Исследования по вопр. устойчивости и прочности, Киев, АН УССР, 1956, 128—140

892. **Некоторые приближенные методы решения уравнений переноса излучения в атмосферу. Фейгельсон Е. М., Малкевич М. С., Коган С. Я.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 164

893. **Видоизменение метода Галеркина для решения нелинейной задачи о хлопке искривленной пластины. Свирский И. В.,** Инженерный сб., 1955, 22, 42—47

Приведены общие соображения об определении методом Галеркина критических нагрузок хлопка оболочки без построения полной характеристики упругого элемента. Высказаны предложения по подбору наилучших аппроксимирующих функций при одном и нескольких произвольных параметрах. Примеры не приводятся. В. И. Феодосьев.

894. **О методе Пиконе для вычисления собственных значений и собственных решений. Фикера** (Su un metodo del Picone per il calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni. Fichera Gaetano), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 239—259 (итал.)

Проводится исследование метода Пиконе для определения собственных значений и собственных решений линейных неэрмитовых операторов.

Пусть $S$ — полное комплексное гильбертово пространство, $E(u)$ — линейный оператор, переводящий линейное множество $U \subset S$ на $S$. Рассматривается задача о собственных значениях

$$E(u) - \lambda u = \omega \qquad (\omega \text{ — нулевой элемент } S). \qquad (1)$$

Пусть $\{u_n\}$ — полная в $U$ линейно независимая система. Для каждого фиксированного комплексного $\lambda$ рассматривается минимум $\mu_n(\lambda)$ относительно $c_1, c_2, \ldots c_n$ величины

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_n, \lambda) = \frac{\left\| \sum_{k=1}^n c\ [E(u_k) - \lambda u_k] \right\|^2}{\left\| \sum_{k-1}^n c_k u_k \right\|^2}.$$

Пусть $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{m_n}^{(n)}$ — точки минимума $\mu_n(\lambda)$; они считаются приближениями стольких же собственных чисел задачи (1), а $u_{\lambda_1^{(n)}}^{(n)}, u_{\lambda_2^{(n)}}^{(n)}, \ldots, u_{\lambda_{m_n}^{(n)}}^{(n)}$, где $u_{\lambda_i^{(n)}}^{(n)} =$

$= \sum_{k=1}^{n} c_k (\lambda_i^{(n)}) u_k$,— приближениями соответствующих собственных решений.

Относительно $E$ предполагается: 1) существует обратный оператор $T = E^{-1}$ и $T$ является вполне непрерывным в $S$; 2) существуют собственные значения и собственные решения уравнения $T(u) - \sigma u = \omega$.

Пусть $\Lambda$ — множество собственных значений для (1); $\Lambda^{(n)}$ — множество всех $\lambda_k^{(n)}$; $C_\rho$ — круг с центром в $\omega$ радиуса $\rho$;

$$g(u, \lambda) = E^* E(u) - \lambda E^*(u) - \bar{\lambda} E(u) + |\lambda|^2 u,$$

$$\varepsilon_n(\rho) = \operatorname{estr} \cdot \sup_{\lambda \subset C_\rho} \left\{ \frac{\| G(u_\lambda^{(n)}, \lambda) \|^2}{\| u_\lambda^{(n)} \|^2} - \mu_n^2(\lambda) \right\},$$

$E^*$ — сопряженное $E$; $L_\rho^{(n)}$ — множество всех $\lambda$ из $\Lambda^{(n)} C_\rho$, удовлетворяющих условию $\mu_n(\lambda) \leqslant \sqrt{\varepsilon_n(\rho)}$. Имеют место теоремы: 1) Если $\lambda \subset \Lambda$, то существует последовательность $\{\lambda^{(n)}\}$, $\lambda^{(n)} \subset \Lambda^{(n)}$, такая, что $\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = \lambda$. Множество соответствующих элементов $\{u_{\lambda^{(n)}}^{(n)}\}$ является компактным и каждая его предельная точка есть собственное решение задачи (1), соответствующее $\lambda$. 2) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0$, что для $n > n_0$ множество $\Lambda \cdot C_\rho$ содержится в $\varepsilon$-окрестности множества $L_\rho^{(n)}$, и наоборот. В. П. Ильин

**895. Сходимость алгебраического интерполирования в классах дифференцируемых функций. Крылов В. И.,** Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 2, 214—217

Пусть: 1) $[a, b]$ — замкнутый конечный интервал, 2) $x_k^{(n)}$ $(k = 1, \ldots; n; n = 1, 2, \ldots)$ — бесконечная треугольная матрица вещественных чисел, $a \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant b$ при $n = 1, 2, \ldots$, 3) для всякой функции $f$, конечной на $[a, b]$, $L_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k}(x) \times f(x_k^{(n)})$ означает алгебраический полином порядка $\leqslant n-1$, совпадающий с $f$ в точках $x_k^{(n)}$, 4) при $r = 0, 1, 2, \ldots$ символы $C_r$, $A_r$, $V_r$ означают множества функций, для которых $r$-я производная соответственно непрерывна, абсолютно непрерывна и ограниченной вариации на $[a, b]$. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы соотношение

$$\lim_{n\to\infty} L_{n-1}(f, x) = f(x) \qquad (1)$$

выполнялось для всех функций соответственно из $C_r$ $(r \geqslant 1)$, $A_r$ $(r \geqslant 0)$, $V_r$ $(r \geqslant 1)$: а) в фиксированной точке $x \in [a, b]$, б) равномерно относительно $x \in [a, b]$. Эти условия выражаются через «фундаментальные полиномы» $\omega_{n,k}(x)$. В частности, для того чтобы (1) выполнялось равномерно при $x \in [a, b]$ для всякой функции $f$, абсолютно непрерывной на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\left| \sum_{\nu=1}^{k} \omega_{n,\nu}(x) \right| \leqslant N$, где $N$ не зависит от $n$, $k$, $x$. Автор указывает без доказательства, что существуют матрицы $x_k^{(n)}$, удовлетворяющие этому условию.

Примечание референта. В другой работе, которая еще не напечатана, автор доказывает, что такой матрицей является, например, матрица узлов Чебышева: $x_k^{(n)} = \cos\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$. С. М. Лозинский

**896. Сходимость механических квадратур в классах функций различного порядка дифференцируемости. Крылов В. И.,** Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 5, 801—802

Пусть: 1) $[a, b]$, $x_k^{(n)}$, $C_r$ имеют те же значения, что и в реф. 895, 2) $A_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ — бесконечная треугольная матрица вещественных чисел, $p(x)$ — неотрицательная, измеримая и не эквивалентная нулю функция на $[a, b]$. Известны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p f dx \qquad (1)$$

для всех $f \in C_0$. Полагаем $E(x) = (1 + \operatorname{sgn} x)/2$. Тогда для того чтобы (1) выполнялось для всех $f \in C_r$ $(r \geqslant 1)$ необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий: 1) (1) верно для любого полинома; 2) полные вариации на $[a, b]$ функций

$$F_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)}) (x - x_k^{(n)})^r / r!$$

ограничены в совокупности.

Примечание референта. Неотрицательность и неэквивалентность нулю функции $p(x)$ не используются в доказательстве. С. М. Лозинский

**897. Формулы механических кубатур с минимальным числом членов. Георгиев** (Формули за механична кубатура с минимален брой членове. Георгиев Георги Ив.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954, **1**, ч. 1, 65—142 (болг.; рез. русс., франц.)

Изучаются формулы кубатур вида

$$\iint_R P(x, y)\, dxdy \approx \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P(x_i, y_i), \qquad (1)$$

верные для всех многочленов первой, второй и (для областей, имеющих центр симметрии) третьей степени и имеющие наименьшее возможное число $N$ слагаемых

Пусть

$$J_{kl} = \iint_R x^k y^l dx\, dy,\ F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) =$$

$$= -\Delta^{-1} \begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ \zeta & J_{00} & J_{10} & J_{01} \\ \xi & J_{10} & J_{20} & J_{11} \\ \eta & J_{01} & J_{11} & J_{02} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} J_{00} & J_{10} & J_{01} \\ J_{10} & J_{20} & J_{11} \\ J_{01} & J_{11} & J_{02} \end{vmatrix}.$$

Доказываются теоремы:

1. Существует единственная формула $\iint_R P(x, y) dx\, dy = \lambda_0 P(x_0, y_0)$, верная для всевозможных многочленов первой степени $P(x, y) = ax + by + c$, причем $\lambda_0 = J_{00}$, $x_0 = J_{10}/J_{00}$, $y_0 = J_{01}/J_{00}$.

2. Формулы (1), верные для всевозможных многочленов второй степени,— трехчленные. Существует бесконечное множество формул такого вида. Числа $x_i$, $y_i$ в них должны удовлетворять системе трех уравнений

$$F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1) = 0 \quad (k < r;\ k, r = 1, 2, 3)$$

и коэффициенты $\lambda_i$ должны иметь значения $\lambda_i = 1/F(x_i, y_i, 1, x_i, y_i, 1)$ $(i = 1, 2, 3)$. Частный случай формул с равными коэффициентами указан в РЖМат, 1953, 1411.

3. Пусть область $R$ симметрична относительно начала координат. Формулы (1), верные для всяких многочленов третьей степени,— четырехчленные. Числа $x_i$, $y_i$ в них таковы, что точки $M_i(x_i, y_i)$ являются вершинами параллелограмма, описанного около эллипса

$f(x, y, 1; x, y, 1) = 1$, коэффициенты же $\lambda_i$ определяются равенствами $\lambda_i = {}^1/_2 f(x_i^*, y_i; x_i, y_i)$. Здесь

$$f(x, y; \xi, \eta) = -\frac{J_{00}}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ \xi & J_{20} & J_{11} \\ \eta & J_{11} & J_{02} \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} J_{20} & J_{11} \\ J_{11} & J_{02} \end{vmatrix}.$$

Сходные теоремы доказаны для тройных интегралов.

В. И. Крылов

**98. Интерполяция с кратными узлами в комплексной плоскости. Солзер** (Osculatory interpolation in the complex plane. Salzer Herbert E.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1955, 54, № 5, 263—266 (англ.)

Показана возможность применения интерполяционной формулы Эрмита для интерполяции в комплексной плоскости. Для функции $f(z)$, где $z = z_0 + Ph$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $P = p + iq$, $h$ — шаг по $x$ и $y$, $z_k = z_0 + kh$, формула Эрмита записывается в виде $f(z) \sim \sum_k (\alpha_k f_k + h\beta_k f_k')/\sum_k \alpha_k$. Здесь $f_k = f(z_k)$, $f_k' = f'(z_k)$, $\alpha_k = a_k/(P-k)^2 + b_k/(P-k)$, $\beta_k = a_k/(P-k)$.

Расположение точек $z_k$ на плоскости $z$ дано для чисел их от 2 до 7 и приведена таблица значений коэффициентов $a_k$ и $b_k$. Указывается, что приведенная интерполяционная формула является особенно удобной в тех случаях, когда таблица содержит, наряду со значениями функции, и значения ее первой производной или когда значения производной легко вычисляются.

К. А. Карпов

**99. Аппроксимация функций одной и многих независимых переменных. Коллац** (Approximation von Funktionen bei einer und bei mehreren unabhängigen Veränderlichen. Collatz L.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 5—6, 198—211 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Ставится задача Чебышева: аппроксимировать функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, или коротко $g(x_j)$, линейной комбинацией $Q = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu u_\nu$ линейно независимых функций $u_1(x_j), u_2(x_j), \ldots, u_p(x_j)$ в заданной области $B$ так, чтобы максимум отклонения $\varepsilon = Q - g$ был по возможности мал. Минимум максимального $|\varepsilon|$ обозначается $\rho$. Автор изучает вопросы существования и единственности решения, доставляющего минимум, а также оценки $\rho$. При некоторых предположениях доказывается теорема существования и единственности в случае двух переменных $g(x, y)$ и даются оценки $\rho$ в случае функции многих переменных $g(x_j)$. Применение метода к решению дифференциальных уравнений в статье ограничивается двумя простыми примерами: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ и $\Delta u = -1$ с обычными для таких уравнений условиями.

Я. И. Алихашкин

**100. Метод Сурио-Фрейма определения характеристического уравнения на цифровых вычислительных машинах. Форсайт, Страус** (The Souriau-Frame characteristic equation algorithm on a digital computer. Forsythe George E., Straus Louise W.), J. Math. and Phys., 1955, 34, № 3, 152—156 (англ.)

Сообщаются результаты экспериментальной проверки метода Сурио-Фрейма (метод Д. К. Фаддеева, см. В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, 1950) для вычисления собственных значений матрицы на примерах плохо обусловленных матриц (в смысле решения системы линейных уравнений). Автор сообщает о росте ошибок округления при определении коэффициентов характеристического полинома, в результате чего будто бы получается неудовлетворительная точность в определении собственных значений. Ставится вопрос, является ли это обстоятельство специфичным для указанного метода или оно сопровождает любой метод, требующий предварительного определения характеристического полинома матрицы.

По мнению референта, упомянутое явление обнаруживается не менее сильно при применении ряда других методов (Крылова, Динилевского и др.). Вряд ли оно связано с плохой обусловленностью матрицы. Возможные же погрешности в коэффициентах характеристического полинома коррелированы так, что это не приводит к потере точности при определении собственных значений.

В. Н. Фаддеева

**901. Определение собственных векторов некоторых матриц со слабыми определителями. Пельтье** (Détermination de vecteurs propres de certaines matrices à déterminant faible. Peltier Jean), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 23, 2201—2203 (франц.)

Предлагается метод уточнения собственных векторов матрицы, диагональные элементы которой преобладают над недиагональными и заключены в довольно узком интервале (например, 0,5 и 1,5).

К решению системы

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^j x_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $A_i^j = a_i^j + \delta_i^j \lambda$, $\delta_i^j$ — символ Кронекера, применяется обобщенный метод Ньютона, который сводится к решению линейной системы для поправок:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i^j h_i + y_i \mu + R_j = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i h_i = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $y_i$ — нормированное решение (1) при $\lambda = \lambda_0$. За начальное приближение принимается грубое значение $\lambda_0$ и $y_i$.

Для решения системы (2) автор рекомендует применять метод Куффиньяля (Couffignal M., Rev. sci., 1944, 82, 67—78). Утверждается, что предлагаемый метод позволяет уточнить 2, иногда 3 знака в собственных векторах.

В. Н. Кублановская

**902. Об оценке одного определителя и о некоторых неравенствах, связанных с итерционными процессами Зейделя. Гофман Ш. М.,** Тр. Ташкентск. ин-та ж.-д. трансп., 1956, вып. 5, 178—186

Доказывается теорема: Для определителя $A = |a_{ij}|\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$, элементы которого принадлежат симметрической матрице положительно определенной формы, справедлива оценка $|A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. Полученное неравенство обобщается $|A| \leqslant \prod_{j=1}^{r} |A_{jj}|$, где $A_{jj}$ — соответствующие клетки матрицы, любым образом сконструированной из первоначальной матрицы. На основании этих неравенств устанавливаются неравенства, связанные с итерационными процессами Зейделя.

Я. И. Алихашкин

**903. Заметка об определении характеристических корней методом итераций. Бреннер, Рейтуиснер** (Remark on determination of characteristic roots by iteration. Brenner J. L., Reitwiesner G. W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 51, 117—118 (англ.)

Дается пример симметричной матрицы 4-го порядка, характеристические корни и векторы которой были

определены путем итерационного ортогонального преобразования; при этом погрешность не превосходит единицы седьмого десятичного знака. Н. А. Гречина

**904. Вычислительные методы линейной алгебры.** Фаддеева В. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 77

**905. О потере точности при решении систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных.** Гордеев А. В., Ларченко Е. Г., Сб. статей по геодезии, 1955, вып. 9, 109—116

Если при решении системы нормальных уравнений не допускается никаких других погрешностей, кроме погрешности округления, то средняя квадратичная ошибка последнего неизвестного $x_n$ при условии, что средние квадратичные ошибки $m_a$ коэффициентов начальной системы нормальных уравнений приняты одинаковыми, может быть представлена в виде: $m_{x_n} = m_a k\sqrt{n}/a$, где $k$ — переменная величина, зависящая от соотношения неквадратичных и квадратичных коэффициентов, от величины и знака свободного члена, от знаков неквадратичных коэффициентов. Составлена таблица значений $k$, вычисленных при определенных условиях от $n=4$ до $n=18$. На примерах из различных источников показано, что округление коэффициентов преобразованной и элиминационной систем сильно уменьшает число верных значащих цифр в результате. На основе исследований предельная ошибка последнего неизвестного выражена через предельную ошибку коэффициентов преобразованной системы $(\Delta c_{nn})_{np}$ равенством $(\Delta x_n)_{np} = 1 + |x_n|(\Delta c_{nn})_{np}/p_{x_n}$, где $p_{x_n}$ — вес неизвестного. Причем $(\Delta c_{nn})_{np}$ возрастает при больших коэффициентах элиминационной системы. В этом и других случаях указано, сколько дополнительных десятичных знаков нужно брать при вычислении коэффициентов преобразованной системы, чтобы получить неизвестные с определенным числом верных десятичных знаков. М. А. Дмитриева

**906. К вопросу обработки результатов посредственных измерений.** Орел Н. Н., Сб. науч. тр. Кафедры маркшейдерск. дела и геод. Донецк. индустр. ин-та, 1956, вып. 4, 15—25

Система нормальных уравнений записывается в матричной форме и решается известным методом квадратных корней. Составлено три таблицы для практического применения метода. Приведен числовой пример. М. А. Дмитриева

**907. Исследования по численному решению уравнений 3-й, 4-й и 5-й степеней.** Кальво-Карбонель (Estudios sobre la resolución numérica de ecuaciones de 3°., 4°. y 5°. grado. Calvo Carbonell Carlos), Gas. mat., 1955, 7, № 5—6, 109—124 (исп.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1956, 7667, 7668). В качестве применения полученных в предыдущих частях результатов предлагается решить уравнение четвертой степени $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$, находя корни кубической резольвенты этого уравнения (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. 1, ГИТТЛ, 1947, 230—232) при помощи таблиц, составленных автором для решения уравнений 3-й степени.

Описывается также способ составления таблиц для численного решения уравнений 4-й и 5-й степеней, аналогичный способу, изложенному раньше автором для уравнений 3-й степени. Э. Каписио

**908. Практический способ решения уравнений 4-й степени, имеющих только комплексные корни.** Людвиг (Ein praktisches Verfahren zur Lösung biquadratischer Gleichungen mit nur komplexen Wurzeln. Ludwig Rudolf), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 11, 401—405 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Для того чтобы найти комплексные корни $z = x + iy$ алгебраического уравнения $f(z) = 0$, очевидно, достаточно найти действительные корни системы $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, где $u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy)$. Все искомые $x$ будут находиться среди действительных корней результанта $R(x)$ многочленов $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Для случая, когда $f(z)$ — многочлен 4-й степени с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней, автор дает удобную вычислительную схему: $R(x) = A_0A_3^2 + A_1^2A_4 - A_1A_2A_3$, где $A_i = f^{(i)}(x)/i!$ легко находятся по схеме Горнера. Корни $R(x)$ можно искать, например, методом Ньютона (касательных) и тогда $R'(x) = -2A_3(A_1A_3 + A_2^2 - 4A_0A_4)$. $y$ находят по формуле $y = \sqrt{A_1/A_3}$.

Приводится чисто выкладочное доказательство теоремы: Среднее арифметическое $0{,}5(z_i + z_j)$ любых двух корней $z_i$ и $z_j$ многочлена 4-й степени с действительными коэффициентами $f(z)$ является корнем результанта $R(x)$. Без доказательства это же утверждается для любого многочлена 4-й степени с заменой $0{,}5(z_i + z_j)$ на $0{,}5(z_i + \bar{z}_j)$.

Подробно разбираются случаи, когда в силу этой теоремы появляются лишние действительные корни у $R(x)$. Указывается, что для многочленов более высокой степени, а также для многочленов 4-й степени, но с комплексными коэффициентами этот метод приводит к чрезмерно громоздким выкладкам. Л. В. Курочкина

**909. Обращение схемы Горнера.** Хейнрих (Eine Umkehrung des Hornerschen Schemas. Heinrich H.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 12, 468—469 (нем.)

Рассматривается схема Горнера для отыскания коэффициентов разложения полинома $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ в $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$ по данным точкам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и коэффициентам $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и ее обращение, т. е. отыскание коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ по коэффициентам $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Приводится числовой пример.

Г. П. Багриновская

**910. Действительные корни трансцендентных уравнений.** Мартиниш-Душ-Сантуш (Raízes reais das equações transcendentes. Martins dos Santos José Fernando Nicolau), Bol. Ordem engenheiros, 1955, 4, № 19, 1—8 (порт.)

Дается способ приближенного решения уравнения

$$x = y(x), \qquad (1)$$

где $y(x)$ — функция, имеющая однозначную и непрерывную производную. Прежде всего устанавливается, что достаточным условием существования предела последовательности

$$\pi^0 x = K,\ \pi^n x = \frac{a\pi^{n-1}x + y(\pi^{n-1}x)}{a+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

при $n \to \infty$ ($a$ и $K$ — постоянные) является выполнение неравенства $|(a + y'(x))/(a+1)| < 1$ для всех значений $x$. Предел этой последовательности является решением уравнения (1).

Далее показывается, что каждый интервал, где $y'(x) - 1$ сохраняет свой знак, содержит не более одного корня этого уравнения. При этом корень имеется только в том случае, когда на концах этого интервала функция

$(y(x)-x)/(y'(x)-1)$ имеет значения противоположных знаков (именно, минус слева и плюс справа).

Э. Апарисио

**911. О методах Стеффенсена и Хаусхолдера ускорения сходимости итерационных процессов. Островский** (Über Verfahren von Steffensen und Householder zur Konvergenzverbesserung von Iterationen. Ostrowski Alexander), Z. angew. Math. und Phys., 1956, 7, № 3, 218—229 (нем.; рез. англ.)

Метод ускорения итерационных процессов Стеффенсена, основанный на применении метода хорд к двум последовательным приближениям по методу простой итерации к решению $\zeta$ уравнения $x=\varphi(x)$, был обобщен Хаусхолдером (Основы численного анализа, М., Изд-во ин. лит., 1956) на случай, когда $\zeta$ является одновременно корнем двух уравнений $x=\varphi_1(x)$ и $x=\varphi_2(x)$ и в процессе итерации используются обе эти функции. Доказывается сходимость и определяется порядок сходимости (РЖМат, 1955, 6118) процессов Стеффенсена и Хаусхолдера при некоторых предположениях относительно $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Метод Стеффенсена обеспечивает сходимость порядка выше первого в некоторой окрестности $\zeta$, если существует $\varphi'(\zeta)\neq 1$, и сходимость первого порядка, если $\varphi'(\zeta)=1$ и $|\varphi'(x)-1|\sim\sim\gamma_{\pm}|x-\zeta|^{\lambda-1}$ (при $x\to\zeta\pm 0$; вообще говоря, $\gamma_+\neq\neq\gamma_-$; $\lambda>1$), причем в этом случае метод дает такую же скорость сходимости, как геометрическая прогрессия со знаменателем $1-1/\lambda$. Метод Хаусхолдера обеспечивает сходимость порядка выше первого при $\varphi_1'(\zeta)\neq 1$ и $\varphi_2'(\zeta)\neq 1$; подробно разобраны остальные случаи. Во всех случаях, кроме одного, весьма частного, метод Стеффенсена, примененный либо только к $\varphi_1(x)$, либо только к $\varphi_2(x)$, является более эффективным, чем метод Хаусхолдера.

М. Л. Бродский

**912. Процесс Ньютона как квадратично сходящееся сокращение общего линейного стационарного итерационного метода 1-го порядка (процесса Витмейера), Бауэр** (Der Newton-Prozeß als quadratisch konvergente Abkürzung des allgemeinen linearen stationären Iterationsverfahrens. 1. Ordnung (Wittmeyer-Prozeß). Bauer Friedrich L.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 12, 469—470 (нем.)

Из общей формулы «теоремы сложения индексов»

$$Y_{i+k}=Y_i+Y_k(E-AY_i);\ Y_i=A^{-1}$$

при $k=i$ получается формула (1), обусловливающая ньютоновский итерационный процесс для вычисления обратной матрицы $A^{-1}$, а при $k=1$ — формула (2), обусловливающая витмейеровский итерационный процесс. Итерационный процесс (1) сходится гораздо быстрее процесса (2).

Т. И. Маруашвили

**913. Уточнение метода постоянных разностей для сглаживания опытных данных. Кузнецов М. Д.,** Сб. науч. тр. Кафедры маркшейдерского дела и геод. Донецк. индустр. ин-та, 1956, вып. 4, 7—14

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — опытные значения зависимой переменной, снятые с графика через постоянные интервалы $x$, причем их первые разности $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}$ колеблются. Полагая зависимость между $y_i$ линейной, ищем $\Delta y$ — усредненное значение первой разности. Вместо распространенного, но теоретически необоснованного приема нахождения $\Delta y$ как среднего арифметического предложен новый метод. Исходя из предположения, что сумма квадратов отклонений опытных значений зависимой переменной от вычисленных по соответствующему многочлену первой степени должна иметь наименьшее значение, выведена формула

$$\Delta y=6\,\frac{\sum_{i=2}(i-1)y_i-1/2\,n(n-1)y_1}{n(n-1)(2n-1)}.$$

Найдены также формулы усреднения для случая, когда вторые (третьи) разности колеблются, а зависимость между переменными выражена многочленом второй (третьей) степени. Приведена таблица, частично облегчающая процесс вычислений.

М. А. Дмитриева

**914. О функции ошибок комплексного переменного. Кестин, Персен** (On the error function of a complex argument. Kestin Joseph, Persen Leif N.), Z. angew. Math. und Phys., 1956, 7, № 1, 33—40 (англ.; рез. нем.)

Предлагаемый в настоящей работе метод вычисления функции ошибок комплексного переменного $K(z)=z\exp(z^2)\operatorname{erfc}(z)$ состоит в том, что к двум тождествам

$$\bar{D}(s)=\frac{1}{\sqrt{s}+a}-\frac{1}{\sqrt{s}+\bar{a}}\equiv-\frac{2ib}{(\sqrt{s}+a)(\sqrt{s}+\bar{a})},$$

$$\bar{S}(s)=\frac{1}{\sqrt{s}+a}+\frac{1}{\sqrt{s}+\bar{a}}\equiv\frac{2\sqrt{s}+2a}{(\sqrt{s}+a)(\sqrt{s}+\bar{a})},$$

где $a=a+ib$ и $\bar{a}=a-ib$, применяется обратное преобразование Лапласа $L^{-1}$. Применяя преобразование к левым частям рассматриваемых тождеств, получим $\bar{D}_e(t)=\bar{a}F(\bar{a}\sqrt{t})-aF(a\sqrt{t})$, $\bar{S}_e(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi t}}-aF(a\sqrt{t})+$ $+\bar{a}F(\bar{a}\sqrt{t})$, где $F(z)=\exp(z^2)\operatorname{erfc}(z)$. Правые части тождеств могут быть непосредственно проинтегрированы, так как подинтегральные функции имеют простые полюсы в $s_1=a^2$ и $s_2=\bar{a}^2$ и точки разветвления в начале координат. Вычеты будут выражаться через экспоненциальные функции, а интегрирование по контурам относительно точек разветвления приведет к двум определенным интегралам $D_r$ и $S_r$.

Приравнивая $D_i=D_r$ и $S_i=S_r$, находим $K_r(a\sqrt{t})$ и $K_i(a\sqrt{t})$ — действительную и мнимую части искомой функции. Чтобы получить формулы $K(z)$ для $z=x+iy$, полагают $b=1$, $\sqrt{t}=y$, $a=x/y$, так что $x+iy=a\sqrt{t}$. Этого достаточно, чтобы провести вычисления в первом квадранте; изображения функции в других квадрантах являются зеркальными отображениями относительно осей координат.

Нули $K(z)$, которые тождественны нулям $\operatorname{erfc} z$, получаются в результате совместного решения двух уравнений $K_r(x,y)=0$ и $K_i(x,y)=0$.

Р. М. Федорова

**915. О вычислении вспомогательных функций для двуцентровых интегралов на быстродействующих вычислительных машинах. Корбато** (On the computation of auxiliary functions for two-center integrals by means of a high-speed computer. Corbató F. J.), J. Chem. Phys., 1956, 24, № 2, 452—453 (англ.)

Автор рассматривает специальные двойные интегралы типа

$$y^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+2\varepsilon+1}\int_1^{\infty}d\zeta\int_{-1}^{+1}d\eta e^{-y\xi-x\eta}(\xi+\eta)^{\alpha}(\xi-\eta)^{\beta}\times$$

$$\times(1+\xi\eta)^{\gamma}(1-\xi\eta)^{\delta}(\xi^2-1)^{\varepsilon}(1-\eta^2)^{\varepsilon}\qquad(1)$$

($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ — положительные числа), выражающиеся через функции

$$C_n(y)=\begin{cases}y^{n+1}e^{y}\int_1^{\infty}t^n e^{-ty}dt & \text{для } y>0\\ n!\sum_{l=0}^{n}y^l/l! & \text{для всех } y\end{cases}$$

$$B_n(x) = \int_{-1}^{+1} t^n e^{-tx} dt = x^{-n-1}[e^x C_n(-x) - e^{-x} C_n(x)].$$

$C_n(y)$ вычисляются по рекуррентной формуле $C_n(y) = y^n + nC_{n-1}(y)$; $B_n(x)$ выражаются через полиномы Лежандра и функции Бесселя в удобной для программирования форме. Дана схема вычисления функций $C_n(y)$ и $B_n(x)$. Автор проверил ее эффективность на машине «Вихрь». Я. И. Алихашкин

**916. Ортогональные полиномы, появляющиеся при численном способе нахождения обратного преобразования Лапласа. Солзер** (Orthogonal polynomials arising in the numerical evaluation of inverse Laplace transforms. Salzer Herbert E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 52, 164—177 (англ.)

Как известно, обратная трансформация Лапласа имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp.$$

В том случае, когда $F(p)$ задана численно или является весьма сложной функцией, предлагается находить $f(t)$ с помощью квадратурных формул численного интегрирования с использованием ортогональных полиномов, подобных полиномам Лагерра, применяемым в прямой трансформации Лапласа. Рассматривая случай, когда $F(p)$ имеет форму полинома от $1/p$, и используя интерполяционный полином Лагранжа, автор приходит к ортогональным полиномам вида

$$P_n\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n e^{-p} p^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{e^p}{p^n}\right),$$

выводит их свойства (ортогональность, рекуррентное соотношение, дифференциальное уравнение и т. п.). Приводятся значения двенадцати таких полиномов, их нули и коэффициенты квадратурной формулы, которые здесь называются «числами Кристоффеля». Я. И. Алихашкин

**917. Метод полярного планиметра для определения вероятности попадания в цель. Ван-Броклин, Меррей** (A polar-planimeter method for determining the probability of hitting a target. Van Brocklin G. R., Jr, Murray P. G.), Operat. Res., 1956, 4, № 1, 87—91 (англ.)

Приближенное решение обычной задачи определения вероятности попадания в цель внутри области $A$ с нормальным законом распределения предлагается выполнять с помощью полярного планиметра. Уравнение кривой, ограничивающей область $A$, преобразуется переходом к полярным координатам и выбором надлежащего масштаба. Планиметром подсчитывают площадь, полученную после преобразования, что позволяет найти величину вероятности. Дан один пример. Я. И. Алихашкин

**918. Децилог — мост между логарифмами, децибелом, непером и нормированными числами. Туффентзаммер** (Das Dezilog, eine Brücke zwischen Logarithmen, Dezibel, Neper und Normzahlen. Tuffentsammer K.), VDI-Zeitschrift, 1956, 98, № 7, 267—274 (нем.)

Рассматривается вопрос о характеристике величины чисел с помощью логарифмической меры (децибелов, неперов и т. д.). Автор рекомендует пользоваться единой логарифмической единицей—децилогом. Для выражения какого-нибудь числа в децилогах нужно взять логарифм этого числа при основании $\sqrt[10]{10}$. Приведен ряд задач, в которых полезно применять логарифмическую меру чисел. С. Г. Кислицын

**919. Два замечания о методе последовательных приближений. Красносельский** (Două observaţii cu privire la metoda aproximaţiilor succesive. Krasnoselski M. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz. 1956, 10, № 2, 55—59 (рум.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук» (РЖМат, 1956, 5984)

**920. Форма контуров равноустойчивых откосов. Мухин И. С., Срагович А. И.,** Инженерный сб., 1956, 23, 121—131

**921. Почему надо заниматься численным анализом? Тодд** (Begründung für die Beschäftigung mit numerischer Analysis. Todd John), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 58, № 1, 1 Abt. 11—38 (нем.)

На примерах многих задач из классического и современного численного анализа автор показывает, что работать в этой области полезно и интересно. Примеры приводятся из области интерполирования, численных квадратур, вопроса сходимости и устойчивости, теории игр, метода Монте-Карло и др. Особо отмечаются новые направления в численном анализе, например приложение численного анализа в биологии, теории чисел и алгебре, топологии и теории счетных машин. Библ. 99 назв. Л. М. Голубева

**922. Преобразование определенного типа функции многих переменных и ее подвижная номограмма. Лявина** (Przekształcenie rewnego typufunkcji wielu zmiennych i jej nomogram ruchomy. Lawina Michał), Zesz. nauk. Politechn. slaskiej, 1956, № 7, 73—79 (польск.)

Рассматривается теория построения номограмм с двумя подвижными элементами (вращающимися сегментами) для уравнений вида $y = \varphi(x_1/x_2)\, x_3 x_4$. По номограмме последовательно находятся выражения $x_1/x_2 = \alpha$, $\varphi(\alpha) = \beta$, $\beta x_3 = \gamma$, $\gamma x_4 = y$. Применение метода иллюстрируется номограммами для уравнений

$$v = l\frac{d^2}{2}\left(\arccos\frac{d-2h}{d} - \frac{d-2h}{d}\sqrt{1-\left(\frac{d-2h}{d}\right)^2}\right),$$

$$w = \frac{ql^2}{2\sigma}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Г. Е. Джемс-Леви

**923. Номограмма для преобразования комплексных чисел из алгебраической формы в показательную и наоборот. Манолеску** (Nomograma pentru transformarea numerelor complexe din forma algebrică sub forma exponenţială şi invers. Manolescu Gh.), Energetika (Romîn), 1956, 4, № 5, 238—240 (рум.)

Приводится сетчатая номограмма, по которой можно определять модуль и аргумент комплексного числа, если известны его действительная и мнимая часть, и наоборот. Номограмма представляет собой совмещенные сетки декартовых и полярных координат. Начало координат совпадает с полюсом и ось абсцисс — с полярной осью. Номограмма реализует формулы: $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}(b/a)$. Г. Е. Джемс-Леви

**924. Номограммы для расчета максимального стока весеннего половодья. Хейнман В. Б.,** Сб. науч. работ. Белорус. политехн. ин-та, 1956, вып. 54, 173—179

**925 К. Приближенные методы высшего анализа. Т. 1. Канторович, Крылов** (Metode de aproximaţie ale analizei superioare. Vol. 1. Kantorovici L. V., Krîlov V. I. Bucureşti, Inst.

studii rom.-sov., 1956, 336 p.,— Litogr., 12 lei), Bul. bibliogr., 1956, **A**, № 5, 169 (рум.)

**26 К. Приближенные методы высшего анализа. Т. 2. Канторович, Крылов** (Metode de aproximaţie ale analizei superioare. Vol. 2. Kantorovici L. V., Krîlov V. I. Acad. R. P. R. Bucureşti, 1956, p. 337—667, il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, **A**, № 6, 206 (рум.)

**27 К. Введение в численный анализ. Хилдебранд** (Introduction to numerical analysis. Hildebrand Francis Begnaud. New- York—London, McGraw-Hill, 1956, X, 511 pp., ill., 64 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 322, 8 (англ.)

**28 К. Методы численного анализа. Нилсен** (Methods in numerical analysis. Nielsen Kaj Leo. New-York—London, Macmillan, 1956, XV, 382 pp., ill., 47 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 237, 8 (англ.)

**29 К. Практическая математика. Статистика и вопросы выравнивания. Занден** (Praktische Mathematik. Mit bes. Berücks. v. Statistik u. Ausglechsrechng. 4. überarb. und erw. Aufl. Sanden H. von. Stuttgart, Teubner, 1956, 154 S., ill., 7.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 27, 1900 (нем.)

**30 К. Счетная линейка. Панов** (Хисоблаш линейкаси. Панов Д. Ю. Туккизинчи русча нашридан таржима. Тошкент, Укувпеддавнашр, 1955, 142 бет., 3 с. 40 т.) (узб.)

**31 Д. О некоторых методах приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов. Пугачев Б. П.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Воронежск. ун-т, Воронеж, 1956

**32 Д. Конечноразностные методы решения задачи Гурса. Ярышева И. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1956

## ТАБЛИЦЫ

**33. Таблицы интеграла**

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp-\dfrac{(x-y)^2}{4t}}{1+y^2}\,dy.$$

**Розе, Миранкер, Лик, Рабинович**

(A table of integral $\psi(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp-\dfrac{(x-y)^2}{4t}}{yt}\,dy$.

Rose M. E., Miranker W., Leak P., Rabinowitz G.), U. S. Atomic Energy Comm. Rpts, 1953, BNL-257, 10 pp. (англ.)

Интеграл $\psi$, указанный в заглавии (встречается теории оптической дисперсии и при изучении эффекта оплера в явлении нейтронного резонанса), протабулирован с 5 десятичными знаками для следующих начений переменных:

| $x$ | $t$ |
|---|---|
| 0 (0,05) 4 | 0,025 (0,025) 0,250 |
| 0 (0,1) 5 | 0,300 (0,05) 1 |
| 0 (0,5) 10 | 1,5 (0,5) 10 |
| 0 (0,5) 10 | 11 (1) 25 |
| 0 (0,5) 10 | 25 (5) 100 |

Значения $\psi(x, t)$ вычислялись как решение уравнения плопроводности методом сеток так, чтобы табличные начения были точны до 0,05%. К. А. Карпов

**934. Новые таблицы для быстрого гармонического анализа диаграмм. Манунца** (Nuove tabelle per rapide analisi armoniche dei diagrammi. Manunza Filippo), Ingegneria mecc., 1956, 5, № 4, 5—15 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Описывается более быстрый, чем обычный, метод подсчета приближенных значений коэффициентов Фурье в виде

$$A_k=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{2m}y_r\cos k\frac{\pi r}{m},\quad B_k=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{2m}y_r\sin k\frac{\pi r}{m},\qquad(1)$$

где $k$ — порядок гармоники, $2m$ — число эквидистантных делений периода анализируемой периодической кривой. Метод базируется на приведении выражения (1) к виду

$$A_k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}S_{ki},\quad B_k=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}S_{ki}.$$

Доказывается, что при помощи $p$ счетных элементов, служащих для определения группы из $h$ коэффициентов $A_k$ и $h$ коэффициентов $B_k$, можно определить все остальные коэффициенты при данном значении $m$. В свою очередь эти $2h$ исходных констант, названных автором матрицами, могут быть определены через элементы подсчета $A_1$ и $B_1$. Далее доказывается, что для четных значений $m$ при помощи некоторых расчетных элементов можно легко определить группы по 4 константы $A_k$ и $B_k$ в каждой, что ведет к дальнейшему упрощению подсчетов.

Приводятся таблицы и схемы для определения значений (1) при $m = 9$, 16, 24, 32, 48 и 64.

М. Г. Серебренников

**935. Неопубликованные статистические таблицы. Тейкроу** (Numerical Analysis Research unpublished statistical tables. Teichroew D.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 270, 550—556 (англ.)

Перечислены неопубликованные статистические таблицы, вычисленные в группе численного анализа Калифорнийского университета (Лос-Анжелос): 1) таблицы, связанные с нормальным распределением; 2) таблицы, связанные с Г-распределением; 3) таблицы, связанные с $t$-распределением; 4) таблицы для выбора проб при некоторых распределениях; 5) разные таблицы. Указаны значения аргументов, для которых вычислены таблицы функций, а также точность таблиц. Большинство из них вычислено на СВАК. Н. М. Бурунова

**936. Хранилище Королевского общества для неопубликованных математических таблиц** (Royal Society Depository for unpublished mathematical tables), Philos. Mag. 1954, 45, № 365, 599—609 (англ.)

Приводится список и краткое описание 41 неопубликованной таблицы, вошедшей в Хранилище Королевского общества до конца 1953 г. Имеются таблицы алгебраические, по теории чисел, таблицы тригонометрических функций, интегралов Френеля, интеграла вероятности, интегралов, содержащих функции Бесселя, полиномов Чебышева, таблицы решения уравнения $(y'')^2 = yy'$, корней трансцендентных уравнений, справочник преобразований Лапласа, таблицы интеграла вероятности от комплексного переменного, комплексной дзета-функции Якоби, биномиальных коэффициентов, некоторых функций и интегралов, встречающихся в физике и механике квадратных и кубических корней с большой точностью, сумм некоторых рядов, нулей полиномов Лагерра, функций, связанных с интегралом Эйри, гипергеометрической функции. Эти таблицы могут быть просмотрены в библиотеке Королевского общества, могут быть сняты фотокопии.

Н. М. Бурунова

**937 К. Сокращенные таблицы умножения. Ильин А. П.** Алма-Ата, АН КазССР, 1956, 7 стр., 20 к.

**938 К. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. Выкутил** (Šestimístné tabulky hodnot goniometrických funkcí. Vykutil Josef. Praha, SNTL, 1954, 17 s.) (чеш.)

Таблицы содержат значения тригонометрических функций углов, выраженных в сотых долях дуги квадранта. Шаг аргумента 10'. Десятые доли соответствующих первых разностей для линейной интерполяции приведены в отдельных столбцах.

В конце книги даются указания по переводу значений угла из градусной меры в значения, выраженные в сотых долях дуги, и обратно с помощью счетной машины.

Таблицы рассчитаны на инженерно-технических работников и используются для вычислений с помощью вычислительных машин. V. Bayerová

**939 К. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Рыжик, Градштейн** (Tabele de integrale, sume, serii şi produse. Rîjic I. M., Gradştein I. Ş. Bucureşti, Ed. tehn., 1955, 466 p., ill., 33, 40 lei), Bul. bibliogr., 1956, **А**, № 5, 169 (рум.)

**См. также:** 465, 496, 502, 567, 636, 639, 648

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

**940. Универсальная цифровая вычислительная машина LGP-30. Франкел, Касс** (LGP-30 general-purpose digital computer. Frankel Stanley, Cass James), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 2, 264—270 (англ.)

Кратко рассмотрены вопросы построения универсальных вычислительных машин. Описана последовательная универсальная вычислительная машина LGP-30 (Librascope General Purpose) фирмы «Либраскоп» (см. фиг). Машина имеет последовательное запоминающее

К реф. 940

устройство на магнитном барабане емкостью 4096 32-разрядных чисел. На каждой дорожке размещается 64 числа. Общее количество дорожек на барабане 64. Скорость вращения барабана 3600 об/мин. Максимальное время выбора 17 *мсек*, с помощью системы перекрещивающихся адресов оно может быть уменьшено до 2 *мсек*. Система кодирования одноадресная. В инструкции 12 разрядов отводится на адрес и 4 разряда на код операций. Числа представляются двоичным кодом с фиксированной запятой. 30 разрядов кода являются значащими, в одном разряде помещается знак и один разряд служит для разделения кодов. Для ввода и вывода данных используется стандартное телеграфное оборудование (трансмиттер, телетайп). Вводимые в машину данные одновременно печатаются для контроля. Выводимая из машины информация может одновременно печататься и пробиваться на перфоленте.

Машина имеет три регистра. Один регистр-счетчик служит для образования адреса следующей инструкции. В другой регистр — регистр инструкций помещается выполняемая инструкция. Третий регистр является накапливающим счетчиком, в котором образуется результат арифметической операции. Перед операцией одно из чисел должно находиться в нем, а второе выбирается из запоминающего устройства.

Машина имеет операции сложения, вычитания, умножения, деления, логического умножения и умножения с сохранением младшей половины произведения. Для помещения в накопитель числа из запоминающего устройства служит специальная операция переноса, при которой накопитель предварительно очищается. Имеются также операции безусловного и условного перехода. Условный переход осуществляется при отрицательном числе в накопителе. Операций записи содержимого накопителя две: с очищением последнего и без очищения. Кроме того, есть операции перезаписи адресной части инструкции, хранящейся в запоминающем устройстве, на адресную часть кода, хранящегося в накопителе, или же на адрес, образовавшийся в регистре-счетчике добавлением 1 к адресу предыдущей инструкции.

В машине предусмотрена возможность шаговой работы. В этом случае после нажатия кнопки выполняется только одна инструкция, а адрес следующей виден на контрольной электроннолучевой трубке. Вычисления могут быть остановлены в любом месте программы с помощью специальной инструкции, действие которой может блокироваться переключателем. Управление устройством печати осуществляется непосредственно от машины. С этой целью в инструкции вывода отводится 6 разрядов для обозначения подаваемых устройству вывода дополнительных команд (печать, сдвиг каретки, перевод в верхний или нижний регистры и т. д.), имеется также инструкция ввода.

В машине используется печатный монтаж.

А. И. Щуров

**941. Электронная вычислительная машина МОЗАИК. Ч. 2. Устройства управления и ввода-вывода. Кумс** («Mosaic» — An electronic digital computer. Part 2.— The control and input-output units. Coombs A. W. M.), P. O. Electr. Engrs J., 1955, 48, № 3, 137—141 (англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1956, 5557. Во второй части статьи описываются принципы построения устройства управления и устройств ввода-вывода для машин последовательного действия. Приведена блок-схема устройства управления и временные диаграммы его работы.

В машине применяется четырехадресная система кодирования команд. 40 разрядов стандартной команды распределяются следующим образом: 1) адрес ячейки «*A*» (7 разрядов), 2) адрес ячейки «*B*» (7 разрядов), 3) код операции над числами «*A*» и «*B*» (4 разряда), 4) адрес ячейки «С», куда отсылается результат (7 разрядов), 5) число «выдержки» (4 разряда), 6) характеристика (2 разряда) (5) и (6) вместе управляют продолжи-

тельностью выполнения операции и началом и окончанием действия внутри цикла), 7) признак (1 разряд), определяющий, должна ли команда выполняться немедленно или должна ждать внешнего разрешения, 8) адрес следующей команды (5 разрядов).

Характеристика в команде обеспечивает удобство программирования и сокращение времени при выполнении групповых операций. Признак в команде дает возможность расчленять программу на группы вычислений и останавливать машину на время ввода или вывода данных с механических устройств ввода-вывода. Признак также может использоваться для остановки машины на время выполнения операции умножения на множительном устройстве.

В устройстве управления используется около 500 ламп (из общего количества в машине 7000 ламп).

В устройстве ввода и вывода данных используются 12-рядные перфокарты с 80 пробивками в ряд. Кроме того, имеется печатающее устройство на бумажную ленту, но оно используется редко из-за малой скорости. Устройство ввода подает перфокарты со скоростью 200 шт. в 1 мин. или 20 мсек на ряд, т. е. на одно 40-разрядное число (используются только 40 пробивок в ряду). Считывание производится 40-контактной щеткой за 5 мсек. В промежутках между вводом отдельных чисел машина может продолжать нормальную работу. Вывод результата вычислений производится на перфокарты со скоростью 100 карт в 1 мин.

В. Я. Алексеев

942. **Электронная вычислительная машина МОЗАИК. Ч. 3 (а). Искусство программирования.** К у м с («Mosaic» — An electronic digital computer. Part 3(a) — The art of programming. C o o m b s A. W. M.), P. O. Electr. Engrs'J., 1956, 48, № 4, 212 — 215 (англ.)

Описывается упрощенная блок-схема всей машины МОЗАИК. Объясняется взаимодействие отдельных узлов машины и порядок выполнения команд при различных операциях. Приводится блок-схема машины.

В. Я. Алексеев

943. **Электронная бухгалтерия** (Electronic bookkeeping), Brit. Communs and Electronics, 1956, 3, № 2, 85 (англ.)

Сообщается, что банк «Bank of America» ввел в эксплуатацию электромеханическую машину ЭРМА (ERMA — Electronic Recording Machine Accounting), разработанную Стенфордским исследовательским институтом. ЭРМА выполняет ряд бухгалтерских операций: кредитует индивидуальные счета, дебетует погашения, фиксирует подробности всех сделок, подводит сальдо, записывает распоряжения о прекращении платежей, сортирует чеки, подводит месячные итоги. Машина рассчитана на обработку 32000 вкладов. Она имеет пять входных клавиатур (четыре для операторов и одна для контролера), на которых набирается сумма чека или вклада и посылается в арифметический узел. Обработка бухгалтерской статьи, в среднем, выполняется за 0,5 сек. Номер счета печатается магнитной краской на обратной стороне чека. Затем он считывается пятью магнитными головками и используется для выбора нужного счета из магнитного барабана. После выполнения операции новый итог записывается на барабан, а затем переносится на магнитную ленту. Каждый барабан имеет емкость 300 000 чисел. Главное запоминающее устройство состоит из 12 блоков магнитной ленты, каждый из которых содержит около 730 *м* ленты. Поперек ленты записывается в ряд семь двоичных знаков. Для среднего банковского счета некоторые данные, например номер счета, имя, адрес, операции со счетами за месяц, могут быть записаны на 228 *мм* магнитной ленты. Для ежемесячного отчета данные считываются с ленты и печатаются быстродействующим печатающим устройством со скоростью 600 строк в 1 мин. (скорость будет доведена до 900 строк в 1 мин). Чеки и бланки сортируются отдельно. Сортировальная машина имеет 12 карманов. Скорость сортировки 10 бланков или чеков в 1 сек. В конце каждого месяца чеки и бланки объединяются с отчетом и пересылаются вкладчикам.

В. М. Тарасевич

944. **Счетная машина для вычисления ряда Фурье. Л и н е к** (Počítací stroj pro vypočet Fourierových map. L i n e k A l l a n), Českosl. časop. fys., 1955, 5, № 2, 212—220 (чеш.)

Дается описание релейной вычислительной машины для вычисления рядов Фурье:

$$\rho(x) = \sum_{h=0}^{15} A_h \cos 2\pi hx + \sum_{h=1}^{15} B_h \sin 2\pi hx. \quad (1)$$

Машина была разработана и построена в Институте технической физики Чехословацкой академии наук для проведения расчетов кристаллических структур. В машине используются детали, применяемые в уже имеющихся машинах (шаговые искатели, телефонные реле, телефонные переключатели), а также и целые узлы (двоичный накопитель, печатающее устройство). Машина рассчитана на следующие значения переменных: $A_h$, $B_h$— положительные и отрицательные величины от 0 до 1024 (десять двоичных разрядов), $h$ от 0 до 15 (4 двоичных разряда), значения $x$ берутся в одном квадранте.

Порядок работы следующий. Значения $A_h$ и $B_h$ для $h = 0,1,\ldots, 15$ набираются на клавиатуре. Машина самостоятельно вырабатывает аргументы для каждого значения $x$ последовательно при $h = 0,1,\ldots, 15$. Из релейного запоминающего устройства выбираются для каждого аргумента соответствующие значения sin и cos. Эти значения подаются в умножитель, где они умножаются на $A_h$ и $B_h$ соответственно. Частные результаты из умножителя передаются в накопитель, где и происходит сложение. После подсчета суммы ряда (1) для одного значения $x$ результат подсчета печатается, и машина начинает новый процесс счета для следующего значения $x$. Машина автоматически производит вычисления для всех значений $x$ из одного квадранта, после переключения она производит вычисления для остальных квадрантов.

J. Oblonský

945. **Испытания машины для вычисления ряда Фурье. Л и н е к, Н о в а к** (Poznámka ke zkoušení stroje pro výpočet Fourierovych map. L í n e k A l l a n, N o v á k C t i r a d), Českosl. časop. fys., 1955, 5, № 4, 474—475 (чеш.)

Сообщается, что при проверке работы машины для вычисления рядов Фурье (реф.944) и отдельных ее узлов было проведено контрольное вычисление карт Фурье.

946. **Во Франкфурте установлена самая большая в Европе электронная вычислительная машина** (Europas größtes Elektronengehirn kommt nach Frankfurt), Kunststoff-Rundschau, 1956, 3, № 2, 48—49 (нем.)

Сообщается об открытии весной 1956 г. во Франкфурте-на-Майне большого вычислительного центра, в котором установлена электронная вычислительная машина УНИВАК. См. РЖМат, 1956, 8398.

Ю. К. Черевычник

947. **Большая электронная вычислительная машина** (Elektronische Großrechenanlage), Elektro-Anz., 1956, № 6, 58 (нем.)

Сообщается об открытии весной 1956 г. во Франкфурте-на-Майне вычислительного центра, в котором установлена электронная вычислительная машина УНИВАК (РЖМат, 1956, 8398). Дается краткая характеристика машины.

Ю. К. Черевычник

**948. Цифровая электронная вычислительная универсальная машина ДЭЮКЕ** (Digital electronic universal computing engine (DEUCE), I. V. A., 1955, 26, № 7, XX (англ.)

Приводятся некоторые данные цифровой вычислительной машины ДЭЮКЕ (DEUCE) Национальной физической лаборатории (Англия) (РЖМат, 1955, 4740).
В. Д. Князев

**949. Современная вычислительная машина. Лебедев С. А., Шура-Бура М. Р.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 77

**950. Отделение вычислительных машин** (Computers clinic), ISA Journal, 1955, 2, № 11, 524—525 (англ.)

Отделение вычислительных машин Американского общества приборостроения (Iustrument Society of America) провело в сентябре 1955 г. 6 заседаний, посвященных вычислительным машинам. В статье приводятся данные по некоторым разработкам, доклады о которых были представлены на заседаниях.

Фирма «Либраскоп» (Librascope, Inc.) демонстрировала точный малогабаритный механический интегратор.

Фирма «Компьютер Энджиниринг Ассошиэйтс» (Computer Engineering Associates) представила моделирующее устройство (Direct Analog Computer), в котором сочетались функции операционного моделирующего устройства и модели на пассивных элементах. В этом моделирующем устройстве было применено 148 трансформаторов, 48 генераторов тока, 36 усилителей, 100 индуктивностей, 80 конденсаторов и 268 сопротивлений. Это моделирующее устройство выпускается фирмой серийно и применяется главным образом в авиационной промышленности для изучения вибрации самолета, флаттера и т. д.

Демонстрировалась машина Е 101 фирмы «Берроус» (Burroughs E 101). Эта настольная машина предназначена для решения небольших задач. Программа задается установкой в определенном порядке штифтов на программной панели.

Обсуждалась машина УНИВАК-II (UNIVAC-II) с запоминающим устройством на ферритовых сердечниках емкостью 144 тыс. цифр с временем выборки 40 μсек.

Фирмой «Электродэйта» (ElectroData Corp.) была показана цифровая вычислительная машина средних размеров ДАТАТРОН (DATATRON). Указывается, что такие машины с успехом могут применяться для автоматизации обработки данных при производстве научных экспериментов.

Среди электронных моделирующих устройств отмечается моделирующее устройство фирмы «Электроник Ассошиэйтс» (Electronic Associates, Inc.) типа «16-31 R».
В. Д. Князев

**951. О кибернетике. Вебер** (Rund um die Cybernetic. Weber H.), Elektron (Linz), 1955, E, № 6, 190—193 (нем.)

Дается определение понятия кибернетики со ссылкой на Н. Винера (Winer N., Cybernetics, New York, 1948). Проводится аналогия между автоматическими управляющими устройствами и нервной деятельностью живых организмов. В качестве примеров автоматических управляющих систем приводятся устройство для регулирования топки котла в зависимости от температуры отапливаемого помещения и внешних условий и устройство для введения наркотических средств в зависимости от состояния больного. Дозировка наркоза поставлена в прямую зависимость от величины токов головного мозга. Токи измеряются с помощью двух ощупывающих электродов и усилителя сигналов. Для устранения помех стоит фильтр. Автор указывает, что это устройство уже практически применено на животных. Приводятся схемы 3 устройств для вливания крови при сложных операциях. Д. А. Кузьмичев

**952. Вычислительный центр привлекает внимание** (The com puter center takes hold), Automat. Control, 1955, 3, № 3, 8 (англ.)

Краткое сообщение об открытии двух новых вычислительных центров: фирм ИБМ и «Ривс Инструмент» (Reeves Instrument Corp.).

Вычислительный центр фирмы ИБМ открыт в Нью-Йорке и предназначен для выполнения различных научных и деловых расчетов. Центр укомплектован цифровыми машинами, выпускаемыми фирмой, типов 701, 702, 650, 604. Почасовая плата за выполнение вычислений на большой машине типа 702 составляет 445 долл., на малой машине типа 604—15 долл. Одна из машин типа 604 приспособлена для обработки данных, поступающих в центр из отдаленных мест.

Вычислительный центр фирмы «Ривс Инструмент» является лабораторией моделирования военно-воздушных сил в Дайтоне, Огайо. В моделирующем устройстве, установленном в центре, используется 500 решающих усилителей. М. М. Симкин

**953. Электронные цифровые вычислительные машины фирмы «Ферранти» для авиационной промышленности** (Ferranti electronic digital computers for the aircraft industry), Flight, 1955, 68, № 2432, 41 (англ.)

Сообщение фирмы «Ферранти» о готовности сотрудничать с авиационными компаниями, намеривающимися изучать или использовать вычислительные машины фирмы. Ю. К. Черевычник

**954. Автоматические вычислительные устройства** (Automatic calculators), Electr. Engr and Merchandiser, 1954, 31, № 9, 283 (англ.)

Дается классификация вычислительных устройств, сравнивается их производительность и приводятся примерные области применения. П. В. Тихонов

**955. Статистическая динамика и электронные вычислительные машины. Исихара** (統計力學と電子計算機. 石原明), 科學, Кагаку, 1954, 24, № 2, 74—81 (япон.)

Статья обзорного характера.

**956. Электронные вычислительные машины и прогноз погоды. Крейн, Масан** (電子計算機と天氣予報. H. Crane, 正野重方), Кагаку, 1954, 24, № 2, 81—87 (япон.)

Статья обзорного характера.

**957. Машины помогают чертить карты** (Computer aids mapping), Ordnance, 1955, 39, № 210, 938 (англ.)

Сообщается, что машина МОНРОБОТ V (Monrobot V) может успешно применяться при картографических работах, в том числе в полевых условиях.
Ю. К. Черевычник

**958. Эра электроники. Пасмор** (Ulster and the electronic era. Passmore F. R.), Voice Ind., 1955, 9, № 4, 52—53 (англ.)

Излагается краткая история развития фирмы «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин» (British Tabulating Machine Co, Ltd), выпускающей вычислительное оборудование на перфокартах и электронную вычислительную машину ГЭК (H. E. G.) Б. И. Шитиков

**959. Деятельность студентов профессиональной группы вычислительной техники (PGEC) и изучение вычислительной техники. Гуд** (PGEC student activities and education in computers. Goode H. H.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, EC-4, № 2, 49—51 (англ.)

Приводятся данные об изучении вычислительной техники в учебных заведениях США и Канады. Материалы собраны с помощью анкет комитетом профессиональной группы вычислительной техники и охватывают около 90 университетов. Ю. К. Черевычник

960. **Транскод: система автоматического кодирования для машины ФЕРУТ. Хьюм, Уэрсли** (Transcode: a system of automatic coding for FERUT. Hume J. N. P., Worsley Beatrice H.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 4, 243—252 (англ.)

Для машины ФЕРУТ, которая является точной копией машины Ферранти Манчестерского университета, разработана система автоматического программирования, которая позволяет одноадресной машине ФЕРУТ, имеющей фиксированную запятую, работать в качестве трехадресной с плавающей запятой, причем в десятичной системе счисления.

Машина ФЕРУТ имеет запоминающее устройство двух видов: электростатическое запоминающее устройство на 8 трубках, каждая из которых хранит 64 числа по 20 двоичных разрядов, и магнитный барабан на 256 дорожек. На каждой дорожке хранится 128 чисел по 20 разрядов. Кроме регистра множителя и накопителя, имеется 8 Б-регистров на 20 разрядов каждый, которые могут быть использованы для модификации команд при групповых операциях.

Каждая команда занимает 20 разрядов. Число обычно имеет 40 двоичных разрядов.

Сущность системы транскод заключается в том, что программа записывается как серия неких обобщенных команд (псевдокоманд), каждая из которых записывается в 4 коротких ячейках (20 разрядов): одна для указания операции и остальные три для адресов или иной информации, относящейся к данной операции. Система псевдокоманд, наряду с обычными операциями (арифметическими, переносами чисел, сложениями и вычитаниями в Б-регистрах, условными и безусловными передачами управления и т. д.), содержит и «функциональные» операции (вычисление элементарных функций), которые реализуются с помощью библиотеки стандартных подпрограмм.

Такая псевдопрограмма вместе с числовой информацией вводится в машину с бумажной перфоленты. После этого начинает работать переводящая программа транскода, которая заменяет каждую псевдокоманду соответствующей последовательностью машинных команд. Эта последовательность может содержать от одной до шестнадцати действительных команд. Из этих последовательностей строятся сегменты по 128 коротких ячеек, каждый из которых запоминается на магнитном барабане. В каждом сегменте формируются команды вызова в электронное запоминающее устройство следующего сегмента, необходимого для работы.

В процессе перевода формируется список, устанавливающий соответствие между псевдокомандными адресами и адресами переведенной программы, который используется для перевода команд условной и безусловной передачи управления.

Перевод происходит со скоростью 4—5 псевдокоманд в 1 сек., поэтому полное время перевода невелико — от нескольких секунд до нескольких минут. Переведенная программа может быть отперфорирована в виде, пригодном для повторного ввода в машину непосредственно с чтением с перфоленты. Однако такая лента получается в среднем в три раза длиннее ленты для псевдопрограммы, поэтому дополнительное время, необходимое для ввода, получается примерно такое же, как и время, затрачиваемое на перевод псевдопрограммы. Было найдено, что в большинстве случаев более выгодно продолжать работу с лентой с псевдопрограммой и ее переводом каждый раз заново.

В качестве иллюстрации действительных команд транскода и программ, участвующих в переводе, приводится несложный пример.

Отмечается, что за несколько месяцев после своего завершения транскод оправдал затраты на его разработку (на это было потрачено 6 человеко-месяцев). Кроме того, эта система значительно расширила применимость машины и упростила технику программирования, что позволило сократить время на обучение программированию и использовать менее квалифицированных специалистов.

Н. П. Трифонов

961. **Автоматическое кодирование для цифровых вычислительных машин. Хоппер** (Automatic coding for digital computers. Hopper G. M.), Computers and Automat., 1955, 4, № 9, 21—24 (англ.)

Дается краткий обзор существующих за границей методов автоматического кодирования (а. к.) для вычислительных машин. Когда программа автоматически составлена из отлаженных библиотечных программ, то она часто не требует отладки, если не было допущено ошибок более принципиального характера в первоначальной подготовке задачи. Таким образом, а. к. уменьшает время на отладку и сокращает общее время на кодирование (запись программы в машинных командах) и отладку от недель до минут.

Программы для а. к. разделяются автором на три класса: 1) интерпретативные, которые переводят удобные псевдокоманды в машинные команды путем обращения к хранимым в запоминающем устройстве подпрограммам и выполнения их во время вычислительного процесса;

2) компилирующие, которые воспринимают псевдокоманды, извлекают программы из запоминающего устройства, обрабатывают их для связи с остальными частями программы и в результате дают полную программу для рабочего пуска;

3) генерирующие, которые могут вызываться компиляторами или использоваться независимо. Например, компилятор может использовать генерирующую программу для составления конкретной программы ввода или подготовки результата к печати.

Большое значение при а.к. имеет разработка псевдокода. Указывается, что Горном (Gorn) из Абердина разработан «универсальный код», в котором могут формулироваться задачи для разных машин, находящихся в Абердине; а Уэгстейном (Wegstein) и Хаски (Huskey) разработана методика и коды дл записи и ввода в машину блок-схемы программы. При разработке псевдокода преследуются следующие цели: 1) расширить код машины в требуемом потребителями направлении, 2) упростить подготовку задачи как в смысле сокращения информации о машине, необходимой потребителю для работы на ней, так и информации, которую ему необходимо записать, 3) сделать псевдокод удобным, иметь возможность контроля ошибок и их отыскания.

Вероятно, что невозможен один оптимальный псевдокод, их должно быть по меньшей мере два: для научных, математических и инженерных задач, использующих псевдокод, близкий математическому символизму; и для коммерческих, банковских и других задач, близкий к английскому языку.

Утверждается, что будущие компилирующие программы должны быть универсальными, с различными наборами подпрограмм, например набор математических подпрограмм для десятичных чисел с плавающей запятой, набор инвентаризационных подпрограмм и набор подпрограмм составления платежных ведомостей.

Развитие а. к. должно оказать влияние и на проектирование вычислительных машин. Так, могут быть добавлены команды для облегчения а. к. и опущены команды, введенные для удобства программиста.

В. И. Смирнов

962. **Цифровые вычислительные методы в символической логике с примерами из биохимии. Ледли** (Digital computational methods in symbolic logic, with examples in biochemistry. Ledley Robert

S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 7, 498—511 (англ.)

Предлагается вычислительный метод для решения двух задач алгебры логики: даны две системы логических функций $E_\mu(A_1,...,A_I, X_1,...,X_K)$ и $F_\nu$ $(f_1,...,f_J, X_1...,X_K)$ $(\mu=1,...,r;\ \nu=1,...,S)$ и требуется найти функции $f_m(A_1,...,A_I)$ $(m=1,...,J)$, при подстановке которых на соответствующие места в $F_\nu$ были бы истинны следующие выражения: 1) $\Pi_{\nu=1}^{s}F_\nu \to \Pi_{\mu=1}^{r}E_{u_s}$ (нахождение решений предшествования), 2) $\Pi_{\mu=1}^{r}E_\mu \to$ $\to \Pi_{\nu=1}^{s}F_\nu$ (нахождение решений следования). Если же решения не существует, то требуется найти условия, наложенные на $A_1,...,A_I$, достаточные для существования решения. В основе метода лежит табличное представление логических функций; вычисления производятся в такой последовательности:

1. Таблица значений функции $\Pi_{\mu=1}^{r}E_\mu$ $(\Pi_{\nu=1}^{s}F_\nu)$ разбивается снизу вверх на $2^K$ одинаковых групп, и значения функции в группе, занумерованные снизу вверх, образуют строки матрицы $E=\|E_{ki}\|, k=1,...,2^K, i=1,...,2^I$ (образуют столбцы матрицы $F=\|F_{jk}\|$, $j=1,...,2^J$, $k=1,...,2^K$).

2. Из матриц $E$ и $F$ получается матрица $R$ по формулам: $\|\overline{R_{ji}}\|=\|F_{jk}\|\otimes\|\overline{E_{ki}}\|$ (для решений предшествования) и $\|\overline{R_{ji}}\|=\|\overline{F_{jk}}\|\otimes\|E_{ki}\|$ (для решений следования), где $\otimes$ означает матричное умножение с заменой сложения на дизъюнкцию и умножения на конъюнкцию.

3. Из матрицы $R$ формируется матрица результатов $\|S_{mi}\|$ $(m=1,...,J, i=1,...,2^I)$ по правилу: $S_{mi}$ равен $j$-му снизу числу в $m$-м столбце таблицы наборов значений $J$ логических переменных, лексикографически упорядоченых, для тех $j$, для которых $R_{ji}=1$. Тогда $m$-я строка матрицы $S$ будет таблицей искомой функции $f_m(A_1,...,A_I)$. Невозможность выбора элементов $S_{mi}$ указывает на отсутствие решения.

4. Если решения не существует, то вектор-строка $(C_i)$ с $2^I$ компонентами $C_i=V_j\otimes R_{ji}$, где $(V_j)$ — вектор-строка с единичными компонентами, дает таблицу соотношения $C(A_1,...,A_I)$ между переменными $A_1,...,A_I$, достаточную для существования решения.

Эта же задача обобщается на случаи, когда на переменные $A_1,...,A_I$ или $f_1,..,f_j$ накладываются дополнительные связи. Доказательств не приводится.

Половину статьи составляют примеры такого рода логических задач в двух проблемах из биохимии: 1) по наблюдаемым реакциям, вызванным несколькими энзимами, выяснить, какие реакции вызываются одним энзимом, 2) по эмпирически полученным ограничениям на появление соседних аминокислот в цепочке полипептида при синтезе протеина составить непротиворечивые гипотезы о «механизме перевода» цепочки полинуклеотида, образованной четырьмя группами молекул нуклеиновой кислоты, в цепочку полипептида, образованную двадцатью различными аминокислотами.

А. П. Ершов

**963. Упрощенная универсальная машина Тьюринга.** Мур (A simplified universal Turing machine. Moore E. F.), Proc. Assoc. Comput. Machinery, 1953, 50—55 (англ.)

Описание упрощенной универсальной машины Тьюринга, имеющей только 15 внутренних состояний и предназначенной для имитации любой обычной машины Тьюринга. Упрощение машины достигается за счет увеличения числа лент — в машине их три — $T_1$, $T_2$ и $T_3$. Лента $T_1$ замкнута и содержит полное описание имитируемой машины, представляющее собой список квадруплей. Квадрупль $q_iS_jX_{ql}$ означает, что если машина, находясь в состоянии $q_i$, «прочла» на ленте символ $S_j$, то она выполняет операцию $X$ и переходит в состояние $q_l$. Первые два члена квадрупля $q_iS_j$ называются детерминантом, так как они и только они определяют операцию и следующее состояние машины. $T_2$ — бесконечная лента, служащая для записи «программы» работы имитируемой машины в виде списка детерминантов. $T_3$ — бесконечная лента, являющаяся копией ленты имитируемой машины. Вся информация на лентах изображается в двоичном коде.

Универсальная машина Тьюринга задается списком секступлей, которые она должна выполнить при имитации одного шага работы обычной машины Тьюринга. Секступль $q_i\sigma_1\sigma_2\sigma_3Xq_l$ означает, что если машина, находясь в состоянии $q_i$, «прочтет» с ленты $T_1$ двоичный символ $\sigma_1$, с ленты $T_2$ — символ $\sigma_2$ и с ленты $T_3$ — символ $\sigma_3$, то она выполнит операцию $X$ и перейдет в состояние $q_l$. Первые четыре члена секступля являются детерминантом, определяющим секступль; $\sigma_k$ $(k=1,2,3)$ — 0 или 1 или особый признак $\theta$, означающий, что данный секступль выполнится независимо от того, что «прочтет» машина с ленты, к которой относится признак $\theta$. Операциями универсальной машины являются действия $R_k, L_k, 1_k, 0_k$ $(k=1,2,3)$, которые означают «движение» относительно $k$-й ленты вправо на один шаг, «движение» влево на один шаг, запись 1 на $k$-ю ленту и запись нуля на $k$-ю ленту, соответственно.

26 секступлей, определяющие универсальную машину Тьюринга, делятся на три группы $A$, $B$ и $C$. Сначала машина выполняет секступли из группы $A$ и находит на ленте $T_1$ по детерминанту, «прочитанному» с $T_2$, соответствующий квадрупль имитируемой машины. Выполняя секступли из группы $B$, машина выполняет над лентой $T_3$ нужную операцию имитируемой машины и, наконец, выполняя секступли из группы $C$, заготавливает на ленте $T_2$ детерминант для следующего шага имитируемой машины.

А. П. Ершов

**964. Универсальность вычислительных машин с программным управлением.** Хермес (Die Universalität programmgesteuerter Rechenmaschinen. Hermes Hans), Math.-phys. Semesterber., 1954, **4**, № 1/2, 42—53 (нем.)

Рассматривается вопрос о том, в какой мере управляемые программой вычислительные машины являются универсальными. Утверждается, что каждая вычислимая функция может быть вычислена совершенно автоматически посредством некоторой вычислительной машины, управляемой программой. Согласно приведенному в статье определению, функция называется вычислимой, если она может быть вычислена посредством некоторой машины Тьюринга (Turing A. M., Proc. London Math. Soc (2), 1936/1937, **42**, 230—265). Кратко излагаются принципы работы машины Тьюринга, и в качестве примера описана машина Тьюринга, предназначенная для вычисления функции $\varphi(m)$, равной 1 для четного $m$, и равной 2 для нечетного $m$.

Доказательство приведенного выше утверждения сводится к доказательству того, что для каждой машины Тьюринга $M$ может быть составлена программа $P(M)$ для некоторой автоматической вычислительной машины. Выполняя эту программу, машина, управляемая программой, может вычислить ту же функцию, что и машина $M$. Машина $M$ представляет собой соедине-

ие в некоторой последовательности пяти элементарных машин: машин $R$ и $L$, передвигающих ленту машины $M$ на один шаг вправо и влево соответственно, маркирующей машины $M$, отмечающей некоторым знаком секцию ленты, находящуюся против нее в данный момент, машины $N$, стирающей знак, нанесенный машиной $M$, и машины $E$, включающей ту или другую из элементарных машин в зависимости от наличия или отсутствия знака на секции, находящейся против нее. Поэтому, очевидно, что для построения программы $(M)$ достаточно составить программы для функций, соответствующих операциям, выполняемым элементарными машинами $R$, $L$, $M$, $N$ и $E$, а затем соединить эти программы так, чтобы они выполнялись в том же порядке, в каком работают соответствующие им элементарные машины. В конце статьи приведены программы, соответствующие машинам $R$, $M$, и $E$, и указано, что программы, соответствующие машинам $L$ и $N$, аналогичны программам для машин $R$ и $M$ соответственно.

В. И. Шестаков

**965. Логическая машина для опознавания отношений между классами и причинных связей. Немеш** (Logical machine for recognizing class and causal relations genetically. Nemes T.), Acta techn., 1953, 7, № 1—2, 3—17 (англ.)

Описание устройства нескольких несложных логических машин, которые по некоторой информации о событиях указывают, в каких логических отношениях они состоят. „Первый электромеханический вариант машины опознает различные модификации отношения $A$ есть $B$». Основной частью является штеккерное плато в виде прямоугольной сети гнезд. Каждая строка гнезд относится к одному событию. Штеккер в гнезде данной строки означает, что событие имеет место. Наличие штеккеров в одном столбце указывает на совместное появление соответствующих событий. Вдоль любых двух строк могут двигаться два щупа, отводы от которых соединены с релейно-контактной схемой, с помощью которой после движения щупов вдоль строк, соответствующих исследуемым событиям $A$ и $B$, зажигаются лампы, указывающие, какие из возможных отношений между событиями $A$ и $B$ имеют место. Штеккерное плато может быть заменено перфолентой, а щупы — щетками или фотоэлементами, которые можно устанавливать над любыми строками пробивок перфоленты.

В другом варианте машина, после движения перфоленты с информацией о событиях $A$ и $B$ мимо фотоэлементов, указывает на отношения «если $A$, то $B$» или «$B$, только если $A$», если они имеют место.

Незначительное усложнение этой машины позволяет «выводить» некоторые тождественно истинные выражения типа $(x)f(x) > Ef(x)$, $xf(x) \equiv \bar{E}\bar{x}f(\bar{x})$ и т. п., а также вида $f(x_1, x_2, x_3, x_4) < g(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $f$ и $g$ — произвольные логические функции четырех переменных. Для представления такой функции в совершенной нормальной дизъюнктивной форме вместо штеккерного плато служит световая панель, каждая строка которой относится к одному независимому переменному, а в каждом столбце изображается один дизъюнктивный член. Независимое переменное указывается белым световым сигналом, а его отрицание — красным. Тогда и если все дизъюнктивные члены $f$ имеются среди дизъюнктивных членов $g$, то машина обнаруживает это включение и образует тождественно истинную формулу $g > f$.

Кроме того, приведена схема прибора для подсчета корреляции между двумя событиями $A$ и $B$. Во время производства испытания прибор автоматически подсчитывает произведение частот появления событий $A$ и $B$: $\mu_A \cdot \mu_B$ и частоту одновременного появления событий $A$ и $B$: $\mu_{AB}$. По разности $\mu_{AB} - \mu_A \cdot \mu_B$ судят о величине корреляции.

А. П. Ершов

**966. Человек, рассматриваемый как машина. Кемень** (Man viewed as a machine. Kemeny John G.), Scient. Amer., 1955, 192, № 4, 58—67 (англ.)

Проводится сравнение человеческого мозга и нервной системы с современными вычислительными машинами. По экономичности в потребляемой энергии человеческий мозг значительно превосходит вычислительную машину. Мозг, состоящий из биллионов отдельных ячеек, потребляет не более 100 *вт*. Вычислительная машина эквивалентной емкости при использовании наиболее экономичных элементов — кристаллических триодов — потребляла бы 100 млн. *вт*. Таким образом, теоретически можно в 1 млн. раз увеличить эффективность использования энергии в вычислительной машине. С другой стороны, по скорости вычислительные машины во много раз превосходят разрешающую способность передачи посылок по каналам нервной системы человека, которая ограничивается максимально возможной частотой посылок порядка 100 в 1 сек., в то время как вакуумные лампы в современных машинах легко обеспечивают до 1 000 000 переключений в 1 сек. Емкость мозга, содержащего свыше 10 блн. ячеек, во много раз превосходит емкость имеющихся в настоящее время запоминающих устройств. Рассматривается система логики, соответствующая нервной системе человека, на примере выполнения разнообразных логических операций. Подробно разбирается система логической машины, предложенной Тьюрингом, а также теоретическая возможность построения вычислительной машины посредством использования машины Тьюринга. Некоторые аналогии, проводимые автором, являются весьма спорными.

А. Б. Залкинд

**967. Передача импульсов в нервной системе. Фак** (Die Impulsübertragung im Nervensystem. Fack H.), Elektron. Rundschau, 1955, 9, № 4, 161 (нем.)

Автореферат доклада, сделанного 8 февраля 1955 г. Сообщается, что согласно микроскопическим и рентгенографическим исследованиям отдельные нервные волокна построены аналогично коаксиальному кабелю, но в отличие от последнего обладают большим затуханием на единицу длины и большой дисперсией. Приводятся экспериментально полученные значения различных физических параметров на единицу длины нервных волокон (затухания для частот в 100 *гц* и 10 *кгц*, сопротивлений коаксиальных проводников нервного волокна, емкостей и проводимостей изоляции между этими проводниками). Утверждается, что передачу сигналов по нервной системе можно моделировать с помощью схемы, построенной из 10 моностабильных триггеров, связанных друг с другом $RC$-линией задержки.

Рассматриваются вкратце вопросы возможного применения теории информации и теории регулирования к теории передачи нервного возбуждения. Отмечается ряд нерешенных вопросов: механизм усиления и восстановления формы передаваемых по нервам импульсов, информационная емкость отдельного нервного окончания с принадлежащим ему нервным волокном, механизм запоминания и др.

В. И. Шестаков

**968. Программирование цифровой машины для подсчета и определения размера клеток. Велковиц** (Programming a digital computer for cell counting and sizing. Welkowitz Walter), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 12, 1202—1204 (англ.)

Описывается программа, которая предназначается для обработки данных, полученных с системы телевизионной развертки поля микроскопа. Предполагается,

что достигнута определенная контрастность, размер светового пятна после оптической системы меньше, чем размер наименьшей клетки, каждая линия развертки разбита на 300 одинаковых участков, одновременно в запоминающем устройстве находятся две строки, клетки сортируются по величине на 5 групп, причем граница групп и число линий развертки в поле микроскопа задаются, элементарные участки, принадлежащие клеткам, отмечаются наличием 1 в соответствующей ячейке.

Организуется процесс определения соприкасаемости отдельных элементарных участков, который заключается в обследовании для каждого элементарного участка данной линии соседних участков другой линии развертки и предыдущего участка данной линии, в определении, принадлежит ли данный элементарный участок новой клетке или уже встречавшейся, и накоплении числа элементарных участков в ячейке, соответствующей рассматриваемому элементарному участку. Затем обрабатывается следующая строка. Чтобы при этом избежать переадресации, применяется дублирующая программа. После определенного числа строк данные печатаются. Подсчитано, что там, где один только подсчет количества нервных клеток вручную занимает полдня интенсивной работы, машина ИЛЛИАК, работая по этой программе, произведет подсчет по группам за 4 мин. (увеличение скорости в 100 раз).В. И. Смирнов

**969. Программирование. Семендяев К. А., Шура-Бура М. Р., Жучков Д. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 77

**970. Техника вычислений на автоматической вычислительной машине САР. Бызов Т. А.** В сб. Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 3—49

**971. Применение электронных цифровых машин к проблеме молекулярных орбит. II. Новое приближение для систем с гетероатомами. Притчард, Самнер** (The application of electronic digital computers to molecular orbital problems. II. A new approximation for hetero-atom systems. Pritchard H. O., Sumner F. H.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A235**, № 1200, 136—143 (англ.)
Ч. 1 см. РЖМат, 1955, 5356.

**972. Запоминающее устройство типа Вильямса с повышенной плотностью растра. Ван** (High density Williams storage. Wong S. Y.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, **4**, № 4, 156—158 (англ.)

Предлагается новая система «чтения-записи» в запоминающем устройстве на осциллографических электронолучевых трубках, так называемая система «три точки».

Для запоминания одной двоичной цифры, например в системе «двойная точка», используются два соседних элемента на экране. Фактически для запоминания информации используется лишь одна позиция, а вторая служит для распознавания (контроля). Если эту «контрольную» позицию расположить между двумя соседними элементами, то для хранения двух двоичных цифр нужно будет занять лишь три позиции на экране, что позволяет более чем на 50% повысить заполнение растра.

В системе «три точки» крайние точки $A$ и $C$ содержат по одной цифре информации. Чтение производится отпиранием луча сначала в точке $A$, потом в $C$. Их содержимое запоминается на двух триггерах. Затем луч направляется в среднюю точку $B$, заряжая как $A$, так и $C$ до потенциала, соответствующего единице. После этого, если нужно, луч открывается в точках $A$ и $C$ для регенерации нуля.

Очевидно, что при увеличении плотности записи на экране становится невозможной работа с произвольным выбором чисел (с большим коэффициентом повторных обращений.) Поэтому предлагается систему «три точки» использовать во вспомогательном электростатическом запоминающем устройстве последовательного типа. Выбор из такого запоминающего устройства предлагается производить целыми блоками чисел, без возможности произвольного выбора.

По мнению авторов, такое вспомогательное запоминающее устройство на трубках является более гибким и дешевым, чем магнитный барабан. Т. М. Александриди

**973. Запоминающее устройство на фотопленке** (Memory on film), Scient. Amer., 1955, **193**, № 3, 74—75 (англ.)

Сообщение о разработке в лабораториях фирмы «Интернейшнл Телеметр» (International Telemeter Corp.) запоминающего устройства на фотопленке с новой фотоэмульсией, обладающей высокой разрешающей способностью.

Информация, закодированная обычным двоичным кодом, запоминается в виде прозрачных и непрозрачных прямоугольников на концентрических дорожках диска из фотопленки. Размеры прямоугольников равны приблизительно $0{,}025 \times 0{,}0083$ *мм*. На кольце внешним диаметром 40 *см* и шириной 10 *см* может быть размещено до 20 млн. двоичных цифр. Чтение информации производится тонким лучом, направляемым на ту или иную дорожку быстро вращающегося диска.

Запоминающее устройство более компактно и экономично, чем магнитные ленты. Наряду с большой емкостью, оно обладает малым временем выбора. Любой код на диске можно выбрать менее чем за 1/25000 сек.

Единственным недостатком запоминающего устройства является отсутствие возможности перезаписи. Неправильная информация просто соскабливается с пленки. Прототип устройства успешно работает в лабораториях фирмы. А. И. Щуров

**974. Магнитное запоминающее устройство с малыми токами совпадения. Бартик, Бонн** (A small coincident-current magnetic memory. Bartik W. J., Bonn T. H.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, **5**, № 2, 73—78, 94 (англ.)

Описывается запоминающее устройство матричного типа на металлических магнитных сердечниках емкостью 960 двоичных цифр, применяемое в качестве промежуточного запоминающего устройства при передаче цифровых данных с перфокарт на магнитную ленту.

Приводится блок-схема устройства передачи данных и принципиальная электрическая схема запоминающего устройства на магнитных сердечниках с описанием характеристик последнего. Указывается, что полученное отношение полной магнитодвижущей силы в выбираемом сердечнике к максимальной магнитодвижущей силе в любом не выбранном сердечнике, равное 3 : 1, является наибольшим достижимым отношением для двумерной матрицы, которая применяется в данном случае.

Благодаря применению многовитковых обмоток, что стало возможным при использовании металлических магнитных сердечников, оказалось возможным сильно понизить мощность возбуждающих цепей и в качестве последних применить обычную диодную матрицу на кристаллических диодах или маломощные электронные лампы.

Приводятся схемы возбуждающих цепей и схема выходного интегрирующего усилителя.

Б. И. Стрелков

**975. Параллельный сумматор машины ПЭРМ. Прёбстер** (Das Paralleladdierwerk der PERM. Proebster W. E.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 353—359 (нем.; рез. англ., русс.)

Сообщается, что в Институте электротехнической связи и измерительной техники Высшей технической школы в Мюнхене создается электронная вычислитель-

ая машина с программным управлением ПЭРМ
PERM—Programmgesteurte Elektronische Rechenan-
ge München). Машина предназначена для решения на-
ных задач. Числа представляются и вводятся в дво-
ной параллельной форме. Описаны принципы по-
роения сумматора, используемого в машине, и ре-
ультаты его экспериментального исследования.
Сумматор состоит из двух регистров и схем для сум-
ирования. Разбираются два варианта схем суммиро-
ания. Приведены их схемы для одного разряда. Сум-
ирование осуществляется в 2 такта: само сложение
перенос. В сумматоре имеется цепь сквозного переноса.
риводятся требования к импульсу переноса и способы
ддержания его формы и амплитуды через все цепочки
ереноса, соображения по выбору параметров.
При прохождении 40 разрядов импульс переноса
сширяется от 0,4 до 2,0 *мксек*. Указывается способ
кращения этого времени до 0,7 *мксек*. Максимальное
емя задержки составляет 1,3 *мксек*. Автор указывает,
го при частоте повторения тактирующих импульсов
5 *кгц* на сложение потребуется 2,8 *мксек*.
В ПЭРМ имеются 3 сумматора: для чисел (на 41
азряд), возведения в степень (на 9 разрядов) и сумма-
р адреса (на 13 разрядов). Д. А. Кузьмичев

**76. Логические схемы, необходимые для цифровых вычислительных машин. Нелсон** (Digital computers need logical design. Nelson Eldred), Control Engng, 1955, 2, № 12, 60—66 (англ.)

Описывается принцип устройства и работа логических схем цифровых вычислительных машин. Рассмотрена схема простейшего импульсного усилителя, диодные схемы типа «и» и «или», работа триггерной схемы простейшего двоичного сумматора. Приводятся принципы сравнения двух чисел. Кратко упоминается о запоминающих устройствах на магнитном барабане и магнитных сердечниках. В. П. Кузнецова

**77. Построение графиков в системах автоматической обработки данных. Эйзенпресс, Макферсон, Шискин** (Charting on automatic data processing systems. Eisenpress Harry, McPherson James L., Shiskin Julius), Computers and Automat., 1955, 4, № 8, 21—23, 27 (англ.)

Кратко описаны результаты работы по созданию специального механического быстродействующего печатающего устройства, проведенной в Бюро переписи (Вашингтон).
Печатающее устройство разработано применительно к вычислительной машине УНИВАК и управляется сигналами от магнитной ленты. График воспроизводится в виде последовательности отдельных точек, которые должны соединяться вручную. Одновременно могут печататься точки, соответствующие нескольким графикам.
Ввиду того, что печатающее устройство может печатать точки только лишь на 110 различных уровнях, в машине УНИВАК предусмотрена вычислительная операция по определению уровня, отвечающего каждому значению величины, график которой будет строиться с помощью печатающего устройства. Различные графики отличаются по виду символов, которыми печатаются точки кривых. Всего имеется 51 символ. Разработанный метод может быть использован для построения логарифмических кривых. Подчеркивается возможность перехода от печатания точек к печатанию отдельных прямолинейных участков кривых.
Указывается на удобство такого метода построения графиков, исключающего необходимость предварительного печатания данных в таблицы, а затем построения по этим данным соответствующих графиков.
Приведены фотографии отпечатанных графиков.
М. М. Симкин

**978. О зависимости коэффициента усиления по току от тока эмиттера для кристаллических триодов с поверхностным контактом. Уэбстер** (On the variation of junction transistor current-amplification factor with emitter current. Webster W. M.), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 6, 914—920 (англ.)

Расчет $a_{cb}$ — коэффициента усиления по току кристаллического триода распространен для случая относительно больших токов смещения эмиттера путем приближенного учета влияния поля и модуляции проводимости области базы.
Приведено сопоставление расчетной зависимости коэффициента усиления по току с экспериментально полученной для типичных серийных образцов кристаллических триодов с поверхностным контактом. Показано вполне удовлетворительное согласие расчета с экспериментом для триодов типа *p-n-p* и значительно худшее для триодов *n-p-n*. Кроме того, показано, что для реальных триодов основную роль играет поверхностная рекомбинация и что в соответствии с расчетом зависимость коэффициента усиления по току от тока смещения эмиттера выражена значительно резче у триодов типа *p-n-p* по сравнению с триодами *n-p-n*. А. Р.

**979. Измерение сопротивления германия, используемого для изготовления триодов. Вальдес** (Resistivity measurements on germanium for transistors. Valdes L. B.), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 2, 420—427 (англ.)

Описывается метод четырех зондов для измерения сопротивления полупроводника. Этот метод позволяет измерять удельное сопротивление полупроводника при произвольной форме образца. Метод сводится к измерению разности потенциалов между двумя средними зондами при пропускании тока через крайние, причем все зонды располагаются на одной линии. Приводятся формулы удельного сопротивления для семи случаев различных конфигураций образца при различных граничных условиях: для полубесконечного объема полупроводника, для случаев, когда зонды перпендикулярны или параллельны границе полупроводника с изолятором, для случаев, когда зонды перпендикулярны или параллельны границе полупроводника с проводником, для полупроводника на тонкой изолирующей подложке, для полупроводника на тонкой проводящей подложке. Во всех этих случаях образец полупроводника должен иметь постоянное удельное сопротивление по объему и обладать достаточно большой, по сравнению с расстоянием между зондами, плоской гранью. Для германия рекомендуемое расстояние между зондами 1,2 *мм*. Приводятся экспериментальные данные, полученные этим методом. В. С.

**980. Влияние формы перехода и поверхностной рекомбинации на коэффициент усиления по току кристаллических триодов. Мур, Панков** (The effect of junction shape and surface recombination of transistor current gain. Moore A. R., Pankove J. I.), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 6, 907—913 (англ.)

В предположении, что влияние объемной рекомбинации неравновесных носителей пренебрежимо мало по сравнению с поверхностной рекомбинацией, показано, что задача распространения потока неравновесных носителей формально аналогична задаче распределения потенциала в проводящем листе. Последняя задача может быть решена для различных граничных условий с помощью электрической модели. Разработанный метод использовался для исследования влияния формы и соотношения площадей электронно-дырочных переходов в триоде, а также влияния скорости поверхностной рекомбинации на коэффициент усиления по току триода. Показано, что электронно-дырочные пере-

ходы должны быть возможно более плоскими, а оптимальное соотношение площадей коллектора и эмиттера лежит в пределах от 2 до 9.

С помощью моделирования была получена калибровочная кривая, связывающая отношение коэффициентов усиления по току триодов данной геометрии при нормальном и обратном включении со скоростью поверхностной рекомбинации. Использование этой калибровочной кривой позволяет легко определить скорость поверхностной рекомбинации даже в готовом и заделанном триоде данной геометрии. С помощью этой же кривой проведено исследование зависимости скорости поверхностной рекомбинации от различных поверхностных обработок на незаделанном триоде. А. Р.

**981. Исследование времени восстановления точечно-контактных германиевых диодов. Ферл, Мак-Махон, Роч** (Recovery time measurements on point-contact germanium diodes. Firle T. E., McMahon M. E., Roach J. F.), I. R. E. Trans., 1954, **ED-1**, № 2, 27—33 (англ.)

При внезапном изменении полярности приложенного напряжения сопротивление диода не устанавливается мгновенно. Для этого необходимо некоторое время восстановления как в прямом, так и обратном направлении. Время восстановления прямого сопротивления обычно не столь существенно, так как оно почти мгновенно становится достаточно малым, хотя и может относительно долго достигать своего стационарного значения. Гораздо большее значение имеет восстановление обратного сопротивления, которое изменяется почти экспоненциально, за исключением небольшого интервала. Время восстановления обратного сопротивления зависит от прямого тока, обратного напряжения, температуры и величины сопротивления, включенного последовательно с диодом, а также от физических параметров самого диода. Природа явления восстановления связана с процессами вытягивания и рекомбинации неосновных носителей зарядов. Поскольку время восстановления существенно при применениях диодов в импульсных режимах, рекомендованы специальные испытания диодов в стандартизованных условиях. А. Р.

**982. Некоторые высокочастотные эффекты в германиевых диодах. Джонс, Бродрибб** (Some high frequency effects in germanium diodes with special reference to television sound detectors. Jones D. D., Brodribb B. C.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 311, 33—35 (англ.)

Исследовалось поведение на высокой частоте германиевых диодов, используемых в качестве второго детектора в телевизионных приемниках. Обнаружено, что высокочастотные характеристики этих диодов существенно отличаются от статических. Так, входной импеданс диода на высокой частоте значительно ниже измеренного в статическом состоянии. Максимальное высокочастотное напряжение, которое может быть приложено к диоду, в два и более раз ниже статического обратного напряжения. Все эти эффекты значительно слабее в диодах, в которых приняты специальные меры для уменьшения времени жизни дырок. С. А. Ахманов

**983. Уравнения борьбы и электрический дифференциальный анализатор Гетеборгской Высшей технической школы. Уолман, Шернберг, Эльгескуг** (Kampekvationer och CTH:s elektriska differentialanalysator. Wallman Henry, Stjernberg Bo, Elgeskog Erik), Tekn. tidskr., 1953, **83**, № 40, 833—841 (швед.)

Сообщается о новом шведском моделирующем устройстве — электрическом дифференциальном анализаторе (ЭДА), созданном в Институте телетехники гетеборгской Высшей технической школы в 1949—1952 гг. и предназначенном для решения обыкновенных дифференциальных уравнений до 8-го порядка включительно как линейных, так и нелинейных, с постоянными и переменными коэффициентами, в том числе и с коэффициентами, заданными графически.

ЭДА принадлежит к типу устройств, работающих в ненатуральном масштабе времени: время решения составляет 0,01 сек., частота периодизации 50 *гц*. Регистрация решения производится с помощью фотоприставки, установленной на 5-дюймовой электронно-лучевой трубке. Для визуального наблюдения служит 12-дюймовая электроннолучевая трубка.

ЭДА имеет 8 интеграторов, 8 сумматоров, 4 комбинированных блока перемножателей — функциональных генераторов, которые могут переключаться на выполнение операций умножения или деления, или же на генерирование произвольных функций по методу «фотошаблона», 1 блок для генерирования линейных функций (3 генератора пилообразных колебаний), 1 калибровочный агрегат, выдающий отметки времени и эталонные ступени напряжений, 1 вспомогательный генератор, синхронизирующий работу всего устройства, и 10 блоков выпрямителей. Всего в устройстве насчитывается около 400 ламп, 6 электроннолучевых и 8 фотоумножительных трубок. Потребляемая мощность около 2 *квт*. Средняя величина погрешности устройства составляет примерно 3%.

Отмечается, что высокая скорость устройства позволяет наиболее эффективно использовать ЭДА для решения проблем граничных значений, причем круг решаемых задач значительно может быть расширен с применением в ЭДА недавно изготовленного генератора для функций 2 независимых переменных.

Возможности ЭДА иллюстрируются решениями «уравнений борьбы», относящихся к указанному выше классу задач. Под уравнениями борьбы, составленными Шернбергом, понимается определенный тип уравнений, описывающих борьбу или состязание между 2 сторонами, каждая из которых стремится затормозить или подавить активность противной стороны. Приводятся решения следующих 2 вариантов уравнений борьбы: а) борьба между 2 сторонами, каждая из которых обладает постоянной эффективностью, и б) борьба между 2 сторонами, одна из которых обладает постоянной эффективностью, а эффективность другой растет по линейному закону. Подробно рассматривается методика составления блок-схем, определения масштабов и области изменения параметров. Указывается, что на получение решений обоих вариантов задачи было затрачено лишь 2 часа (время на подготовку задачи: предварительные вычисления и калибровка — здесь не учитывается).

Допускается возможным, что теория борьбы и изложенные методы решения вытекающих из нее уравнений смогут дать в дальнейшем определенные результаты, например в применении к военному операционному анализу. Указывается на возможность развить теорию на случай борьбы, когда число участников больше двух, и решать полученную сложную систему уравнений на машине, получая, например, рекомендации о наиболее благоприятном распределении огня для данного военного соединения, вовлеченного в боевые действия с противником, действующим несколькими самостоятельно оперирующими соединениями. Г. М. Грязнов

**984. Цепные анализаторы трансформаторного типа. Дейвис, Слемон** (Transformer-analogue network analysers. Davies M. W. Humphrey, Slemon G. R.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1953, **100**, Part II, № 77, 469—486 (англ.)

Описывается анализатор, предназначенный для изучения цепей переменного тока в стационарном режиме и для решения систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами.

Заданную систему

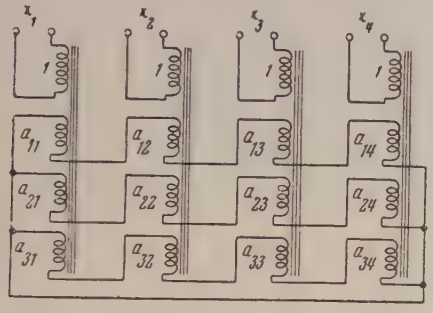
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14} = 0,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24} = 0,$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34} = 0$$

преобразуем к виду

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}a_3 + a_{24}x_4 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0,$$

где $x_i = x_i\, x_4$

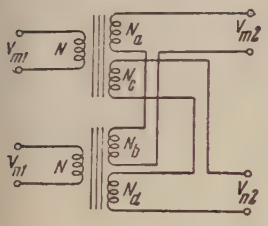
Эти уравнения воспроизводятся четырьмя трансформаторами напряжения, как показано на фиг. 1.



К реф. 984 Фиг. 1

Напряжение $x_4$ прикладывается к выводам $x_4$, а с выводов $x_1$, $x_2$ и $x_3$ снимаются напряжения $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Неизвестные $X_1$, $X_2$ и $X_3$ равны $X_i = x_i/x_4$.

Это устройство можно приспособить для выполнения других видов арифметических вычислений, а при использовании двухфазного источника питания возможно введение комплексных коэффициентов.



К реф. 984 Фиг. 2

Множительный блок может воспроизводить комплексный коэффициент, взаимный импеданц, трансформатор, источник тока или напряжения. На фиг. 2 показана принципиальная схема множительного блока. Напряжения на выходных концах двух идеальных трансформаторов, соединенных согласно фиг. 2, связаны уравнениями:

$$\dot{V}_{m2} = n_a\dot{V}_{m1} + n_b\dot{V}_{n1},\ \dot{V}_{n2} = n_c\dot{V}_{m1} + n_d\dot{V}_{n1}, \quad (1)$$

где $n_a$, $n_b$, $n_c$ и $n_d$ — отношения витков обмоток ($n_a = N_a/N$ и т. д). Вектор напряжения на импеданце равен: $V = ZI$, или $(V_p + jV_q) = (R + jX)(I_p + jI_q)$, откуда

$$V_p = RI_p - XI_q;\ V_q = XI_p + RI_q. \quad (2)$$

Сравнивая (2) и (1), видим, что устройство, приведенное на фиг. 2, может воспроизводить импеданц. Путем переключения можно воспроизвести проводимость ($Y = G + jB$). С помощью двух множительных блоков воспроизводятся взаимосвязанные импеданцы и трансформаторы. Для удобства работы в конструкции анализатора предусмотрены специальные блоки трансформатора и блоки взаимозависимости.

Блок трансформатора служит для решения уравнений типа: $V_2 = -(a_1 + jB_1)V_1$, $I_1 = (a_2 + jb_2)I_2$.

Группа трансформаторных блоков может быть использована для воспроизведения любой преобразующей матрицы, посредством которой ряд комплексных переменных преобразуется в другой ряд. Блоки взаимозависимости совместно с множительными блоками используются для решения систем уравнений с комплексными коэффициентами.

Часто при изучении объекта часть его воспроизводится эквивалентной цепью, а оставшаяся часть — системой уравнений. Это дает возможность преодолеть трудности, встречающиеся в системах уравнений, когда желаемые количества являются небольшими разностями больших величин.

Главной трудностью при конструировании анализатора является производство трансформаторов с переменным коэффициентом трансформации с достаточной точностью. Точность трансформатора для целей моделирования должна быть 1%, а для решения уравнений 0,1% и даже ±0,01%. Авторы дают технологические указания по изготовлению трансформаторов и приводят четыре компенсационные схемы для уменьшения потоков утечки.

Рассматривается методика определеня на анализаторе основных режимов и параметров энергосистем (нагрузка, короткое замыкание, устойчивость), проектирования электрических машин и систем автоматического управления. В дискуссии по данной статье отмечается возможность использования метода трансформаторной аналогии для решения трехмерных задач, например, определения напряжений и усилий в фермах, а также для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Отмечается, что точность решения, даваемого данным анализатором, выше, чем у анализаторов обычного типа, работающих на сопротивлениях, индуктивностях и емкостях. Преимущество данного анализатора выявляется особенно при исследовании цепей, где имеется значительное количество реактивных элементов.

П. В. Тихонов

985. **Моделирующее устройство на сопротивлениях** (Resistance network analogue computer), Instrum. Practice, 1956, **10**, № 2, 139—142 (англ.)

Описывается моделирующее устройство на сопротивлениях, предназначенное для решения задач, описываемых уравнениями Лапласа, например задач о диффузии жидкостей и газов через пористые вещества, о распределении температуры в массивных телах, а также о распределении электрического или магнитного полей. Устройство имеет 2700 сопротивлений, калиброванных с точностью 0,5%. Используются проволочные сопротивления мощностью 0,5 *вт*. Питание собранной схемы производится от специального генератора через потенциометры и делители напряжения.

А. М. Крюков

986. **Вычислительная техника** (Computing techniques), Electr. J., 1955, **154**, № 15, 1237 (англ.)

Обсуждается статья Маккея «Быстродействующие моделирующие устройства». Упоминается, что эти устройства работают с частотой повторения до 25 *кгц*. Установка и сброс интеграторов и изменение начальных данных производится на этой частоте автоматически. Разработаны методы вывода результатов с высокоскоростных вычислительных машин непрерывного действия.

Существенным фактором в использовании высоких скоростей явилось создание многопозиционных индикаторов, которые дают тысячекратное увеличение начальной емкости устройства. А. В. Аваев

987. **Гидростатический интегратор для решения дифференциального уравнения теплопроводности с учетом зависимости теплофизических свойств (коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости) от температуры.** Будрин Д. В., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1955, сб. 53, 22—41

988. **Вычислительная машина для автоматизации работы расчетных столов переменного тока.** Куско, Хеллер (Computer for automatizing network analyzer operation. Kusko A., Heller P. N.),

Commun. and Electronics (N. Y.), 1955, № 18, 208—214 (англ.)

Предлагается для ускорения расчетов динамической устойчивости энергетических систем соединить расчетный стол переменного тока со специальным вычислительным устройством для совместного решения дифференциальных уравнений, описывающих электромеханические процессы в синхронных машинах при авариях и других резких нарушениях режима. При этом электрическая часть уравнений решается на расчетном столе, в то время как вычислительный элемент решает их механическую часть.

Собственно вычислительный элемент состоит из двух интеграторов, выполненных в виде обычных электрических счетчиков. Напряжение на выходе первого интегратора пропорционально ускоряющему моменту синхронной машины и подается на второй интегратор, выходной сигнал которого через сервомеханизм воздействует на фазосдвигающее устройство, меняющее фазу питающей э. д. с. на угол, соответствующий относительному смещению ротора генератора за данный отрезок времени. А. А. Крюков

**989. Электромеханическое моделирующее устройство, воспроизводящее переходные явления для генераторов расчетного стола, работающего на частоте 10 000 гц.** Дейвис (Electromechanical analogue simulates transient phenomena and governor action in 10-KC network analyzer generators. Davis Charles M.), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, **10**, 533—542 (англ.)

Описывается электромеханическое моделирующее устройство, присоединенное к генераторным единицам расчетного стола, работающего на частоте 10 000 *гц*, и служащее для расчетов переходных процессов. Устройство, состоящее из термоэлектрического ваттметра, электронного интегратора и сервосистемы, воздействует на фазу выходного напряжения генераторной единицы расчетного стола. А. А. Крюков

**990. Вычислительное устройство для управления электрической системой** (Computer will control major power system), Control Engng, 1955, **2**, № 10, 20—22 (англ.)

Для контроля работы энергетической системы и выбора наиболее экономичного режима ее работы, т. е. уменьшения расходов по выработке энергии и передаче ее к потребителям, необходимо применение различных машинных методов расчета. Наиболее рациональной системой управляющей машины для энергетической системы является сочетание расчетного стола переменного тока и цифровой вычислительной машины. При этом расчетный стол воспроизводит режим системы на данный момент времени, а вычислительная машина, используя различные вспомогательные материалы и таблицы, определяет наивыгоднейшее распределение генерирующих мощностей, схему сети, дающую минимум потерь для данного режима. На основании получаемых результатов диспетчер системы производит необходимые перераспределения нагрузок станций и переключения в схеме сетей. А. А. Крюков

**991. Электронный генератор функций двух независимых переменных.** Венцель (An electronic generator for functions of two independent variables. Wentzel Viggo), Ericson Techn, 1955, **11**, № 2, 183—225 (англ.)

Введение в состав электромоделирующего устройства двух блоков—схемы образования функций двух независимых переменных и запоминающего устройства—обеспечивает возможность решения интегральных уравнений. В Технологическом университете Чалмерса в Готенбурге (Швеция) было построено моделирующее устройство, состоящее из 9 интеграторов, 10 сумматоров, 4 нелинейных устройств и электроннолучевого индикатора, содержащее 450 ламп и работающее с частотой повторения 8 раз в 1 сек. при времени решения в 75 *мсек* и точности 0,5÷3%. Это устройство, выполненное на усилителях переменного тока с электронными схемами разряда интегрирующих конденсаторов, в связи с большой скоростью решения удобно для решения интегральных уравнений и задач подбора коэффициентов в системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении интегральных уравнений задача сводится в основном к отысканию значения $f(x) = \int_a^b K f(x, t) f(t)\, dt$, где $K(x, t)$ — заданная функция двух переменных. Генерирование функции одной независимой переменной $f(t)$, перемножение функций $K(x,t)$ и $f(t)$, а также интегрирование выполняется в обычном моделирующем устройстве. Генератор функции двух переменных позволяет получить $K(x, t)$. При этом интервал изменения $x$ делится на $n$ частей, и функция $K(x,t)$ заменяется системой из $n$ функции от одной переменной $K_{x_1}(t), K_{x_2}(t), \ldots, K_{x_n}(t)$. Функция $f(x)$ получается в виде ряда значений, соответствующих величинам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и получаемых при изменении $t$ от нуля до 75 *мсек*.

Анализируя ряд схем генераторов функций двух переменных, автор считает, что наиболее приемлемым принципом работы генератора является принцип «широтной модуляции». При этом способе перед экраном электроннолучевой трубки устанавливается пластинка размером 60×60 *мм*, содержащая 30 полос, соответствующих одному значению $x$ каждая. Полоса состоит из средней прозрачной части и двух непрозрачных частей, причем форма границы между прозрачной и непрозрачными полосами соответствует зависимости $K_{x_p}(t)$. Луч электроннолучевой трубки, перемещаясь за 75 *мсек* от левого к правому краю полосы, сканирует снизу вверх и обратно в пределах ширины полосы, равной 2 *мм*. На фотоумножитель, установленный перед пластинкой, в зависимости от ширины прозрачной полосы, будут попадать импульсы света большей или меньшей длительности, так что длительность импульсов тока на выходе фотоумножителя будет пропорциональна значению функции для данных $x$ и $t$. При отношении диаметра пятна к ширине полосы, меньшем 20, погрешность в ширине импульсов от изменения режима работы трубки практически отсутствует.

Полная схема генератора состоит из катоднолучевой трубки с оптической системой, основного фотоумножителя, усилителя импульсов, системы отклонения луча с генераторами развертки, системы электропитания трубки с устройством стабилизации интенсивности свечения луча и системы выбора значений $x$.

Оптическая система состоит из проекционной линзы светосилой 1 : 4,5 и фокусным расстоянием 10 *см*, проектирующей изображение пятна на пластину с изображением функций, которое после этого поступает через конденсаторную линзу на фотоумножитель. В состав оптической системы входит также полупрозрачная пластина, подающая часть светового луча через вторую конденсаторную линзу на второй фотоумножитель, используемые для стабилизации интенсивности светового потока луча.

Смена полос при изменении величины $x$ производится перемещением фотопластинки с помощью соленоидов, управляемых синхронизирующими импульсами через тиратроны. Импульсы напряжения от фотоумножителя, равные 5 *в* и частоты 8000 *гц*, поступают на мостовой двухкаскадный усилитель с коэффициентом усиления 400, выполняющий также операцию формирования импульсов, а затем подаются в моделирующее

стройство для получения произведения $K(x, t)\, f(t)$. инхронизация работы моделирующего устройства в це-ом, схемы развертки и системы перемещения пластинки роизводится от импульсов, следующих с частотой *гц* от общего для моделирующего устройства и генера-ора функций датчика импульсов.

Система стабилизации интенсивности свечения луча беспечивает гашение луча в периоды между интегри-ованием (45 *мсек*) и стабилизацию интенсивности пу-ем управления напряжением на управляющей сетке рубки с помощью следящей системы, состоящей из отоумножителя, усилителя и самой трубки. Конструк-ивно генератор выполнен в виде трех шкафов, со-ержащих оптическую систему (левый шкаф), все лектронные схемы (центральный шкаф) и резервные ханические системы (правый шкаф), и снабжен уста-овкой для подготовки пластинок с изображением функ-ий. Подготовка пластинок производится последователь-ым засвечиванием фотопластинки через оптическую истему, обеспечивающую перемещение световой щели доль изображений функций на стекле и длится 15 час.

Источниками погрешностей, достигающими $\pm 2\%$ от аксимальной величины, являются шумы, искажения инейности разверток, изменения интенсивности луча искажения в изображении функций на пластинке.

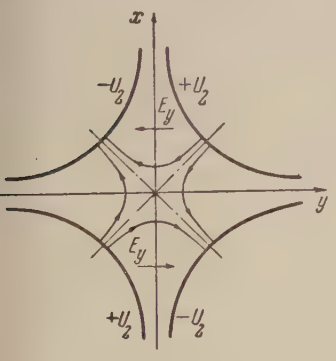
В приложении рассматриваются переходные харак-еристики фильтра низких частот. Библ. 11 назв.

И. М. Витенберг

**992. Электроннолучевая трубка с гиперболическим полем для умножения в моделирующих устройствах. Шмидт** (Die Hyperbelfeldröhre, eine Elektronenstrahlröhre zum Multiplizieren in Analogie-Rechengeräten. Schmidt W.), Z. angew. Phys., 1956, 8, № 2, 69—75 (нем.)

Описывается электроннолучевая трубка для умно-ения непрерывных напряжений.

Трубка состоит из электронного прожектора, трех лектростатических отклоняющих систем и анода. а первую отклоняющую систему, представляющую собой пару пластин, отклоняющих электронный пучок в направлении оси $OX$ (см. фиг.), подается входное напряжение порядка 25—50 *в*, соответствующее одному из двух перемножаемых напряжений. Вторая отклоняющая система состоит из четырех пластин, имеющих форму равнобочных гипербол, асимптотами которых являются оси $OX$ и $OY$. Соседние пласти-




К реф. 992

ы имеют разную полярность, а противолежащие пла-ины электрически соединены между собой. На вто-ую отклоняющую систему подается второе входное апряжение. Напряженность гиперболического поля направлении оси $OY$ увеличивается с увеличением оординаты $x$. Таким образом, величина отклонения учка в направлении оси $OY$ оказывается пропорцио-альной произведению двух входных сигналов.

Направление отклонения при этом зависит от поляр-ости входных сигналов, т. е. выполняется правило наков произведения двух величин. Отклоненный направлении оси $OY$ пучок проходит через третью тклоняющую систему и попадает на анод. Анод со-оит из двух половин, граница между которыми сов-адает с направлением оси $OX$. При отклонении в на-правлении $OY$ след пучка на аноде смещается и в цепи дифференциального усилителя появляется разностный ток. Выход дифференциального усилителя присоединен к паре пластин третьей системы, отклоняющей пучок в направлении $OY$. При этом действие третьей отклоняющей системы частично компенсирует действие второй системы, поэтому результирующее смещение следа пучка относительно линии раздела анода невелико. Выходное напряжение снимается с третьей отклоняющей системы, максимальное значение его не превышает 60 *в*. Точность выходного сигнала около 0,5% от максимального значения. Верхняя граница пропускаемой полосы частот составляет 200 *кгц*.

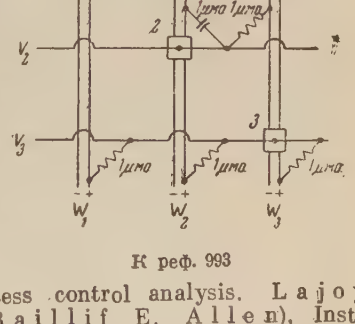
А. П. Ангафоров

**993. Матрицы в моделирующих математических машинах. Хоннелл, Хорн** (Matrices in analogue mathematical machines. Honnell Pierre M., Horn Robert E.), J. Franklin Inst., 1955, 260, № 3, 193—207 (англ.)

Приводится простой метод синтеза цепей для решения линейных дифференциальных уравнений, заданных в матричной форме записи. Схемы из одних пассивных двухполюсников, в связи с наличием перекрестных взаимосвязей между отдельными их элементами, не позволяют поставить в однозначное соответствие все элементы матрицы математической задачи элементам моделирующей установки. Применение в схемах одновременно с пассивными двухполюсниками активных четырехполюсников-усилителей устраняет этот недостаток. Решение математической задачи на моделирующей установке с усилителями сводится к синтезу цепи с матрицей проводимостей, тождественной с матрицей математической задачи. Рассматриваются вопросы устойчивости работы моделирующей установки и те математические преобразования решаемой системы уравнений, которые способствуют устойчивой работе. Приведем пример решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на моделирующей установке матричной структуры. Пусть дано уравнение $(d^2 + d + 1)\, x = 0$ ($d$ — оператор дифференцирования). Это уравнение может быть записано в матричной форме в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} d & -1 & 0 \\ 0 & d & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $w_1 = x, w_2 = dx$ и $w_3 = d^2x$. Матричная схема моделирующей установки для решения этой системы уравнений первого порядка будет выглядеть так (см. фиг.) Квадратики, расположенные по диагонали, представляют усилители с двумя входами (+ и —). Точки в центрах квадратиков представляют выходы усилителей. Нулевая шина на чертеже не приводится, но подразумевается.




К реф. 993

Г. К. Кузьминок

**994. Анализ процесса регулирования. Ладжой, Бейллиф** (Process control analysis. Lajoy Millard H., Baillif E. Allen), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 8, 1316—1318 (англ.)

Изложены принципы построения моделирующих установок и применение их для анализа процессов регулирования с обратными связями. Рассмотрен пример поведения системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, при введении обратных связей по положению (пропорциональное регулирование), по производной и интегралу регулируемого параметра. П. В. Тихонов

**995. Преобразование данных из цифровой формы в непрерывную. Клейн, Вильямс, Морган** (Digital-to-analog conversion. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 4, 695—697 (англ.)

Рассматриваются вопросы одновременной передачи нескольких сообщений, представленных в непрерывной форме, по одному каналу. Для передачи необходимо выполнить преобразование из непрерывной формы в цифровую на входе и из цифровой в непрерывную на выходе системы. Приводятся электронноламповая и релейная схемы и принцип их работы в качестве преобразователя сигналов из цифровой формы в непрерывную. Скорость работы электронной схемы составляет 100 000 преобразований в 1 сек. Выходной сигнал таких схем имеет форму прямоугольных ступенек, совпадающих с истинным значением первоначального непрерывного сигнала лишь в моменты начала ступенек. Указывается, что большее приближение к истинному сигналу может быть получено при использовании на выходе схемы преобразователя соответствующего фильтра.

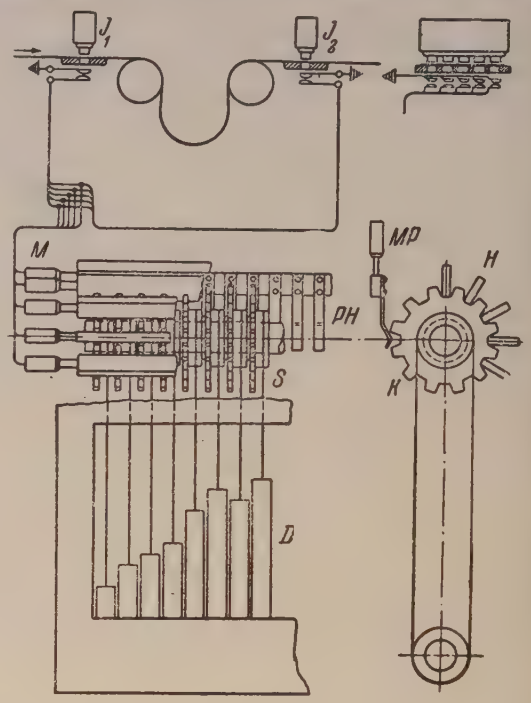
В качестве простейшего фильтра предлагается интегрирующая схема в цепи обратной связи выходной усилительной лампы описанной электронной схемы. Приводится блок-схема системы передачи непрерывных данных с промежуточным преобразованием. Указывается, что такая система передачи является наиболее эффективной при наличии больших помех и может быть полезна во всех случаях, когда целесообразно использование импульсно-кодовой модуляции или цифрового представления величин. Б. И. Стрелков

**996. Определение большого числа элементарных интервалов времени в течение цикла. Леклерк** (Repérage d'un grand nombre d'intervalles de temps élémentaires au cours d'un cycle. Leclerc B.), Onde électr., 1954, 34, № 322, 47—53, 3—4 (франц.)

В импульсно-кодовых системах передачи информации (например, в электронных вычислительных машинах) появляется необходимость выделить любой элементарный интервал времени в течение цикла. Выделение осуществляется путем использования ждущих блокинг-генераторов, управляемых диодными схемами. Т. А. Ш.

**997. Статистический анализатор. Онтлова, Валах** (Statistický analysátor. Ontlová Květa, Valach Miroslav), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, № 2, 271—279 (чеш.; рез. русс., англ.)

Доклад на II общегосударственной конференции, созванной Лабораторией математических машин Чехословацкой академии наук в декабре 1953 г. (РЖМат, 1955, 4756). Описывается машина для составления гистограмм по 32 признакам, названная статистическим анализатором. Признаки исследуемых объектов записываются на перфорированной ленте с 5 рядами пробивок. Каждая комбинация пробивок соответствует одному из объектов и показывает его признак. Ленту ощупывают два набора иголок $J_1$ и $J_2$, отстоящие друг от друга на $n$ позиций ленты (см. фиг.) Число $n$ можно изменять. В смотровом прямоугольном окне $10 \times 15$ *см* движутся вверх — вниз 32 полоски $D$. Положение полоски указывает частоту соответствующего признака. Машина находит распределение $n$ объектов, расположенных в данный момент на ленте между $J_1$ и $J_2$. Объект, воспринятый иголками $J_1$, вводится в распределение, а объект, воспринятый иголками $J_2$, исключается из распределения. Иголки $J_1$, $J_2$ управляют полосками




К реф. 997

$D$ с помощью 5 магнитов $M$, 5 гребенок $H$ и накопителя (střadač) $S$ с 32 колесами $K$. Каждая гребенка имеет два положения. Магниты $M$ передвигают гребенки $H$ из одного положения в другое. В гребенках $H$ сделаны такие вырезы, что при каждой комбинации импульсов с $J_1$ (или с $J_2$) гребенки зацепляют за зубцы всех колес, кроме одного, и блокируют их. Свободное колесо соответствует воспринятому признаку. После очередного продвижения ленты сначала читают иголки $J_1$. Затем после передвижения гребенок $H$ срабатывает магнит $MP$, приводящий пружинную гребенку $PH$, пружина которой поворачивает свободное колесо на один шаг, вследствие чего соответствующая полоска $D$ поднимается на одно деление. Запертые колеса остаются неподвижными, пружины гребенки $PH$ скользят по ним. Затем читают иголки $J_2$, и гребенки $H$ устанавливаются по-новому. Магнит $MP$ отпускает, и при обратном движении гребенки $PH$ свободное колесо поворачивается на один шаг назад, опуская соответствующую полоску $D$, после чего возобновляется движение ленты. В начале работы, когда первая комбинация пробивок еще не достигла $J_2$, читают только $J_1$. Гистограмма, возникшая при $(k + n + 1)$-м ходе машины, называется $k$-м образом (obraz). Анализатор пригоден для непрерывного наблюдения за всеми последовательными образами, для повторения этих наблюдений при разных $n$ и для наблюдения лишь за образами, отстоящими друг от друга на определенном расстоянии $k$. На машине можно исследовать также периодичность явлений. Если объем выборки $n$ равен периоду, то образы перестают меняться. Машина применима в геофизике, аэродинамике, статистическом контроле производства и других областях науки и практики. Она может быть видоизменена различным образом в зависимости от условий применения. Автор ссылается на книгу Б. С. Байбурова (Приборы и автоматы для статисти-

ческого анализа и контроля продукции в машиностроении, М., 1952). Г. Н. Поваров

**08. Анаморфоза функциональных шкал посредством механизмов для передачи вращения. Пахарес-Диас** (Sobre anamorfosis de escalas por medio de mecanismos de levas. Pajares Díaz Emilio), Rev. cienc. apl., 1954, 8, № 36, 35—43 (исп.)

Пусть $y = f(x)$ — произвольная однозначная монотонная дифференцируемая функция. Показана возможность представления любой такой зависимости посредством двух круговых шкал с равномерными делениями, на одной из которых берутся значения угла $\omega$, связанного с аргументом $x$ линейно ($x = a\omega + b$), а на другой — значения угла $\Omega$, связанного с функцией $y$ тоже линейно ($y = A\Omega + B$), причем связь между углами $\omega$ и $\Omega$ устанавливается зубчатой или фрикционной передачей, использующей некруглые колеса с параллельными осями. Значения угла $\omega$ задаются углом поворота ведущего колеса, очертание которого определяется полярным уравнением $\rho = \Delta - A\Delta/[af'_\omega(a\omega + b) + A]$, где $\rho$ — радиус-вектор, отсчитываемый от точки на оси вращения этого колеса, а $\Delta$ — расстояние между осями вращения обоих колес. Значения $\Omega$ получаются как значения угла поворота ведомого колеса, очертанием которого служит кривая, определяемая полярным уравнением $\rho_1 = \Delta - \rho$, где $\rho_1$ — радиус-вектор, отсчитываемый от точки на оси вращения ведомого колеса, а значения $\Delta$ и $\rho$ те же, что и выше. Указана возможность других конструктивных реализаций рассмотренного общего способа, в том числе возможность совмещения осей обоих колес. Детально разобран пример $= x^{3/2}$ для случая, когда $x$ изменяется от $x_0 = 1$ до $= 100$, причем взято $x = 0{,}55\omega + 1$, $y = 499{,}5\Omega + 1$, так что при изменении угла $\omega$ от 0 до 180° аргумент растет от 1 до 100, функция $y$ от 1 до 1000, угол $\Omega$ от 0 до 200°. При вращении ведущего колеса на угол ведомое колесо поворачивается на угол $\Omega$, определяемый формулой $\Omega = [(0{,}55\omega + 1)^{3/2} - 1]/499{,}5$.

Рассмотрены некоторые детали, относящиеся к разметке круговых шкал. Общие соображения применены вопросу о построении радиотехнических конденсаторов переменной емкости трех типов — прямоемкостного, прямочастотного, логарифмического. В. М. Брадис

**99. Автоматическое релейное счетное устройство. Комамия** (繼電器式計數型自動計算機, 駒宮科男), 電氣學會雜誌, (Дэнки гаккай дзасси), 1954, 74, № 11, 1401—1422 (япон.)

**000. Множительное устройство по двоично-десятичному счислению к табулятору Т-5. Симонов А. В.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ. М., Машгиз, 1955, 3—21

Выполнение умножения на табуляторе Т-5 мало производительно. Автор (механик Института точной механики и вычислительной техники АН СССР) сконструировал и изготовил множительное устройство к табулятору Т-5. Умножение производится по принципу двоичного разложения множителя. Восьмизначный множитель предварительно разбивается на 4 группы по знака в каждой группе и умножение множимого на полученные множители ведется параллельно. Четыре частных произведения затем складываются. Производительность машины с множительным устройством при умножении значительно повышается. Умножение на восьмизначный множитель требует не более восьми тактов машины.

Множительное устройство к табулятору Т-5 состоит в основном из дополнительного счетчика, 10 кулачковых контактов, 28 реле и коммутатора. Испытания табулятора с множительным устройством дали хорошие результаты. Е. Н. Макаревцов

**1001. Применение группировочного стола для сортировки документов в условиях машиносчетного бюро. Обуханич В. М.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 50—53

**1002. Суммирующие машины** (Adding and calculating machines), Mach. Market, 1956, № 2880, 29—32 (англ.)

Английская фирма «Белл Панч Компани» (Bell Punch Co.) выпускает одноперiодные суммирующие машины «Sumlock» и «Plus» и двухпериодные суммирующие машины «Unilectric» и «Duolectric». Конструкция машины «Sumlock» несколько проще конструкции распространенных одноперiодных машин фирмы «Берроус», так как в счетчиках машин «Sumlock» применена система передачи десятков без планетарных механизмов (двухступенчатая передача десятков). Машины «Sumlock» выпускаются в нескольких моделях: ручные и с моторным приводом.

Компания отказалась от поточного метода производства и изготовляет машины небольшими партиями. Это дало возможность быстрого введения различных изменений в конструкцию машины и технологию, кроме того, значительно упрощается загрузка оборудования. Е. Н. Макаревцов

**1003. О схеме настройки итогового перфоратора ИП-80. Воробьев И. С.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 107—111

**1004. Вкладыш к коммутационной доске табулятора Т-4МИ. Есипов Е. Х.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 112—114

**1005. Опыт эксплуатации табуляторов типа Т-4М. Скибин Е. М.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 115—120

**1006. Организация и механизация учета выработки и заработной платы при маршрутной системе на машиностроительном заводе. Надольник М. М., Гордонов С. Н.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 54—82

**1007. Счетная линейка для расчетов железобетонных балочных перекрытий. Жэнь Чан-пин** (鋼筋混凝土梁板計算尺. 任常平), 工程建設, Гунчэн цзяньшэ, 1956, № 6/75, 43—48 (кит.)

**1008. Публикации по вычислительным машинам для коммерсантов. Дополнительный список. Чейпин** (Publications for business on automatic computers. A supplemental listing. Chapin Ned), Computers and Automat., 1956, 5, № 2, 16—20 (англ.)

Дополнение к основному списку (РЖМат, 1956, 8469).

**1009. Публикации по вычислительным машинам для коммерсантов. Справочный список. Ч. 2. Чейпин** (Publications for business on automatic computers. Reference listing. Part 2. Chapin Ned), Computers and Automat., 1956, 5, № 4, 28—29 (англ.)

Дополнение к основному списку (РЖМат, 1956, 8460, 8461; 1957, 1008).

**1010 К. Вычислительные машины. Адам** (Számológépek. Ádám Sándor. Budapest. Mérnöki Továbbképzö Int. elöadássorozatából, 1955 (1956), 81 l., 17 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, 3, № 4, 126 (венг.)

**1011 К. Курс для операторов. Электронная вычислительная машина, тип 629** (Cours d'opérateurs. Calculatrice electronique, type 629. Paris, Co. I. B. M., 1955, 93 p., ill.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 37, 806 (франц.)

**1012 К. Логические машины. Немеш** (Logikai gépek. Nemes Tihamér. Budapest, Mérnöki Továbbképzö Int., 1955 (1956), 89 l., 18 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, № 1, 24 (венг.)

**1013 К. Счетно-записывающие машины СДУ-110 и СДУ-138. Орлов А.,** М., Госфиниздат, 1955, 128 стр., илл., 4 р. 45 к.

**1014 К. Открытие кибернетики. Дюкрок** (Découverte de la cybernétique. Ducrocq Albert. Paris, R. Julliand, 1955, 285 p., ill., 675 fr.), Bibliogr. France, 1955, **144**, № 20, 466 (франц.)

**1015 К. Счетная линейка.** Краткое руководство. Изд. 7-е, стереотип. **Семендяев К. А.** М., Гостехиздат, 1955, 48 стр., илл., 85 коп.

**1016 Д. Расчеты на вычислительных машинах в теории игр. Вулф** (Machine computability in game theory. Wolf Frank Louis. — Doct. diss. Univ. Minnesota, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 6, 1080—1081 (англ.)

**1017 Д. Полупроводниковые триоды в вычислительных устройствах непрерывного действия. Керфут** (Transistors in analogue computing. Kerfoot Branch Price Jr, Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 4, 546—547 (англ.)

**1018 П. Сортировальная машина. Констанс** (Sorting machine. Constance Jack J.) [International Business Machines Corp.]. Канад. пат. 512940, 17.05.55

Воспринимающий механизм сортировальной счетно-аналитической машины имеет две сортировальные щетки. Одна щетка управляет работой сортировального магнита (как в существующих сортировках), а другая — механизмом задержки. Механизм задержки позволяет сравнивать пробивки определенной колонки в последовательно идущих картах и управлять работой сортировального магнита. Е. Н. Маквецов

**1019 П. Суммирующие машины. Ламберт** (Calculating machines. Lambert Harry L.) [The National Cash Register Co.]. Канад. пат. 513512, 7.06.55

Многоклавишная суммирующая машина с двумя основными и одним дополнительным счетчиками. Основные счетчики имеют упрощенную конструкцию. Они имеют общий механизм передачи десятков и механизм управления включением счетчиков. Однако это упрощение исключает возможность передачи чисел одновременно в оба основных счетчика и передачи чисел из одного основного счетчика в другой.

Е. Н. Маквецов

**1020 П. Механизм установки делимого против делителя. Дейвис** (Dividend-divisor aligning mechanism. Davis Elwood A.) [Friden Calculating Machine Co., Inc.]. Пат. США 2722377, кл. 235—63, 1.11.55

В вычислительной машине имеется специальное устройство для определения наибольшей значащей цифры делимого в счетчике результатов и наибольшей значащей цифры делителя в передаточном механизме. Это устройство управляет перемещением каретки вправо до тех пор, пока высшие разряды делимого и делителя не совпадут, после чего начинается операция деления. Е. Н. Маквецов

**1021 П. Прибор для иллюстрации и обучения элементарной технике счета** (Devices for illustrating and teaching the elementary technic of calculating) [Skolmaterieldistribution Aktiebolag.]. Англ. пат. 706807, кл. 146 (2), 7.04.54

Наглядное пособие для иллюстрации сложения и вычитания. Прибор имеет форму прямоугольной коробки, в верхней крышке которой сделаны два ряда круглых отверстий. Внутри коробки помещаются две выдвижные пластинки, окрашенные в разные цвета. Сложение и вычитание выполняется путем перемещения этих пластинок. Е. В. Вандышева

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

**1022. Применение беспорядочной временной модуляции излучаемых радиолокационных импульсов для увеличения точности цифрового измерения дальности. Гаррис** (Random time-modulation of the main bang for increased accuracy in digital range measurement. Harris Lee B.), IRE Trans. Aeronaut. and Navig. Electronics, 1956, **3**, № 2, 84—90 (англ.)

Благодаря теоретически неограниченной точности, возможной при передаче цифровых данных, цифровые методы находят широкое применение в измерительной технике и, в частности, при радиолокационном измерении дальности.

Описывается способ измерения дальности путем счета числа импульсов постоянной частоты в период времени между посылкой и приемом прямого и отраженного импульсов.

Рассматриваются два метода уменьшения возникающей при этом принципиально неустранимой случайной ошибки в результате несовпадения момента приема отраженного импульса со считаемым импульсом, а также благодаря неустойчивости селектирования прямого и отраженного импульсов. Первый, ранее известный, метод, заключающийся в циклическом сдвиге излучаемых импульсов относительно считаемых путем соответствующего выбора их частот повторения, обладает рядом существенных недостатков как из-за сложности необходимого для этого оборудования, так и по причине недостаточной эффективности.

Предлагается новый метод уменьшения указанной ошибки, заключающийся в беспорядочной временной модуляции момента посылки радиолокационных импульсов. В предположении гауссового распределения колебаний моментов селектирования и при достаточном по отношению к периоду повторения считаемых импульсов временном диапазоне модуляции такой метод приводит к гауссовому распределению вероятности ошибки, что дает возможность построить рациональную схему устройства цифрового измерения дальности, обладающую заданной допустимой вероятной ошибкой измерения дальности.

Дается математический и числовой анализ точности схемы беспорядочной временной модуляции с приложением расчетных графиков и таблиц, показывающий эффективность предлагаемого метода уменьшения ошибки цифрового измерения дальности. Б. И. Стрелков

**1023. Электроника** (Electronics), Far East Trade, 1956, **11**, № 2, 169, 171 (англ.)

Приводятся данные о некоторых изделиях электронной промышленности Англии. Указывается, что в электронной промышленности Англии занято свыше 200 тыс. человек. Годовой выпуск продукции равен 200 млн. фунтов стерлингов, причем продукция на 35 млн. фунтов стерлингов идет на экспорт. Приводятся примеры успешного использования цифровых электронных вычислительных машин в различных областях промышленности и торговли.

Лондонская продовольственная фирма, имеющая около 300 магазинов, для учета запросов магазинов, заказов и составления графиков работы пищевых предприятий применила вычислительную машину, которая выполняет работу 50 клерков, занятых полный день, за один час.

Манчестерская машина была применена компанией, имеющей 8 производящих заводов и 56 сбытовых баз, расположенных по всей стране, для решения вопроса: какой завод на какие базы должен поставлять свою продукцию, чтобы издержки были бы минимальными. В результате использования машины годовые издержки

были уменьшены с 1 млн. до 640 тыс. фунтов стерлингов. В. Д. Князев

**1024. Цифровые вычислительные машины и их применение в газовой промышленности. Эбдон** (Digital computers. Part 3. Where gas companies use them; storage system developments. Ebdon J. Fred), Gas (Los Angeles), 1955, **31**, № 7, 68—72 (англ.)

Сообщается об использовании цифровых вычислительных машин для технических и коммерческих целей. Рассматриваются вопросы: постановка исследовательских работ, организация обслуживания и эксплуатации. Цифровые вычислительные машины эффективно используются для составления различных функциональных таблиц. Одна газовая компания, используя их, затрачивает на составление одной таблицы 32 часа (включая время программирования, вычисления и печатания выходных данных), вместо 650 час. в случае использования настольных машин. Считается наиболее целесообразной организация централизованного обслуживания вычислительных работ. Дается также краткий обзор систем запоминающих устройств.

В. М. Тарасевич

**1025. Вычислительные машины — следующая фаза** (Computers—the next phase), Scope, 1955, Dec., 34—41 (англ.)

В популярной форме рассказывается о возможности применения вычислительных машин для управления металлорежущими станками. Приводятся возможные примеры такого применения. Например, обработка трехмерного кулачка для машины, фрезерующей лопатки турбины, занимает до 3-х недель, с применением же цифрового управления и использованием вычислительной машины весь процесс обработки может быть сокращен до 4-х часов. Эксперты утверждают, что введение цифрового управления станков может сократить время механической обработки на 50%.

Указывается на другие возможные применения вычислительных машин. Приведены фотографии цифровых управляющих устройств. В. Д. Князев

**1026. Числовые данные управляют фрезерным станком** (Numerical data controls milling machine), Automat. Control., 1955, **3**, № 1, 20—21 (англ.)

Сообщается о цифровой управляющей системе «Нумерикорд» (Numericord), используемой фирмой «Гиддингс энд Льюис» (Giddings and Lewis). Система предназначена для управления мощным фрезерным станком для авиационной промышленности и основана на исследованиях, проводимых фирмой «Дженерал Электрик» и Массачусетским технологическим институтом (РЖМат, 1956, 9219). В. Д. Князев

**1027. Использование цифровых вычислительных машин для решения задач в химической промышленности. Роз, Шилк** (The use of digital computers in chemical engineering problems. Rose Arthur, Schilk Joan A.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953, Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 75—106 (англ.)

**1028. Применение вычислительных машин в рентгеноструктурных расчетах. Порай-Кошиц М. А.**, Кристаллография, 1956, **1**, № 2, 248—263

**1029. Использование счетно-аналитических машин в работах по составлению сводных документов технического характера (на 80-колонном оборудовании). Юдицкий В. Л.** В сб.: Механиз. учета и вычисл. работ на пром. предприятии. М., 1956, 83—106

**1030. Самолетный навигационный прибор** (Flight computer), Amer. Aviat., 1955, **19**, № 15, 50 (англ.)

Сообщение фирмы «Джепсен и Ко» (Jeppsen and Co.) о новом навигационном приборе R-2, помогающем определять скорость и направление ветра. Прибор учитывает влияние температуры окружающего воздуха. Описания прибора в статье не дается. Приводится фотография прибора. Он имеет форму диска с нанесенными по концентрическим окружностям шкалами. Приведенная фотография устройства прибора не объясняет. Е. В. Вандышева

**1031 П. Карманный вычислительный прибор для определения калорийности. Райс** (Pocker calculator for the calculation of calories. Rice Wendell C.). Пат. США 2707592, кл. 235—78, 2.05.55

Счетчик состоит из корпуса, круглой шкалы с делениями максимума калорийности (внешний круг) и веса (внутренний круг) пищевых продуктов, циферблата с отметками калорийности приготовленного блюда (от 0 до 600 калорий) и линз для визуального отсчета. При ручном вращении специального кольца счетный прибор позволяет при заданной калорийности и весе продукта определить калорийность блюда.

Р. А. Спасский

---

См. также: 9, 10, 11, 12

# АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ


### А

Абдуллаев И. К. 320, 322
Айзерман М. А. 409
Ака 300
Акабанэ 21
Александров П. С. 226
Алексеева Г. П. 808 Д
Алексеева О. П. 505 Д
Аленицын Ю. Е. 339
Альбер С. И. 259
Альтшулер И. С. 751
Аржаных И. С. 397
Ауссем М. В. 858
Ахундов А. 321

### Б

Базылев В. Т. 845
Баранцева О. А. 343
Бахвалов Н. С. 884
Бачелис Р. Д. 487 Д
Березанский Ю. М. 475
Березин Ф. А. 651
Бермант А. Ф. 547 К, 763 К
Бицадзе А. В. 458
Боголюбов Н. Н. 656, 657
Болтянский В. Г. 534 К
Боревич З. И. 140
Борисович Ю. Г. 637
Боровиков В. А. 448
Бразма Н. А. 445
Будрин Д. В. 987
Быхов Т. А. 970

### В

Вагнер В. В. 160
Вайнберг М. М. 515, 517, 633
Ван Гуан-инь 462
Ватанабэ 886
Виноградов И. М. 54
Виноградов В. С. 455
Вишик М. И. 473
Волков И. И. 562
Воробьев И. С. 1003
Воробьев Н. Н. 161
Воробьев Ю. В. 639
Вороновская Е. В. 317
Врублевская И. Н. 254

### Г

Гамкрелидзе Р. В. 267
Гантмахер Ф. Р. 409
Гейдельман Р. М. 844
Гельман А. Е. 432 Д
Гельфанд И. М. 447, 651, 652, 654, 668, 676
Гельфер С. А. 347
Гельфонд А. О. 64
Георгиев Г. И. 72, 400, 897
Гихман И. И. 713
Гладков Т. К. 10
Глускин Л. М. 162, 163, 172
Глушков В. М. 153, 154
Гнеденко Б. В. 675, 713
Гордевский Д. З. 788
Гордеев А. В. 905
Гордон В. О. 805 К
Гордонов С. Н. 1006
Гофман Ш. М. 902
Гохберг И. Ц. 512, 513
Граев М. И. 651
Григорьян А. Т. 39
Гробман Д. М. 402
Гулуа Ш. Н. 395 Д
Гуляева Л. А. 789
Гурьянов И. Н. 520 Д
Гусейнов А. И. 514
Гусейнов Г. А. 318, 319
Гутман Д. С. 27

### Д

Дезин А. А. 486 Д
Депман И. Я. 28
Джапаридзе И. С. 796
Джафарли Г. А. 394 Д
Джафаров А. С. 323, 330
Джваршейшвили А. Г. 276
Джрбашян М. М. 380
Дынкин Е. Б. 673

### Е

Егоров И. П. 852
Егорова И. А. 616
Есипов Е. Х. 1004
Ефимов Н. В. 25, 878

### Ж

Жмудь Э. М. 130
Жучков Д. А. 969
Жэнь Чан-пин 1007

### З

Заславский И. Д. 238
Захаров В. К. 485 Д
Зволинский Н. В. 496
Золотарев В. М. 678
Зубов В. П. 30
Зуховицкий С. И. 640, 641
Зыков А. А. 97

### И

Ивамото 19
Ивамура 296
Иванов В. К. 506
Иванов В. Н. 430 Д
Ивашев-Мусатов О. С. 311
Изотов Г. Е. 839 Д
Ильин А. П. 937 К
Ильин В. А. 474
Инаба 48
Иноуэ 509
Иохвидов И. С. 622
Исихара 955
Искра К. К. 556
Іваненко В. В. 399

### Й

Йосида 429 К

### К

Казьмин Ю. А. 356
Канторович Л. В. 648
Карапиколов Хр. 507
Картрайт М. Л. 416
Кауфман Б. Л. 564
Кац И. С. 426, 427
Келдыш Л. В. 243
Кибель И. А. 501
Кирищиев Р. И. 791
Китов А. И. 9, 11
Клементьев З. И. 269, 291
Кованцов Н. И. 832
Коган С. Я. 892
Колесников О. Н. 810
Колмогоров А. Н. 676
Кольман Э. 8, 12
Кольцов А. В. 33
Комамия 999
Кононенко В. О. 413
Кори-Ниёзий Т. Н. 865 К
Королюк В. С. 677
Кострикин А. И. 218 Д
Красносельский М. А. 406, 412, 621
Крейн М. Г. 405, 406, 497
Крейн С. Г. 406
Крыжановский С. Е. 881
Крылов В. И. 895, 896
Крылова Н. И. 740 Д
Кудрявцев Л. Д. 295, 483 Д
Кузнецов М. Д. 913
Кузнецов П. И. 494
Куклес И. С. 404
Курант Р. 477 К
Куроиси 539 К

### Л

Лаврентьев М. М. 452, 456
Ладыженская О. А. 453, 471, 638
Лактанова Н. В. 830
Ландис Е. М. 410
Ланцевицкий И. Л. 328
Ларченко Е. Г. 905
Лебедев Н. А. 342, 345, 346
Лебедев Н. Н. 478 К
Лебедев С. А. 949
Левин Б. 423
Левитан Б. М. 422
Леонтович-Андронова Е. А. 408
Лившиц М. С. 623
Ли Сэнь-линь 872
Литвинов Н. В. 492
Лифшиц И. М. 738
Ли Чэ Гон 100
Лось Г. 145
Лукомский Я. И. 735, 736
Лурсманашвили А. П. 61
Люстерник Л. А. 621, 648, 763 К
Лю Чун Хо 781
Лю Шао-сюэ 219 Д
Ляпунов А. А. 9

### М

Малаховский В. С. 823
Малкевич М. С. 892
Мальцев А. И. 146, 209, 210
Мамедов Ш. Р. 393 Д
Мамедов Я. Д. 514
Манин Ю. И. 75
Манихин В. М. 392 Д
Маржик Я. 626
Марковић Д. 1, 2
Марченко В. А. 422
Масано 956
Махарадзе Л. М. 220 Д
Мацкина Р. Ю. 242
Медведев Б. В. 656
Мергелян С. Н. 338
Миколайская З. 421
Минлос Р. А. 654
Митропольский Ю. А. 418
Мозжерова Н. И. 484 Д
Мокрищев К. К. 792
Мухин И. С. 920
Мучник А. А. 49

### Н

Набедзима И. 387
Надольник М. М. 1006
Наймарк М. А. 651
Натансон Г. И. 324
Немыцкий В. В. 411, 517
Никольский А. А. 502
Никулин Н. А. 790, 813
Норден А. П. 26

### О

Обуханич В. М. 1001
Обухов А. М. 737
Ованисян В. А. 746
Окоти 538 К
Олейник О. А. 472, 480 К
Олоничев П. М. 36
Орел Н. Н. 906
Орлов А. 1013 К
Оруджев Г. 567
Ососков Г. А. 674

### П

Панов Д. Ю. 930 К
Парасюк О. С. 653

ejović Т. 545 К
етрашень Г. И. 500
етровский И. Г. 410, 447
окорный В. В. 516
оливанов М. К. 656
олякова Т. Н. 16 Д
онтрягин Л. С. 415
орай-Кошиц М. А. 1028
остников М. М. 262
ривалов И. И. 770 К
рохоров Ю. В. 671
рянишникова З. И. 798
угачев Б. П. 931 Д
ульхин С. П. 463
хакадзе Ш. С. 268
ятецкий-Шапиро И. И. 125

Р

айков Д. А. 613
ахманов Б. Н. 341
ашевский П. К. 849, 850
вачева Е. Л. 679
ехлицкий З. И. 407
имский-Корсаков Б. С. 598 К
одосский К. А. 55
раенблат-Рот М. 686 Д
Розенфельд Б. А. 784
Романов Н. П. 56
Романчук Н. А. 65
Рохлин В. А. 261, 649
Рыбкин Г. Ф. 32
Рыбников К. А. 4, 38
Рюнк О. Я. 807 Д
Рябчикова И. Я. 838 Д

С

Салехов Д. В. 620
Сапогов Н. А. 381
Свирский И. В. 893
Семендяев К. А. 969, 1015 К
Семенцов-Огиевский М. А. 805 К
Симонов А. В. 1000
Сираждинов С. Х. 670
Ситников К. А. 226, 236
Скальская И. П. 478 К
Скибин Е. М. 1005
Скопец З. А. 785
Скоробогатько В. Г. 508
Скороход А. В. 666, 669
Смирнов В. И. 546 К
Смирнов Н. В. 713
Смирнов Ю. М. 227
Смогоржевский А. С. 782
Смолицкий Х. Л. 460
Соболев В. И. 643
Соболев С. Л. 9, 473, 648
Сорокина В. И. 158
Сраговић А. И. 920
Сраговић В. Г. 739 Д
Стендер П. В. 107
Степанова Г. И. 738
Стечкин С. Б. 640, 641
Столяров Н. А. 275
Стрелецкий Э. В. 558
Суворов И. Ф. 551 К
Судзуки 544 К
Сульдин А. В. 157

Т

Такахаси 382
Талдыкин А. Т. 628
Тарасов Н. П. 552 К
Тихонов А. Н. 499
Тоёда 537 К
Токарев В. М. 794
Трохимчук Ю. Ю. 336
Трошин Г. Д. 352
Туманян С. Х. 692
Тумаркин Л. А. 237

У

Уфлянд Я. С. 478 К
У Чжо-цюнь 419

Ф

Фаддеев Д. К. 140
Фаддеева В. Н. 904
Федоренко Б. В. 29
Федулов В. С. 314, 568
Фейгельсон Е. М. 892
Фельд Я. Н. 369, 370
Фельдман А. А. 891
Фильчаков П. Ф. 350
Фомин С. В. 649

Х

Хавинсон С. Я. 362
Халдеев И. М. 797
Хаскинд М. Д. 495
Хведелидзе Б. В. 368
Хейнман В. Б. 924
Хомутов К. М. 779
Ху Ши-хуа 51

Ц

Цалюк З. Б. 635
Цубербиллер О. Н. 774 К

Ч

Черняев М. П. 35
Черский Ю. И. 519 Д
Четаев А. Г. 488
Чечик В. А. 431 Д
Чогошвили Г. С. 241, 258

Ш

Шапиро З. Я. 652
Шафаревич И. Р. 186
Шварц А. С. 263, 264
Шерман Д. И. 498
Шик Ф. 159
Шилов Г. Е. 447
Шиманов С. Н. 414
Широков Д. В. 657
Ширяева Е. В. 617, 636
Шленев М. А. 837 Д
Шнеерсон М. С. 396 Д
Шуликовский В. И. 821
Шура-Бура М. Р. 949, 969

Ю

Юдицкий В. Л. 1029
Юсуф-Заде Б. М. 331

Я

Яглом А. М. 654, 672, 676, 685, 737
Ядзима 19
Ядренко М. И. 684
Яненко Н. Н. 444
Ярышева И. М. 932 Д

---

A

lám S. 1010 К
gnew R. P. 566
gostinelli C. 398
bert A. A. 197
brycht J. 627
exievici V. 530
nemiya I. 614
nitsur S. A. 187, 188
nmeter H. 725
asako Y. 465
dersen S. L. 688
dré J. 403
dree R. V. 81
drews F. C. 701
is A. A. 683
tosiewisz H. A. 420
war Ali Mohammad 571 Д
f C. 824
tin E. 118
ano K. 127, 139
kinson F. V. 316
bert P. 776 К

B

gemihl F. 360
hadur R. R. 650
llif E. A. 994
lachandran V. K. 204
simelli P. 815
nărescu V. 773 К
nerjee K. S. 681
rsotti I. 870
rtik W. J. 974
silewitsch W. 493
ner F. L. 912
ner H. 214 Д, 239
Behrens E. A. 199
Berge C. 714
Berger M. 866 Д
Bergman S. 383
Bernays P. 299
Bers L. 390 К
Berthé G. 841
Besicovitch A. S. 274
Beyer G. 181
Bing K. 53
Bing R. H. 244
Bini U. 73
Birkhoff G. 730
Björck G. 281
Blackwell D. 722
Blanuša D. 846
Blambert M. 358
Blaschke W. 764 К, 835 К
Boas R. P., J., 302
Bochner S. 665
Bonn T. H. 974
Boone W. W. 178 Д
Borel F. 822
Borissavliévitch M. 801 К
Börsch-Supan W. 424
Boscher J. 579
Bottari A. 752
Bottema O. 793
Bouligand G. 13
Box G. E. P. 688
Boyd A. V. 565
Braithwaite R. B. 724
Brauer R. 128
Braumann P. B. T. 94
Braunschweiger C. C. 663 Д
Brenner J. L. 122, 903
Brixey J. C. 81
Brodribb B. C. 982
Bruijn N. G. de 88
Brun V. 532
Bruthans V. 811
Burger E. 715, 716
Busbridge I. W. 510
Butson A. T. 217 Д
Bydžovský B. 767 К

C

Calvo Carbonell C. 907
Cambi E. 417
Carathéodory C. 298 К
Carcanague J. 757
Cargal B. 288
Carl J. 768 К
Carleson L. 647
Carlitz L. 76, 83, 98
Cass J. 940
Castañeda J. 721
Cavallaro V. G. 749
Chaney T. M. 180 Д
Chapin N. 1008, 1009
Chela R. 78
Chernoff H. 704
Choquet G. 93 К, 112, 116 К, 271
Churchill R. V. 587
Cimpan F. T. 24
Ciorănescu N. 87
Clunie J. 354
Cocriamont T. 550 К
Cohen E. 77
Collatz L. 899
Collingwood E. F. 365
Collins H. S. 604
Combes J. 355
Conolly B. W. 572
Constance J. J. 1018 П
Constantin I. 89 К
Coombs A. W. M. 941, 942
Corbató F. J. 915
Cornish E. A. 698
Cossu A. 854, 857
Cox D. R. 731
Coy J. W. 555 Д
Crane H. 956
Craven T. L. 222
Cristescu R. 605
Croisot R. 165
Crouch R. B. 124
Császár A. 285
Curtis H. J. 205

D

Dantzig G. B. 717
Darmois G. 5
Davies M. W. H. 984
Davies R. O. 273, 284
Davis C. M. 989
Davis E. A. 1020П
Davis P. 890
Debreu G. 718
Debrunner H. 867
De Giorgi E. 467
Deheuvels R. 265
Delaporte P. 711
De Leeuw K. 646
Del Pasqua D. 611
Dénes P. 69, 70
Denjoy A. 270
De Sloovere H. 744
Devinatz A. 625
Diamantopoulos T. 344
Dieudonné J. 602
Dingler H. 7.
Di Noi S. 783
Doetsch G. 466, 594
Doob J. L. 664
Dorleijn M. 527
Drobot S. 729
Dubreil P. 189
Ducrocq A. 1014 К
Dugué D. 769 К
Dunford N. 629
Dvoretzky A. 875

E

Ebdon J. F. 1024
Eberlein W. F. 632
Edge W. L. 121
Eggleston H. G. 247, 359
Ehrenfeld S. 703
Ehrenpreis L. 662 Д
Ehrhart E. 528
Eisenpress H. 977
Elgeskog E. 983
Ellis D. 208
Ellis H. W. 610
Enomoto S. 279
Epstein B. 726

F

Fabian F. 709
Fack 967
Fava F. 809
Federer H. 280
Feit W. 179 Д
Fejér L. 325, 326
Feller W. 425
Ferri C. 817 К
Fettweis E. 17
Fichera G. 894
Fine N. J. 246
Finzi B. 548 К
Firle T. E. 981
Fix E. 710

Floyd E. E. 256
Fomin S. V. 655
Forsythe G. E., 469, 900
Frank M. S. 197
Frankel S. 940
Freud G. 327
Frink O. 212
Froda A. 292
Froemke R. L. 554 Д
Fröhlich A. 184, 185
Fuchs L. 136
Fuglede B. 272, 624
Fujita H. 883
Furstenberg H. 151

G

Ganelius T. 593
Garder A. O., Jr 386
Gårding L. 461
Gardner R. S. 707
Gasapina U. 743
Gaschütz W. 129
Gáspár J. 102
Gatteschi L. 575
Gehér L. 287
Gelfand I. M. 660, 655
Georgi H. 768 К
Cheorghiu A. 491, 802 К
Cheorghiu Gh. T. 543 К
Ghika A. 600
Ghosh M. N. 691, 693
Ghurye S. G. 667
Girschick M. A. 694
Gleyzal A. 599
Godeaux L. 814, 826, 827, 828, 833
Goldberg S. I. 862
Golomb S. W. 79
Gonçalves J. V. 96, 103, 104
Good I. J. 583
Goode H. H. 959
Goormaghtigh R. 818
Grad A. 696
Gradştein I. S. 939 К
Graeub W. 741
Green J. A. 119
Griffith J. L. 595
Griffiths H. B. 141
Gröbner W. 113 К
Grosswald E. 62
Guillemin E. A. 586, 588
Gundlach K. B. 123
Győry T. 489

H

Haack W. 804 К
Hadamard J. 783
Hadwiger H. 867
Hafstrom J. E. 661 Д
Hahn W. 357
Haimovici M. 842
Hájek J. 709
Halperin I. 610
Hamilton J. 659
Hammer P. C. 882
Hanai S. 231
Harris L. B. 1022
Hartman P. 401
Hartman S. 315
Haupt O. 282
Havel V. 754
Heaton R. E. 117
Heinrich H. 909
Heller P. N. 988
Helson H. 333
Henderson A. 748
Hennequin A. 780 К
Hermes H. 964
Hersch J. 889
Higman G. 137
Hildebrand F. B. 927 К
Hildreth C. 732
Hincsin A. J. 542 К
Hiong King-Lai 366
Hirsch G. 260
Hodges J. H., 109,
Hogges J. L., Jr 710
Hoel P. G. 706
Hollingsworth J. W. 882
Honnell P. M. 993
Hopper G. M. 961
Horn R. E. 993
Hornich H. 443
Hsiung Chuan Chih 879
Huber H. von 869
Hughes D. R. 201
Nume J. N. P. 960
Hunter J. 522

I

Ide S. 855
Ioanin G. 223
Ionescu T. 89 К
Iséki K. 164, 232, 234, 235, 240
Ishii T. 240
Ishikawa F. 229
Izumi S. 304, 305, 306

J

Jackson L. K. 388
Jaeger A. 202
Jalůvka V. 806 К
James R. C. 609
Janković Z. 584
Jarník V. 549 К
Jaworowski J. W. 257
Jeffreys B. S. 504 К
Jeffreys H. 504 К
Johansson I. 526
Jones D. D. 982
Jordan K. 529
Julia G. 834 К
Jurkat W. 312
Justinijanović J. 795

K

Kac M. 700
Kahane A. 836 К
Kähler E. 45
Kampé de Fériet J. 730
Kanold H.— J. 59
Kantorovici L. V. 925 К, 926 К
Karl H. 750
Karlin S. 553 Д
Kasahara K. 233
Kasahara S. 233
Kemeny J. G. 966
Kerfoot B. P. Jr 1017 Д
Kertész A. 142, 143, 152
Kestelman H. 778
Kestin J. 914
Kiefer J. 700
Kimura N. 173
Kinukawa M. 307, 308
Kivéliovitch M. 712
Kizu I. 293
Klamkin M. S. 680
Klee V. L., Jr 601
Klein M. L. 995
Kline M. 742
Knopp K. 570 К
Kobayashi S. 860
Kohlmann Č. 531
Kolibiar M. 206
Kostant B. 198
Kotzig A. 253, 255, 540 К
Kowalewski G. 114 К
Krasnoselski M. A. 919
Krein M. G. 634
Kreindler O. 761 К
Krîlov V. I. 925 К, 926 К
Krull W. 175 К
Kuiper N. H. 847, 848
Kuller R. G. 221 Д
Kunle H. 829
Kuntzmann J. 885
Kuramochi Z. 373, 374, 375, 378
Kuratowski K. 289
Kusko A. 988

L

Lajoy M. H. 994
Lakshmana Rao S. K. 585
Lambert H. L. 1019 П
Lancaster H. O. 697
Landsberg M. 606
Lane R. E. 277
Larras J. 82
Laugwitz D. 859
La Vallée Poussin C. de 367
Lawina M. 922
Lax P. D. 363
Leak P. 933
Lebesgue H. 41, 772 К
Leclerc B. 996
Ledley R. S. 962
Leech J. 755
Leja F. 771 К
Lelong P. 384, 389
Lepage M. 833
Lepage T. 266
Levi H. 90 К
Libermann P. 863, 864 К
Lichnerowicz A. 115 К
Liebeck H. 144
Linden C. N. 335
Línek A. 944, 945
Linvill W. K. 586
Lions J.-L. 451
Ljunggren W. 67, 68
Locher-Ernest L. 756
Lohwater A. J. 365
Lomazzi L. 759
Lorch E. R. 631
Lorey W. 37
Łoś J. 145
Lovass-Nagy V. 489
Ludwig R. 908

M

McCarthy J. 481 Д
McCoy N. H. 190
MacKenzie R. E. 215 Д
McMahon M. E. 981
Mac Nerney J. S. 642
McPherson J. L. 977
Macrobert T. M. 573
McShane E. J. 615
Magenes E. 449, 457
Magnìò S. 817 К
Mahel V. 806 К
Mahler K. 332
Malgrange B. 434
Manolescu G. 923
Manunza F. 934
Marchionna E. 816
Marcus S. 294
Marinescu G. 607
Marković Z. 20
Marmion A. 753
Martinelli E. 766 К
Martino M. A. 337
Martins dos Santos J. F. N 910
Masuda K. 131
Maxfield J E. 707
Meier K. E. 364
Meijer C. S. 577
Meili H. J. 351
Mendelsohn N. S. 86
Mikołajska Z. 421
Miksa F. L. 521
Mikusiński J. 597
Miller K. S. 569
Miller W. 840 Д
Minakshisundaram S. 468
Miranda C. 476
Miranker W. 933
Mirkil H. 646
Miron R. 843
Mohanty R. 310
Moisil G. C. 91К, 92К, 224
Moore A. R. 980
Moore E. F. 963
Mordell L. J. 66
Morgan H. C. 995
Mori S. 191
Mori T. 614
Morimoto A. 155
Morin U. 765 К
Morita K. 231
Morra F. 548 К
Morse P. M. 719
Mostow G. D. 156
Mostowski A. 182
Müller H. R. 764К
Munn W. D. 166
Murgulescu E. 773 К
Murnaghan F. D. 132
Murray P. G. 917
Myrberg P. J. 371

N

Nagahara T. 192
Nagata J. 230
Nagumo M. 465
Nakano H. 614
Nakano N. 183
Neculce M. 799 К
Nelson E. 976
Nemes T. 965, 1012 К
Nering E. D. 216 Д
Neumann B. H. 133, 148
Neumann H. 147
Neumann J. van 625
Nevanlinna R. 43
Newman M. 60
Niče V. 812
Nielsen K. L. 928 К
Nijboer B. R. A. 733
Nishimura T. 888
Nöbeling G. 239
Nocilla S. 454
Norton D. A. 85
Novák C. 945
Numakura K. 196
Nussbaum A. E. 625

O

Ohara A. 149
Ohmann D. 877
Olsen H. 727
Olsson R. G. 580
Ontlová K. 997
Orden A. 717
Øverås H. 727
Ostrowski A. 106, 283, 911
Ozawa M. 376, 377

P

Paatero V. 349
Pagni M. 446
Pajares E. 40
Pajares Diaz E. 998
Palmer P. J. 728
Pankove J. I. 980
Papelier G. 776 К
Passmore F. R. 958
Pauc C. 282
Peltier J. 901
Penrose R. 166
Penzlin F. 658
Persen L. N. 914
Petkantschin B. 831
Petrescu S. 762 К
Peyerimhoff A. 589
Pfluger A. 889
Pleijel A. 873
Pólya G. 470
Prager W. 720
Preston G. B. 167, 168, 169, 170
Pritchard H. O. 971
Proebster W. E. 975
Prvanovitch M. 825
Pták V. 603, 618
Pucci C. 464
Pukánsky L. 644

Q

Quilghini D. 329

R

Rabin M. 876
Rabinowitz G. 933
Rabinowitz P. 890
Råde Z. 690
Rado R. 619
Rado T. 533 К
Radojčić M. 379
Rådström H. 286
Ragab F. M. 574, 576
Rahman Q. I. 353
Rajski C. 225
Raleigh J. 177 Д
Ramanujan M. S. 559

athie C. B. 578, 590
édei L. 134
ees D. 193, 194, 195
eichelderfer P. V. 533 К
einer I. 126
eitwiesner G. W. 903
eutter F. 803 К
icci G. 334
ice W. C. 1031 П
ijic I. M. 939 К
itt R. K. 612
izza G. B. 385
oach J. F. 981
obin L. 582
ogers C. A. 63, 278
oma M. S. 887
ose A. 1027
ose M. E. 933
osenfeld A. 745
oux D. 57
oyster W. C. 348
ubin H. 694
ubin J. E. 207
udin W. 361
usu E. 89 К
yser H. J. 105

S

aban G. 874
alam A. 659
alzer H. E. 898, 916
ampson J. H., Jr 482 Д
anden H. von 929 К
apiro Z. Ya. 660
arkar G. K. 591
atô M. 303, 305, 306
Schafer R. D. 200
Scheffer C. L. 682
Scheffer M. 557
Schieferdecker E. 174
Schilk J. A. 1027
Schinzel A. 58
Schläfli L. 15 К
Schmidt W. 992
Schneider H. 110, 111
Schoonmaker N. J. 560
Schopf A. 889
Schützenberger M. P. 714
Schwartz L. 435, 450
Schweigert G. E. 246
Schweppe E. J. 880 Д
Scorza Toso A. 297
Scott R. E. 586
Sedláček J. 524
Seibert P. 403
Seidel W. 360
Seiden E. 708
Seidenberg A. 203
Sexton C. R. 80
Shirai T. 228
Shiskin J. 977
Sinvhal S. D. 309
Sitgreaves R. 694
Skolem T. 52
Skovgaard H. 525
Slemon G. R. 984
Smiley M. F. 84
Smirnov V. I. 536 К
Smith O. K. 433 Д
Solomon H. 696
Sparenberg J. A. 511
Standish C. 596
Stein F. M. 518 Д
Stein S. K. 85
Stjernberg B. 983
Stollow S. 391 К
Stojaković M. 101, 108
Stoller D. S. 689
Stolt B. 135, 150
Storchi E. 74
Straus L. W. 900
Strebe D. D. 245
Strubecker K. 6, 535 К, 777 К
Struyk A. 95
Sverdrup E. 687
Sudō T. 22, 23
Sumner F. H. 971
Szamarszkij A. A. 479 К

T

Tamura T. 173
Tarnawski E. 290
Taylor A. E. 630
Taylor S. J. 313
Tchakaloff L. 340
Teichroew D. 935
Teleman C. 851
Terpstra T. J. 695
Theodorescu R. 491
Thierrin G. 171
Thompson W. A., Jr 705
Thurston H. A. 211
Tietz H. 372
Tino O. 773 К
Todd J. 921
Tominaga H. 192
Toscano L. 592, 758
Touchard J. 581
Tsuboi T. 138
Tuffentsammer K. 918
Turán P. 70
Tyihonov A. N. 479 К

U

Urbanik K. 523

V

Valach M. 997
Valdes L. B. 979
VanBrocklin G. R., Jr 917
Van der Pol B. 581
Van der Waerden B. L 18
Vermes P. 563
Vialar J. 712
Vincensini P. 820
Vinogradov S. P. 541 К
Viola T. 301
Visarion V. 490
Vrânceanu G. 71, 856
Vykutil J. 938 К

W

Wakakuwa H. 853
Wallace A. D. 213
Wallman H. 983
Warmus M. 729, 871 К
Watson G. N. 99
Watson G. S. 702
Weber H. 951
Webster W. M. 978
Weier J. 248, 249, 250 251, 252
Weiller A. R. 734
Weir A. J. 120
Weiss L. 723
Welkowitz W. 968
Wentzel V. 991
Wergeland H. 727
Wermer J. 645
Weyl H. 14 К
Wilansky A. 561
Williams F. K. 995
Williamson J. H. 608
Willmore T. J. 861
Wintner A., 401
Witkowski J. 47
Wolf F. L. 1016 Д
Wolf K. L. 800 К
Wolfe P. 717
Wolff R. 800 К
Wolfowitz J. 700
Wong S. Y. 972
Worsley B. H. 960
Wunderlich W. 760, 819
Wyszecki G. 786

Y

Yokota I. 868
Yoneda K. 699

Z

Zadeh L. A. 569
Zeller K. 561
Zeuli T. 459
Zubieta R. F. 50

---

*Հովհաննիսյան Վ. Ա.* 746

---

ფხაკაძე შ. 268 ჯვარშეიშვილი ა. 276 ხვედელიძე ბ. 368

---

井上正雄 509
伍卓羣 419
任常平 1007
倉西正嗣 539 К
吉田耕作 429 К
大河內治 538 К
岩本裕 19
岩村聯 296
李森林 872
正野重方 956
渡邊勝 836
王光寅 462
矢島祐利 19
石原明 955
稻葉三男 48
胡世華 51
豊田浩七 537
赤羽千鶴 21
赤攝也 300
鈴木彌門 544
鍋島一郎 387
雅格龍 672, 685
駒宮安男 999
高橋進一 382
리 재 곤 100
류 충호 781

---

Технический редактор *Р. М. Денисова*